

Cálculo 2 (GCID). 15–5–2026

- Nombre y apellidos:
- DNI:

1. **(2 puntos)** Enunciar y demostrar el teorema de Euler de aritmética. Como aplicación de este resultado, encontrar el inverso de 3 en \mathbb{Z}_{28} y resolver la ecuación $3x = 5$ en \mathbb{Z}_{28} .

Solución. La primera parte es teoría. Para la aplicación, tenemos que $\gcd(3, 28) = 1$, por lo que

$$3^{-1} = 3^{\varphi(28)-1} \pmod{28}.$$

Como

$$\varphi(28) = \varphi(2^2)\varphi(7) = 12,$$

tenemos que

$$3^{-1} = 3^{11} \pmod{28} = 19,$$

y por tanto

$$x = 19 \cdot 5 \pmod{28} = 11.$$

2. **(2 puntos)** Consideramos el grafo simple G con la matriz de adyacencia siguiente

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

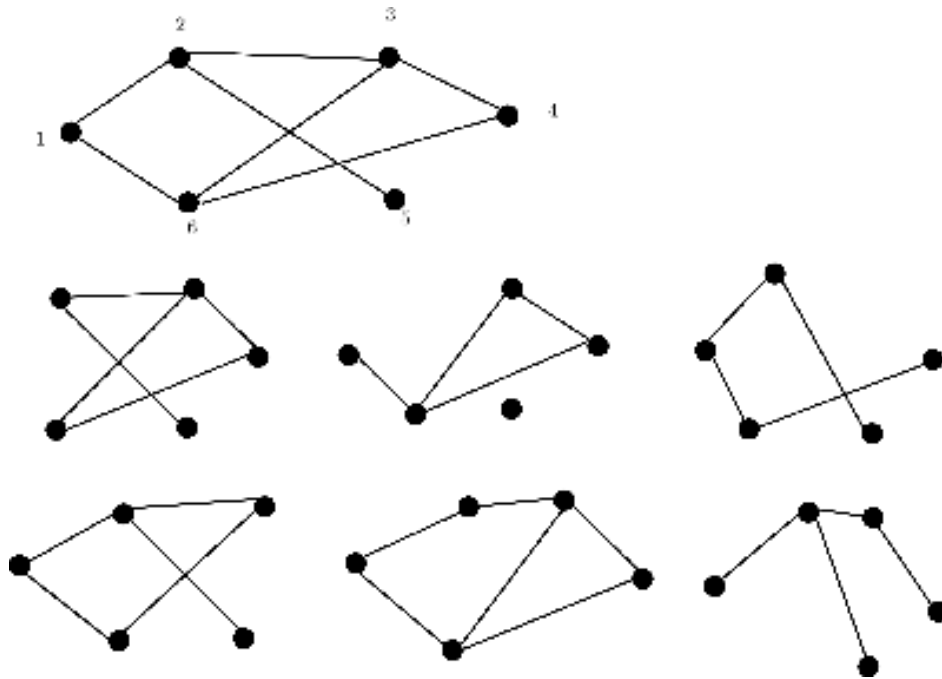
Se pide:

- Dibujar el grafo y determinar si es conexo.
- Obtener los diferentes subgrafos de G que se pueden obtener eliminando un vértice y determinar si son o no isomorfos dos a dos.

Solución. El grafo viene dado en la figura, donde se etiquetan los vértices, de forma que cada subgrafo G_i posterior se construye quitando el vértice i .

Es conexo ya que existe un camino uniendo todos sus vértices. En cuanto a los subgrafos, el G_2 no es conexo, por lo que no puede ser isomorfo a los restantes que sí lo son. Los grafos G_3 y G_6 son árboles, no isomorfos a los restantes que tienen ciclos no entre sí ya que G_6 tiene un vértice de grado 3 que no existe en G_3 . G_5 tiene al menos dos ciclos, por lo que no es isomorfo a G_1 y G_4 que sólo tienen uno. Finalmente, G_1 tiene un ciclo de orden tres que no existe en G_4 , por lo que tampoco pueden ser isomorfos.

3. **(1.5 puntos)** Un sesudo estudio estadístico revela que en una muestra de 101 personas, a 46 les gusta la cerveza “más buena imposible”, a 50 les gusta la marca “me lo bebo to”, a 65 la marca “mejor no se puede”, mientras que 15 determinaron que no les gustaba la cerveza. A nadie les gustó las tres marcas, mientras que se dió el curioso caso de que en todos los casos había las mismas personas a las que les gustaban dos cervezas. Responder razonadamente a las siguientes cuestiones.



- (a) ¿A cuántas personas les gustaban dos cervezas cualesquiera?
 (b) ¿Cuántas personas solo beben la marca "me lo bebo to"?

Solución. Sea A el conjunto de amantes de "más buena imposible", B el conjunto de los que les gusta "me lo bebo to" y C el de consumidores de la marca "mejor no se puede". Sabemos que $|A| = 46$, $|B| = 50$ y $|C| = 65$. Además $|A \cup B \cup C| = 101 - 15 = 86$ y $|A \cap B \cap C| = 0$. Finalmente $|A \cap B| = |A \cap C| = |C \cap B| = x$. Por el principio de inclusión-exclusión, tenemos que

$$86 = |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - 3(|A \cap B| + |A \cap C| + |C \cap B|) + |A \cap B \cap C|$$

$$46 + 50 + 65 - 3x,$$

de donde $x = 25$. Para el otro apartado, tenemos en cuenta que

$$A = [A \cap (B \cup C)] \cup [A \cap (B \cup C)^c],$$

de donde por el principio de inclusión-exclusión

$$\begin{aligned} |B \cap (A \cup C)^c| &= |B| - |B \cap (A \cup C)| \\ &= |B| - |(B \cap A) \cup (B \cap C)| \\ &= |B| - |B \cap A| - |B \cap C| + |B \cap A \cap C| \\ &= 50 - 50 = 0. \end{aligned}$$

1. (1 punto) Resolver si es posible la siguiente ecuación diofántica

$$8085x + 34659y = 1155$$

donde $x, y \in \mathbb{Z}$.

Solución. Sabemos que $\gcd(8085, 34659) = 3$ aplicando el algoritmo de Euclides extendido. Simplificamos a

$$2695x + 11553y = 385.$$

Resolvemos la ecuación

$$11553y \equiv 385 \pmod{2695},$$

que se simplifica a

$$773y \equiv 385 \pmod{2695},$$

de donde

$$y = 773^{-1} \cdot 385 \pmod{2695} = 1925.$$

Todos estas cuentas se hacen con el algoritmo de Euclides extendido. Así

$$y = 1925 + 2695k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

y

$$2695x + 11553(1925 + 2695k) = 385,$$

de donde

$$x = -8252 + 11553k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

5. **(1.5 puntos)** Dadas las proposiciones p , q , y r , y sabiendo que $\neg p \rightarrow q$, $\neg q \vee r \wedge p$ y $\neg r \rightarrow p$ son ciertas, comprobar con y sin tablas de verdad que la proposición $p \wedge (r \vee \neg q)$ es verdad mientras que $p \wedge (r \vee q)$ no tiene porqué serlo.

Solución. Con tablas de verdad, si $P_1 = \neg p \rightarrow q$, $P_2 = \neg q \vee r \wedge p$ y $P_3 = \neg r \rightarrow p$,

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \rightarrow q$	$\neg q$	$r \wedge p$	$\neg q \vee r \wedge p$	$\neg r$	$\neg r \rightarrow p$	$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$
1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0

y

$r \vee \neg q$	$p \wedge (r \vee \neg q)$	$r \vee q$	$p \wedge (r \vee q)$	$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \rightarrow p \wedge (r \vee \neg q)$	$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \rightarrow p \wedge (r \vee q)$
1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1

Así, $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \rightarrow p \wedge (r \vee \neg q)$ es una tautología y el razonamiento es correcto, mientras que $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3) \rightarrow p \wedge (r \vee q)$ no lo es y por tanto el razonamiento es falso.

Veamos ahora sin tablas. Para el primer razonamiento consideramos que q es verdad. Entonces $\neg q$ es falso y dado que $\neg q \vee r \wedge p$ es verdad, debe ser $r \wedge p$ verdad. Entonces r y p son verdaderos y así $r \vee \neg q$ es verdad y por lo tanto lo es $p \wedge (r \vee \neg q)$. Supongamos

ahora que q es falso. Como $\neg p \rightarrow q$ es verdad, $\neg p$ debe ser falso, por lo que p es verdad. Por otra parte, $\neg q$ es verdad, por lo que $r \vee \neg q$ es verdad. Entonces $p \wedge (r \vee \neg q)$ es verdad. Para el segundo razonamiento, observemos que si p es verdad y r y q son falsos, $p \wedge (r \vee q)$ es falso mientras que $\neg p \rightarrow q$, $\neg q \vee r \wedge p$ y $\neg r \rightarrow p$ son verdaderas. Por tanto, se trata de un contraejemplo al razonamiento, que no será válido.