Teoría de grafos

Jose Salvador Cánovas Peña.
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística.

Índice general

Capítulo 1

Teoría de grafos

1.1. Nociones básicas de grafos

Un grafo $G = (V, E)$ es un par formado por dos conjuntos V y E. El conjunto V es un conjunto finito de vértices, mientras que E es un conjunto de aristas que unen dos vértices de V. Si u y v son vértices unidos por una arista, podemos representar ésta por (u, v). Es preciso tener en cuenta que dos vértices pueden estar unidos por más de una arista, por lo que habría que especificar qué arista estamos tomando en cada caso. Los grafos sirven para representar esquemáticamente un determinado problema, como el de los puentes de Könisberg, que se puede ver en la figura 1.1.

Este problema trataba de averiguar si era posible recorrer todos los puentes de la ciudad pasando una única vez por cada puente de forma que se llegara al punto de partida. El problema fué resuelto por Euler haciendo uso, al parecer por primera vez, del concepto de grafo.

El orden del grafo G es el número de elementos del conjunto de vértices V. Para cada vértice $v \in V$, se llama grado de v, denotado $\deg v$, al número de aristas que salen o llegan a v. El grafo se dirá simple si dos vértices de V están unidos por a lo sumo una artista. Cuando sea preciso para evitar confusión, utilizaremos el término multigrafo para denotar grafos no simples. El

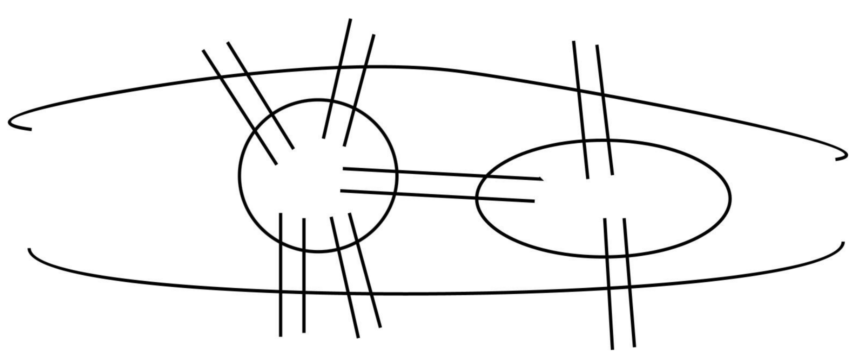

Figura 1.1: Esquema de los puentes sobre las dos islas fluviales en la ciudad alemana de Könisberg.

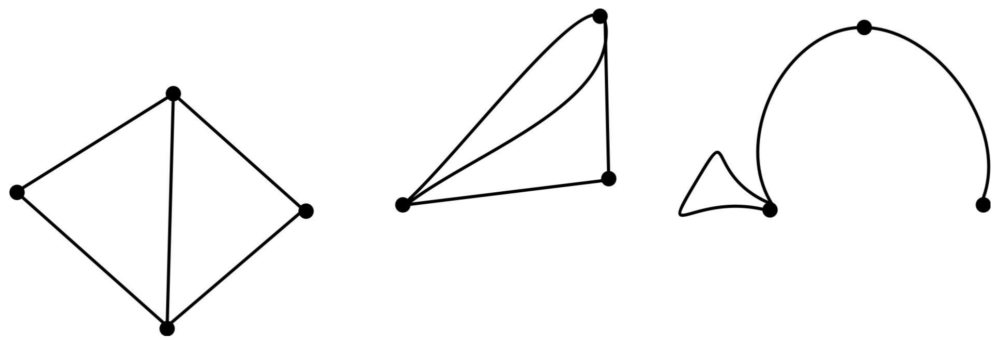

Figura 1.2: Ejempos de grafo simple, multigrafo y pseudografo.

término pseudografo se reserva a grafos que admiten aristas empezando y terminando en el mismo vértice. Si las aristas de un grafo indican una dirección, el grafo se dirá dirigido, y no dirigido en caso contrario. En este tema, salvo que se indique lo contrario, supondremos que todos los grafos son no dirigidos. Dos vértices son adyacentes si existe una arista que los une. En la figura 1.2 pueden verse algunos ejemplos de grafos.

El siguiente resultado es inmediato.

Theorem 1.1.1 *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Entonces*

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|.$$

Demostración. Basta darse cuenta de que al contar las aristas, éstas se cuentan dos veces ya que unen dos vértices distintos.□

Dado un grafo $G = (V, E)$, un subgrafo de G es otro grafo $G' = (V', E')$ de forma que $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$. Dos grafos $G = (V, E)$ y $G^* = (V^*, E^*)$ son isoformos si existe una aplicación biyectiva $f : V \to V^*$ de forma que dados dos vértices $u, v \in V$ y sus imágenes en V^* $f(u), f(v)$, ambos pares de vértices están unidos por las mismas aristas. El isomorfismo de grafos trata de identificar grafos que son esencialmente iguales. Por ejemplo, el grafo completo K_n es un grafo simple no dirigido formado por n vértices de forma que cada vértice se une con los restantes. La figura 1.3 presenta dos representaciones isomorfas de este grafo para $n = 4$.

Dos grafos $G = (V, E)$ y $G^* = (V^*, E^*)$ son homeomorfos si es posible obtenerlos del mismo grafo o grafos isomorfos dividiendo aristas con vértices adicionales. Por ejemplo, en la figura 1.4 se dan varios grafos homemorfos entre sí.

Un camino en un grafo $G = (V, E)$ es una secuencia alternada de vértices y aristas de la forma

$$v_1, e_1, v_2, e_2, ...v_{n-1}, e_{n-1}, v_n,$$

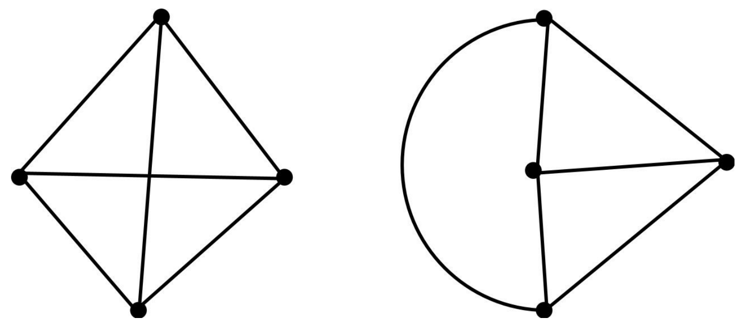

Figura 1.3: Dos representaciones del grafo K_4.

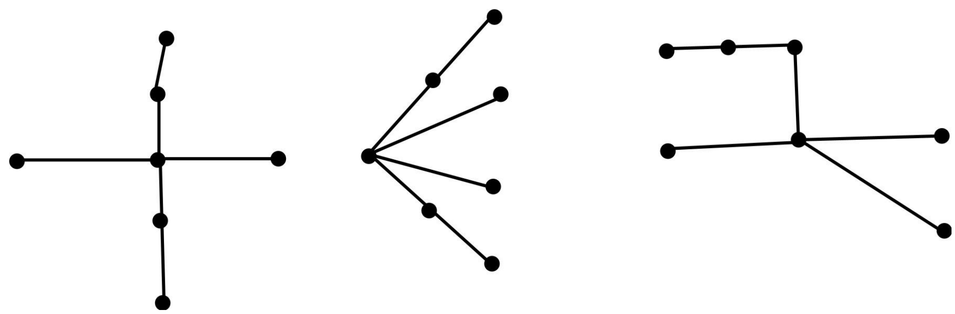

Figura 1.4: Ejemplos de tres grafos homeomorfos. El primero y el tercero no son isomorfos.

donde cada arista e_i conecta los vértices v_i y v_{i+1}, $i = 1, 2, ..., n-1$. La longitud del camino es el número de aristas del mismo. Cuando se trata de un grafo simple, el camino puede representarse simplemente por sus vértices $v_1, v_2, ...v_{n-1}, v_n$. Un camino se dice cerrado si $v_1 = v_n$. Un camino se dice simple si todos los vértices del mismo son distintos. Un ciclo es un camino cerrado de forma que $v_i \neq v_j$ para todo $i, j \in \{2, 3, ..., n-1\}$, $i \neq j$. Un recorrido es un camino de forma que $e_i \neq e_j$, $i, j \in \{1, 2, ..., n-1\}$, $i \neq j$.

Theorem 1.1.2 *Sean $G = (V, E)$ un grafo y $u, v \in V$. Existe un camino conectando u y v si y sólo si existe un camino simple que los une.*

Demostración. Basta probar que todo camino $v_1, e_1, v_2, e_2, ...v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ puede reducirse a uno simple. Si el camino no es simple, sea $i = \min\{k \in \{1, 2, ..., n-1\} : v_k = v_j$ para algún $j > i\}$. Fijado i, sea $j = \max\{k \in \{i+1, ..., n-1\} : v_k = v_i\}$. Eliminamos del camino $v_1, e_1, v_2, e_2, ...v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ el camino $v_i, e_i, v_{i+1}, e_{i+1}, ...v_{j-1}, e_{j-1}$. El camino resultante sigue conectando u y v. Repitiendo este proceso un número finito de veces se consigue el camino simple requerido.$\square$

Un grafo $G = (V, E)$ es conexo si para cada par de vértices $u, v \in V$, existe un camino que los une. Si un grafo no es conexo, puede descomponerse en componentes conexas que son subgrafos conexos $G' = (V', E')$ de G de forma que si $G'' = (V'', E'')$ es otro subgrafo conexo con $V' \cap V'' \neq \emptyset$, entonces G'' es un subgrafo de G'. En la figura 1.5 se muestran ejemplos de grafos conexos y no conexos.

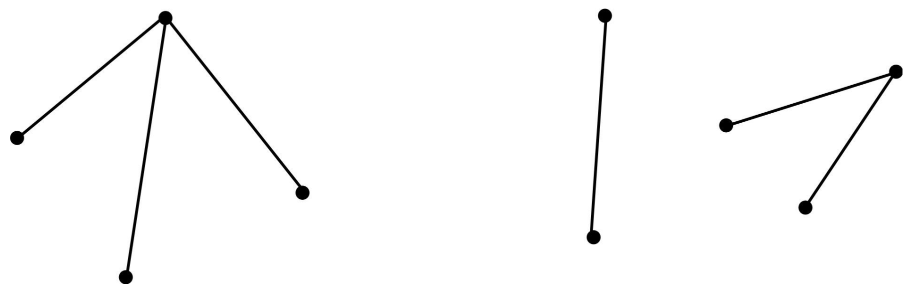

Figura 1.5: A la izquierda un grafo conexos con 4 vértices, a la derecha un grafo no conexo de 5 vértices con dos componentes conexas.

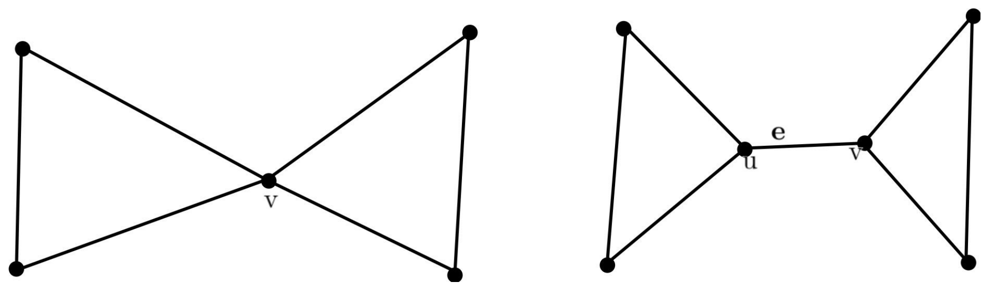

Figura 1.6: A la izquierda el grafo tiene un punto de corte v, a la derecha la arista $\mathbf{e} = (u, v)$ es un puente para el grafo.

Dados un grafo conexo $G = (V, E)$ y $u, v \in V$, se llama distancia entre u y v al camino más corto que une ambos vértices. Se denotará por $d(u, v)$. El diámetro de G, $diam(G) = \text{máx}\{d(u, v) : u, v \in V\}$. Por ejemplo, el diámetro de K_4 es 1.

Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo. Un vértice $v \in V$ se llama punto de corte de G si $G \setminus v$ es disconexo, donde $G \setminus v$ es el grafo que resulta de eliminar de G el vértice v y todos las aristas que llegan o parten de v. Una arista $v \in E$ se llama puente de G si $G \setminus e$ es disconexo, donde $G \setminus e$ es el grafo resultante de eliminar de G la arista e. En la figura 1.6 se muestran ejemplos de puntos de corte y puentes.

1.2. Grafos Eulerianos y Hamiltonianos

1.2.1. Grafos Eulerianos.

Un grafo conexo $G = (V, E)$ es Euleriano si existe un recorrido cerrado de longitud $|E|$ que incluya todos los vértices. El problema de los puentes de Könisberg, consiste en decidir si el grafo de la figura 1.7, que es una simplificación del problema de los puentes, es Euleriano o no.

El siguiente resultado prueba que no es Euleriano, por lo que el problema de los puentes no tiene solución, o que la solución es que no es posible. Antes necesitamos un lema previo.

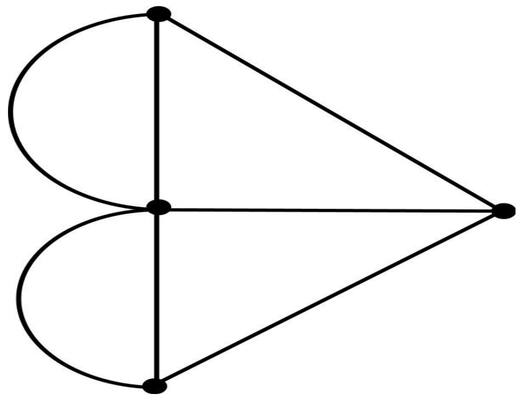

Figura 1.7: Grafo esquemático de los puentes de Königsberg.

Lemma 1.2.1 *Si $G = (V, E)$ es un grafo formado por dos subgrafos Eulerianos que están unidos al menos por un vértice y sin aristas en común, entonces G es Euleriano.*

Demostración. Sea $v \in V$ un vértice común a cada subgrafo. Tomamos dos recorridos cerrados en cada grafo que empiezan y acaban en v y los unimos. Como los subgrafos no tienen aristas en común, el resultado es un recorrido cerrado de longitud $|E|$, por lo que G es Euleriano.□

Theorem 1.2.2 *Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo. G es Euleriano si y sólo si $\deg v$ es par para todo $v \in V$.*

Demostración. Una primera observación es que si $\deg v$ es impar para algún $v \in V$, entonces el grafo no puede ser Euleriano ya que el recorrido no puede ser cerrado, ya que se debe de poder salir del vértice cada vez que se llega a él. Así, basta demostrar que si el grado de cada vértice es par, entonces existe un recorrido cerrado. Haremos la demostración por inducción en $k = |E|$.

Si $k = 2$, se trata de un grafo con dos vértices y dos aristas uniéndolos, que es claramente Euleriano.

Supongamos el resultado cierto para grafos conexos con a lo sumo $k - 1$ aristas. Tomamos $v \in V$ y comenzamos a recorrer el grafo de manera que nunca pasamos dos veces por la misma arista. Démonos cuenta de que cómo el grado de cada vértice es par, siempre se puede salir de un vértice cada vez que se llega a él. Como el grafo es finito, después de algunos pasos volvemos a v. Distinguimos dos casos: si al llegar a v hemos recorrido todas las aristas el grafo es Euleriano. Supongamos entonces que no se han recorrido todas las aristas, por lo que el camino recorrido forma un subgrafo Euleriano G' de G. Si quitamos a G todas las aristas recorridas en G' obtenemos otro subgrafo G'' con cada vértice de grado par. Puede que G'' no sea conexo, pero todas sus componentes conexas han de ser Eulerianas por la hipótesis de inducción. Uniendo paso a paso cada una de las componentes conexas de G'' al grafo G', vamos aumentando el grafo que por el Lema 1.2.1 será Euleriano. Tras unir un número finito de componentes conexas recuperamos el grafo G, que será Euleriano.□

Por ejemplo, el grafo bipartito $K_{n,m}$ se define de forma que su conjunto de vértices es $U \cup V$, $|U| = n$, $|V| = m$, y tal que todo vértice de U se conecta con todos los vértices de V y solo

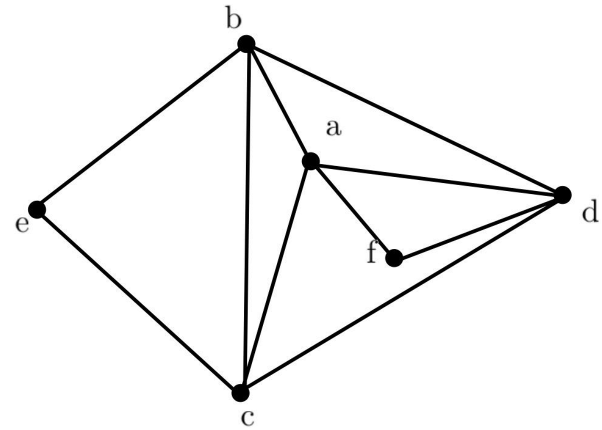

Figura 1.8: Grafo Euleriano.

con ellos, y vivceversa. Estos grafos son Eulerianos si n y m son pares. El grafo completo K_n es Euleriano si n es impar.

El algortimo presentado en la demostración del teorema de Euler no es eficiente. Para buscar recorridos cerrados Eulerianos tenemos el algortimo de Fleury, que es fácil de utilizar.

Algoritmo de Fleury. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo

1. Elegimos un vértice cualquiera del grafo $v \in V$.

2. Recorremos el grafo pasando una vez por cada arista. En cada paso eliminamos la arista del grafo G quedando el grafo resultante con las aristas que todavía no se han usado. Elegimos siempre que se pueda ir a vértices que tengan todavía varias aristas por las que no se haya pasado.

3. En cada paso elegimos únicamente una arista de las que quedan sin usar, en caso de poder elegir.

En la figura 1.8 mostramos un grafo para ilustrar cómo es el proceso del algoritmo para encontrar un ciclo Euleriano. Empezamos eligiendo el vértice d, y recorremos las aristas (d, b), (b, c), (c, d), (d, f), (f, a), (a, c), (c, e), (e, b), (b, a) y (a, d). Nótese que en las elecciones anteriores de aristas, cuando se han usado (d, b), (b, c), (c, d), (d, f), (f, a), si elegimos la arista (a, d) no se logra un camino Euleriano. Eso pasa por elegir ir al vértice d que ya sólo tiene una arista disponible.

1.2.2. Grafos Hamiltonianos.

Un grafo conexo $G = (V, E)$ es Hamiltoniano si existe un ciclo de longitud $|V|$, o equivalentemente, si se pasa por cada vértice una única vez, salvo el primero y último vértice. En general, no es tan secillo como en el caso de los grafos Eulerianos el determinar si un grafo conexo es o no Hamiltoniano. Intuitivamente, cuanto mayor sea el grado de cada vértice, más fácil es encontrar un ciclo que recorra todos los vértices del grafo. Así, el grafo completo K_n es Hamiltoniano para

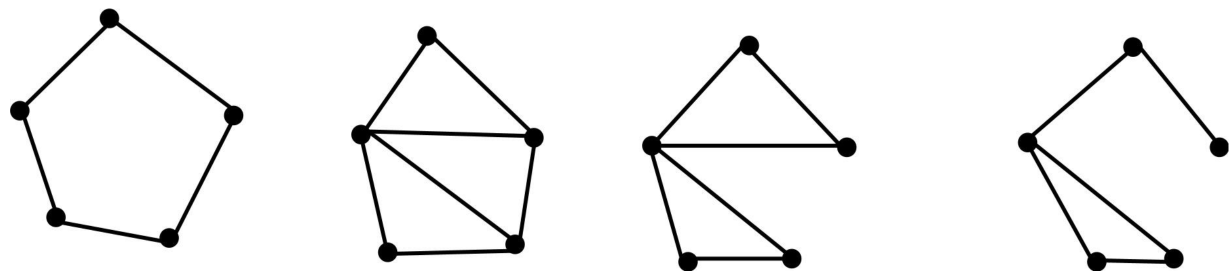

Figura 1.9: De izquierda a derecha tenemos un grafo Euleriano y Hamiltoniano, un grafo Hamiltoniano y no Euleriano, un grafo Euleriano y no Hamiltoniano y un grafo ni Euleriano ni Hamiltoniano.

todo n natural, pero también lo es el grafo simple circular C_n formado por n vértices $v_1, ..., v_n$ de modo que $\deg v_i = 2 \ \forall v \in V$ y cada arista une v_i con v_{i+1}, $i = 1, 2, ..., n-1$, y v_n con v_1. En general, los grafos Eulerianos y Hamiltonianos no están relacionados como muestran los ejemplos de la figura siguiente.

El siguiente resultado da una condición necesaria para que un grafo sea Hamiltoniano.

Theorem 1.2.3 ***(Teorema de Ore)*** *Sea $G = (V, E)$ un grafo simple conexo de orden $n = |V| \geq 3$. Si para cada par de vértices no adyacentes u, v se cumple que*

$$\deg u + \deg v \geq n,$$

entonces G es Hamiltoniano.

Demostración. Vamos a suponer que G no es Hamiltoniano para llegar a una contradicción. Como G es un subgrafo de K_n, podemos añadir aristas a G de una en una hasta tener un grafo Hamiltoniano. Sea G' el grafo que resulta de eliminar la última arista del grafo Hamiltoniano obtenido, que no será Hamiltoniano. Sean ahora $u, v \in V$ dos vértices no adyacentes para G', y démonos cuenta que tampoco son adyacentes para G. Además, si denotamos el grado en G' como $\deg_{G'}$ obtenemos

$$\deg_{G'} u + \deg_{G'} v \geq \deg_G u + \deg_G v \geq n,$$

por lo que G' cumple con las hipótesis del teorema. Sean v_1 y v_n vértices no adyacentes de forma que si se añade una arista conectándolos el grafo resultante sería Hamiltoniano. Tomamos el camino simple $v_1, v_2, ..., v_{n-1}, v_n$. Sean $m = \deg_{G'} v_1$ y $P := \{v_j \in V : v_{j+1} \text{ es adyacente a } v_1\}$. Nótese que $v_1 \in P$, pero $v_n \notin P$. Por hipótesis,

$$\deg_{G'} v_n \geq n - \deg_{G'} v_1 = n - m.$$

Como hay $n-1$ vértices distintos de v_n, habrá como mucho $m-1$ vértices no adyacentes a v_n. Existirá entonces un vértice $v_t \in P$ adyacente a v_n y no adyacente a v_1. Construimos el ciclo

$$v_1, v_2, ..., v_{t-1}, v_t, v_n, v_{n-1}, ..., v_{t+1}, v_1,$$

que tiene longitud n. Por lo tanto G' debe ser Hamiltoniano, en contra de lo que habíamos establecido en su construcción. Como esta contradicción es posible al asumir que G no es Hamiltoniano, se prueba que G sí es Hamiltoniano.□

De este resultado obtenemos el siguiente corolario.

Corollary 1.2.4 *Sea $G = (V, E)$ un grafo simple conexo con $n = |V| \geq 3$. Si para todo $v \in V$ se cumple que $\deg v \geq \frac{n}{2}$, entonces G es Hamiltoniano.*

1.3. Matriz de Adyacencia

La matriz de adyacencia es útil para trabajar con grafos de forma computacional. Dado un grafo simple $G = (V, E)$, supongamos una ordenación de sus vértices de la forma $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Se define la matriz de adyacencia del grafo $\mathbf{A} = (a_{ij})$ de forma que $a_{ij} = 1$ si existe una arista uniendo v_i y v_j, y $a_{ij} = 0$ en caso contrario. Por ejemplo, el grafo completo K_4 tiene matriz de adyacencia

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

mientras que la del grafo circular C_4 es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como el grafo es no dirigido, la matriz de adyacencia es siempre simétrica. Como muestra el siguiente resultado, las matriz $\mathbf{A}$ nos da información sobre los posibles caminos en el grafo G.

Theorem 1.3.1 *Sean $G = (V, E)$ un grafo simple con $|V| = n$ y $\mathbf{A}$ su matriz de adyacencia. Dado $k \in \mathbb{N}$, sea $\mathbf{A}^k = (a_{ij}^{[k]})$. Entonces $a_{ij}^{[k]}$ es el número de caminos de longitud k que unen v_i con v_j para todo $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.*

Demostración. Procedemos por inducción en k. Para $k = 1$ el resultado es cierto por la construcción de $\mathbf{A}$. Supongamos el resultado cierto para k y probémoslo para $k + 1$. Para ello fijamos $i, j \in \{1, 2, ..., m\}$ y un nuevo vértice v_m. Por la hipótesis de inducción, $a_{im}^{[k]}$ es el número de caminos de longitud k que unen v_i y v_m. Por lo tanto, el número de caminos de longitud $k + 1$ que unen v_i y v_j cuyo penúltimo vértice es v_m es $a_{im}^{[k]} \cdot a_{mj}$. Por lo tanto, el número de caminos de longitud $k + 1$ que unen i y j es

$$a_{i1}^{[k]} \cdot a_{1j} + a_{i2}^{[k]} \cdot a_{2j} + ... + a_{in}^{[k]} \cdot a_{nj}$$

que se corresponde con el elemento i, j de la matriz $\mathbf{A}^k \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^{k+1}$.□

Como colorario, obtenemos la siguiente clasificación de grafos simples conexos.

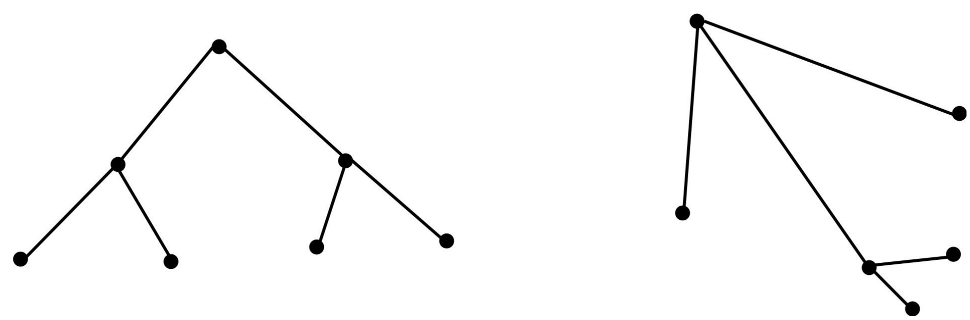

Figura 1.10: Dos ejemplos de árboles.

Corollary 1.3.2 *Sean $G = (V, E)$ un grafo simple con $|V| = n$, y su matriz de adyacencia $\mathbf{A}$. G es conexo si y solo si la matriz $\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + ... + \mathbf{A}^n$ tiene sus entradas fuera de la diagonal principal no nulas.*

1.4. Árboles

Un árbol $G = (V, E)$ es un grafo conexo sin ciclos. La figura 1.10 muestra varios ejemplos de árboles.

Es fácil darse cuenta de que eliminar una arista del árbol elimina la propiedad de conexión, dejando dos componentes conexas. Añadir una arista entre dos vértices del árbol crea un ciclo, por lo que rompe la propiedad de árbol. Finalmente, en un árbol existe un único camino entre dos vértices que los une sin repetir vértices. Recíprocamente, si esa propiedad ocurre, entonces el grafo no tiene ciclos, por lo que se trata de un árbol.

En un árbol, se puede elegir cualquier vértice como raiz o nivel cero del mismo. Los vértices adyacentes a la raiz estarán en el nivel uno. Seguimos este proceso hasta llegar a los vértices que no tienen nuevos vértices adyacentes, que se denominan hojas del árbol. Las aristas del árbol se llaman ramas. El siguiente resultado caracteriza los árboles.

Theorem 1.4.1 *Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. Entonces G es un árbol si y solo si G es conexo y $|V| = |E| + 1$.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que G es un árbol. Por definición es conexo, por lo que solo resta comprobar la igualdad $|V| = |E| + 1$, que probaremos por inducción en $n = |E|$. Si $n = 1$ se trata de un segmento, que tiene dos vértices. Suponemos el resultado cierto para grafos con menos de n aristas y lo probamos para n. Elegimos una arista $e \in E$ y el grafo $G \setminus e$, que tendrá dos componentes conexas $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ que son árboles por la hipótesis inductiva. Por tanto $|V_i| = |E_i| + 1$ para $i = 1, 2$. Como para obtener G basta añadir la arista eliminada, tenemos que

$$|V| = |V_1| + |V_2| = |E_1| + |E_2| + 1 + 1 = |E| + 1,$$

dado que $|E| = |E_1| + |E_2| + 1$.

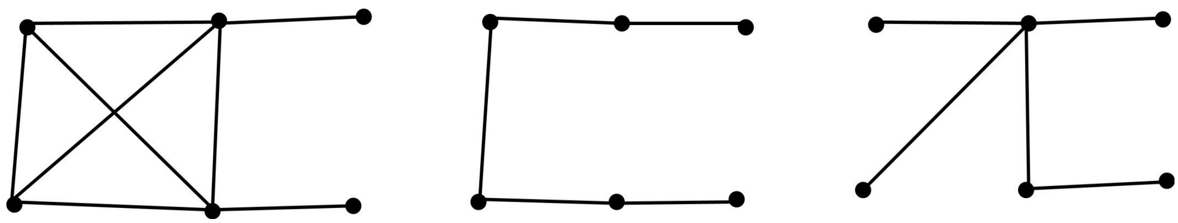

Figura 1.11: A la izquierda un grafo conexo, y a su derecha dos árboles generadores.

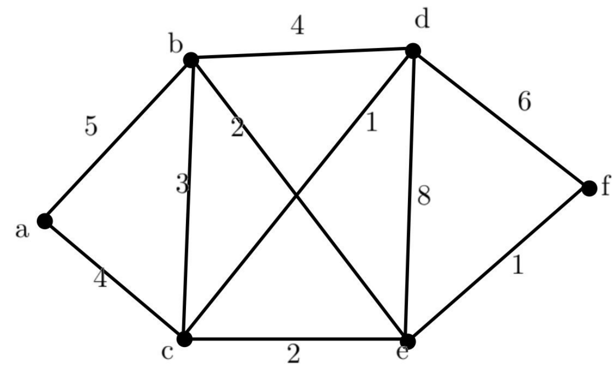

Figura 1.12: Grafo ponderado o con peso.

Suponemos ahora que G es conexo y $|V| = |E| + 1$, y veamos que se trata de un árbol. Por reducción al absurdo, supongamos que G no es un árbol, por lo que debe tener un ciclo de longitud k, por lo que quedan $|V| - k = n + 1 - k$ vértices fuera del ciclo. Como el grafo es conexo, existen al menos $n + 1 - k$ aristas conectando los vértices fuera del ciclo con los de éste. Como en dicho ciclo hay k aristas, tenemos que

$$|E| \geq n + 1 - k + k = n + 1 = |V|,$$

que contradice la igualdad $|V| = |E| + 1$.$\square$

Dado un grafo simple conexo $G = (V, E)$, se llama árbol generador de G a un árbol que contiene todos los vértices de G. En la figura 1.11 se muestran árboles generadores de un grafo dado.

Un grafo etiquetado o ponderado es aquel que es simple y tiene unos pesos o valores numéricos no negativos en cada arista como muestra en la figura 1.12. En ellos, dado un camino se define su peso como la suma de los pesos de las aristas que lo forman. Un problema importante es encontrar los árboles generadores de peso mínimo, para lo que disponemos de varios algoritmos.

Algoritmo 1.

1. Partimos de un grafo simple conexo ponderado $G = (V, E)$ con n vértices.

2. Ordenamos las aristas en orden decreciente de peso.
3. Se procede a eliminar secuencialmente cada arista que no haga el grafo resultante disconexo.
4. Se termina el proceso cuando el número de aristas en el grafo resultante sea $n-1$.

Algoritmo de Kruskal.

1. Partimos de un grafo simple conexo ponderado $G=(V,E)$ con n vértices.
2. Ordenamos las aristas en orden creciente de peso.
3. Se toman los vértices de G y se van agregando aristas de forma secuencial, de forma que el grafo resultante no tenga ciclos.
4. Se termina el proceso cuando el número de aristas en el grafo resultante sea $n-1$.

Algoritmo de Prim.

1. Partimos de un grafo simple conexo ponderado $G=(V,E)$ con n vértices.
2. Empezamos en un vértice cualquiera.
3. Vamos añadiendo aristas secuencialmente eligiendo las de menor peso de manera que tengan un vértice en común con el grafo del paso anterior y no se genere ningún ciclo.
4. Se termina el proceso cuando el número de aristas en el grafo resultante sea $n-1$.

A continuación, vamos a ilustrar como se aplican los algoritmos anteriores en el grafo de la figura 1.12. Ordenamos las aristas en orden creciente de peso, es decir, (e,f), (c,d), (c,e), (b,e), (b,c), (a,c), (b,d), (a,b), (d,f) y (d,e).

En el algoritmo 1 tenemos que eliminar 5 aristas en orden decreciente de peso de forma que el grafo resultante sea un árbl conexo. Así, eliminamos las aristas (d,e), (d,f), (a,b). No podemos eliminar ni (a,c), por lo que eliminamos (b,d) y (b,c). El árbol resultante de peso total 10 se muestra en la figura 1.13.

Aplicamos ahora el algoritmo de Kruskal. Con la ordenación de aristas anterior, vamos añadiendo las aristas en orden creciente de peso. Así, añadimos las aristas (e,f), (c,d), (c,e), (b,e). No podemos añadir (b,c) porque tendríamos un ciclo. Así, añadimos (a,c) y obtenemos el mismo árbol que el del algoritmo 1.

Finalmente, utilizamos el algoritmo de Prim empezando por el vértice a. Añadimos las aristas (a,c), (c,d), (c,e), (e,f) y (b,e) por este orden, obteniendo el mismo grafo que el del algoritmo 1.

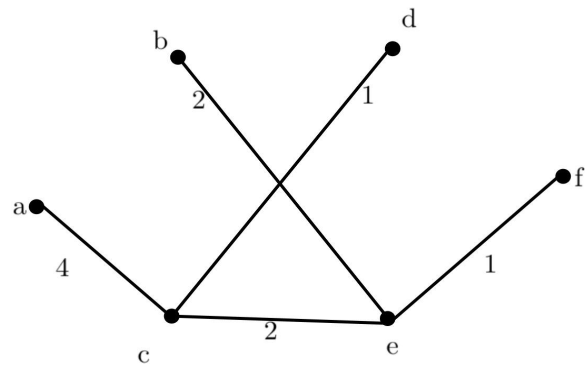

Figura 1.13: Árbol de peso total mínimo obtenido a partir del algoritmo 1.

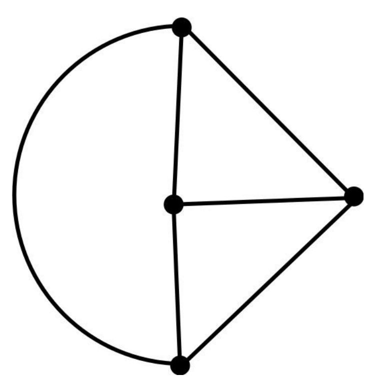
Figura 1.14: Mapa del grafo K_4 que muestra que es plano.

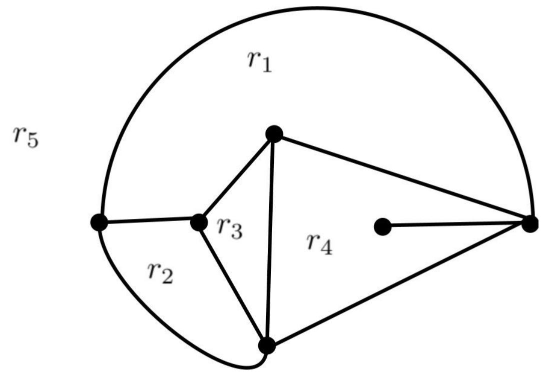

Figura 1.15: Grafo plano con sus regiones.

1.5. Grafos Planos

Un grafo $G = (V, E)$ es plano cuando puede trazarse de forma que sus aristas no se crucen. En la figura 1.14 se muestra que el grafo completo K_4 es plano.

La representación del grafo de forma que sus aristas no se cortan se llama mapa. Dado un mapa de un grafo conexo, puede observarse que de forma natural, las aristas del grafo dividen a éste en un número finito de regiones, que están delimitadas por caminos cerrados, de forma que no contiene aristas en su interior. Todas las regiones están acotadas salvo la exterior. En la figura 1.15 se muestra un mapa junto con sus regiones.

Dado un mapa de un grafo conexo y una región r, se define su grado como la longitud (número de aristas) del camino cerrado que la delimita. Se denotará el grado de r por $\deg(r)$. Por ejemplo, en la figura 1.15 el grado de cada una de sus regiones es $\deg(r_1) = 4$, $\deg(r_2) = \deg(r_3) = 3$, $\deg(r_4) = 5$ y $\deg(r_5) = 3$. Obsérvese que en la región r_4 una arista debe recorrerse dos veces para cerrar el camino. Denotemos por R el conjunto de regiones de un grafo plano. Como ocurría con los vértices, se verifica el siguiente resultado análogo.

Theorem 1.5.1 *Sea $G = (V, E)$ un grafo plano conexo. Entonces*

$$\sum_{r \in R} \deg(r) = 2|E|.$$

Demostración. Nótese que un cada arista se recorre dos veces, bien porque las regiones sean adyacentes y compartan la arista en el camino que los delimita, bien porque tenga que recorrerse dos veces para cerrar el camino que delimita la región.□

Los grafos planos se caracterizan por el siguiente resultado debido a Euler.

Theorem 1.5.2 *Consideremos un mapa de un grafo plano conexo $G = (V, E)$. Entonces*

$$|V| + |R| - 2 = |E|.$$

Demostración. La demostración se hará por inducción en $k = |E|$. Si $k = 1$, se trata o bien de un grafo con una arista uniendo dos vértices con una única región, o bien de un de una arista que empieza y acaba en el mismo vértice, llamada lazo, con dos regiones. En ambos casos se verifica la fórmula.

Supongamos que la fórmula es cierta para grafos con menos de k aristas y probémoslo para grafos con k aristas. Distinguimos dos casos. Si G es un árbol, por el Teorema 1.4.1 se tiene que $|V| = |E| + 1$. Como los árboles tienen una única región, se tiene que $|V| + |R| = |E| + 2$, por lo que la fórmula es cierta. Supongamos ahora que G contiene un ciclo y sea $e \in E$ una arista de dicho ciclo. Tomamos el grafo $G' = (V', E') = G \setminus e$ que es plano y tiene $k - 1$ aristas. G' tendrá una región menos que G ya que al eliminar una arista del ciclo, ésta es frontera de otra región, por lo que se unen las dos regiones en una sola. Por la hipótesis de inducción, si denotamos por R' las regiones de G' tenemos que

$$|V'| + |R'| = |E'| + 2 \Rightarrow |V| + |R| - 1 = |E| - 1 + 2 \Rightarrow |V| + |R| - 2 = |E|,$$

y la demostración concluye.$\square$

Obtenemos el siguiente resultado a partir del teorema anterior.

Theorem 1.5.3 *Consideremos un mapa de un grafo simple plano conexo $G = (V, E)$ con $|V| \geq 3$. Entonces:*

(a) $|E| \leq 3|V| - 6$.

(b) Si G no tiene ciclos de longitud 3, entonces $|E| \leq 2|V| - 4$.

(c) G tiene al menos un vértice de grado menor o igual que 5.

Demostración. (a) Una región $r \in R$ puede tener grado 1 si y sólo si se trata de un lazo uniendo un único vértice, y puede tener grado 2 si se trata de dos aristas uniendo dos vértices. Por lo tanto, si el grafo es simple $\deg(r) \geq 3$ $\forall r \in R$. Utilizando el Teorema 1.5.1 tenemos que

$$2|E| = \sum_{r \in R} \deg(r) \geq 3|R| \Rightarrow \frac{2}{3}|E| \geq |R|.$$

Aplicando la fórmula de Euler, Teorema 1.5.2, tenemos que

$$2 = |V| + |R| - |E| \leq |V| + \frac{2}{3}|E| - |E| = |V| - \frac{1}{3}|E|,$$

de donde

$$\frac{1}{3}|E| \leq |V| - 2,$$

con lo que

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

(b) Con el argumento anterior tenemos que

$$2|E| = \sum_{r \in R} \deg(r) \geq 4|R| \Rightarrow \frac{1}{4}|E| \geq |R|.$$

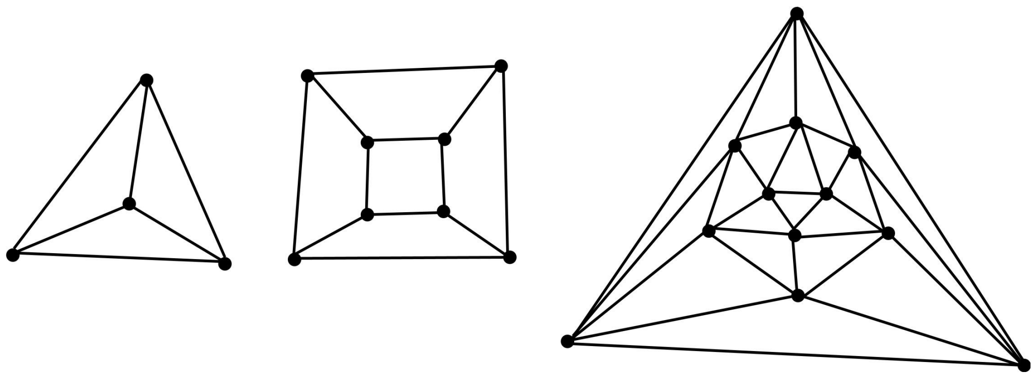

Figura 1.16: De izquierda a derecha, un grafo tal que $|E| = 3|V| - 6$, otro sin ciclos de longitud 3 tal que $|E| = 2|V| - 4$, y otro grafo tal que todos sus vértices tienen grado 5.

Entonces

$$2 = |V| + |R| - |E| \leq |V| + \frac{1}{2}|E| - |E| = |V| - \frac{1}{2}|E|,$$

de donde procediendo como antes obtenemos que $|E| \leq 2|V| - 4$.

(c) Suponemos por reducción al absurdo que todos los vértices tienen al menos grado 6. Entonces

$$\sum_{v \in V} \deg(v) \geq 6|V|.$$

Por el Teorema 1.1.1 tenemos que

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| \geq 6|V| \geq 2|E| + 12,$$

de donde obtenemos la contradicción $0 \geq 12$.□

Las desigualdades de teorema anterior son las mejores posibles ya que pueden darse ejemplos de mapas de grafos planos simples que satisfacen las igualdades. Los ejemplos de la figura 1.16 muestran que es posible tener $|E| = 3|V| - 6$, $|E| = 2|V| - 4$ y un grafo cuyos vértices tienen grado 5.

Finalizamos este apartado dando algunos ejemplos de grafos no planos. Por ejemplo, el grafo completo K_5 no es plano ya que tiene 5 vértices y 10 aristas, y por tanto inclumple la desiguladad $|E| \leq 3|V| - 6$. El grafo bipartito $K_{3,3}$ tampoco es plano ya que tiene 6 vertices, todos con grado 3, y 9 aristas e incumple por tanto la desigualdad $|E| \leq 2|V| - 4$. En la figura 1.17 mostramos ambos grafos.

Lo interesante de estos ejemplos es que permiten caracterizar los grafos que no son planos, con el siguiente resultado debido a Kuratowski.

Theorem 1.5.4 *Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo. G no es plano si y sólo si contiene un subgrafo homeomorfo a K_5 o $K_{3,3}$.*

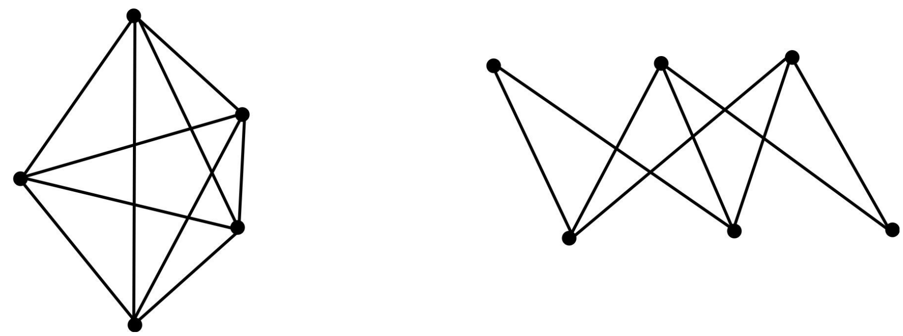

Figura 1.17: A la izquierda el grafo K_5 y a la derecha el grafo $K_{3,3}$.

1.6. El camino más corto

Dado un grafo conexo ponderado $G = (V, E)$ y dos vértices del mismo u y v, se trata de encontrar el camino más corto de peso mínimo. Se conoce como el problema del vendedor ya que lo que se trata es de optimizar el coste de desplazamiento entre dos puntos de la red de transporte que se puede modelar como un grafo. Es un problema bastante complicado ya que, por ejemplo, un grafo completo K_n tiene un total de $(n-1)!/2$ caminos Hamiltonianos (tomando un camino y su inverso como uno solo). Así, con $n = 15$ tenemos más de 40 millones de posibles caminos.

Aquí, estudiaremos varios algoritmos. El más simple, de vecino próximo, consiste en ir de un vertice al siguiente por la arista de peso mínimo. Otro más elaborado como el de Dijkstra se explica a continuación.

Algoritmo de Dijkstra. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo ponderado con vértices $V = \{v_0, v_1..., v_n\}$ y vamos a establecer el camino más corto uniendo v_0 y v_n.

1. Fijamos v_0 y definimos $U = \{v_0\}$ y $L_0(v_i)$ como el peso de la arista que une v_0 y v_i si esta existe, e ∞ en caso de que la arista no exista.

2. Sea $v_1^* \in V \setminus U$ tal que $L_0(v_i)$ es mínimo. Añadimos $v_1^* \in U$.

3. Para cada $v \in V \setminus U$ definimos $L_1(v_i)$ del mismo modo que $L_0(v_i)$ y $L_{01}(v_i) = \min\{L_0(v_i), L_0(v_1^*) + L_1(v_i)\}$.

4. Sea v_2^* un vértice en $V \setminus U$ tal que $L_{01}(v_i)$ es mínimo. Nótese que v_2^* proporciona un camino de peso mínimo de longitud menor o igual que dos. Se añade v_2^* a U y se construye la función L_{02} de la menor distancia uniendo a y otro vértice $v_i \notin \{v_1^*, v_2^*\}$.

5. Se repite este proceso hasta que $v_n \in U$.

En la figura 1.18 se puede ver un grafo para ilustrar de forma práctica este algoritmo. En dicho grafo supongamos que queremos encontrar el camino de peso mínimo entre los vértices a y f. En la iteración 1 construimos la tabla de la función $L_0(v)$ como sigue

$L_0(a)$	$L_0(b)$	$L_0(c)$	$L_0(d)$	$L_0(e)$	$L_0(f)$
0	3	6	∞	∞	∞

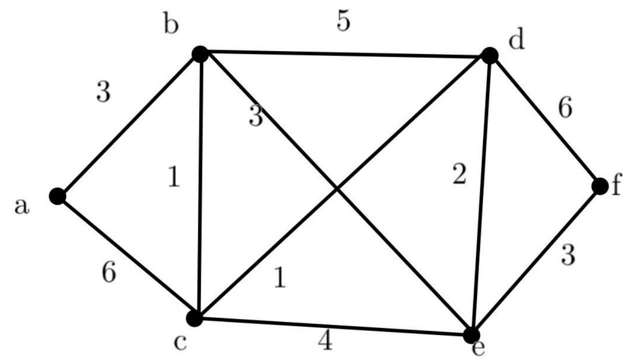

Figura 1.18: Grafo ponderado.

de la cual elegimos el vertice b. Ahora desde el vértice b construimos la tabla con la función $L_{01}(v)$

$L_{01}(c)$	$L_{01}(d)$	$L_{01}(e)$	$L_{01}(f)$
4	8	6	∞

por lo que elegimos como vértice siguiente c con un peso hasta ahora igual a 4. Calculamos ahora la tabla

$L_{02}(d)$	$L_{02}(e)$	$L_{02}(f)$
5	6	∞

y elegimos el siguiente vértice d. Ahora la tabla es

$L_{03}(e)$	$L_{03}(f)$
6	11

por lo que eliminamos los vértices c y d y vamos de b a e, al ser este camino de menor peso. Así, el camino es a,b,e,f con un peso total de 9.

1.7. Coloración de grafos. Número cromático

Dado un grafo $G = (V, E)$, una coloración de vértices o simplemente una coloración de G es una asignación de colores a los vértices de G de forma que vértices adyacentes no tengan el mismo color. Más formalmente, dado un conjunto de colores con k colores distintos $C = \{1, 2, ..., k\}$, se dice que G es coloreable por k colores si existe una aplicación $f : V \to C$ de forma que si dos vértices u y v son adyacentes, entonces $f(u) \neq f(v)$. El mínimo número de colores necesarios para colorear G se llama número cromático de G, y se denota $\kappa(G)$. Los grafos con número cromático igual a dos son los bipartitos y se caracterizan con el siguiente resultado.

Theorem 1.7.1 *Sea $G = (V, E)$ un grafo. Entonces $\kappa(G) = 2$ si y solo si G no tiene ciclos de longitud impar.*

Demostración. Suponemos que el grafo es conexo, ya que en otro caso lo probaríamos en cada una de sus componentes conexas. Si $\kappa(G) = 2$, todo ciclo de G debe alternar dos colores, y como debemos empezar y acabar en el mismo vértice, su longitud debe ser par. Veamos la implicación contraria. Para ello, definimos una coloración de G de la forma siguiente. Dado $v \in V$, lo coloreamos con el color 1. Para todo $u \in V$, coloreamos u con el color 1 si existe un camino uniendo u y v de longitud par, y con el color 2 si es de longitud impar. Esta coloración está bien definida ya que si hay dos caminos uniendo u y v, entonces ambos forman un ciclo que debe ser de longitud par, por lo que la longitud de ambos caminos deben tener la misma paridad. Esta coloración induce una división en los vértices de manera que solo son adyacentes vértices de distinta coloración.□

Los grafos completos K_n tienen ciclos de longitud impar, por lo tanto no son bipartitos. Sí lo son los árboles. En general, el grado de los vértices tiene influencia en el problema de coloración de grafos, como muestra el siguiente resultado.

Theorem 1.7.2 *Sea $G = (V, E)$ un grafo simple de forma que $m = \text{máx}\{\deg(v) : v \in V\}$. Entonces $\kappa(G) \leq m + 1$.*

Demostración. Hacemos la demostración por inducción en $k = |V|$. Si $k = 1$, el resultado es trivialmente cierto. Supongamos el resultado cierto para grafos con menos de k vértices y los probamos para grafos con k vértices. Dado un vértice $v \in V$, tomamos el grafo $G' = G \setminus v$. Como G' tiene $k - 1$ vértices, por la hipótesis inductiva tenemos que $\kappa(G') \leq m + 1$. Como $\deg(v) \leq m$, siempre vamos a poder colorear v con un color distinto de los a lo sumo m vértices adyacentes. Por lo tanto, $\kappa(G) \leq m + 1$.□

El siguiente resultado que establecemos sin demostración es un refinamiento del resultado anterior.

Theorem 1.7.3 (Brooks) *Sea $G = (V, E)$ un grafo simple de forma que $m = \text{máx}\{\deg(v) : v \in V\}$. Si G no es un grafo completo ni un ciclo con un número impar de vértices, entonces $\kappa(G) \leq m$.*

Para grafos planos tenemos el siguiente resultado, conocido como el teorema de los cuatro colores porque resuelve un problema clásico de geometría consistente en encontrar el número mínimo de colores para colorear los paises de un mapa.

Theorem 1.7.4 (Cuatro colores) *Sea $G = (V, E)$ un grafo plano. Entonces $\kappa(G) \leq 4$.*

Emparejamiento de grafo bipartitos?

1.8. Ejercicios

1. Dado el grafo $G = (V, E)$ de la figura 1.19, determinar:

    a) Todos los caminos simples de a a f.

    b) Todos los recorridos de a a f.

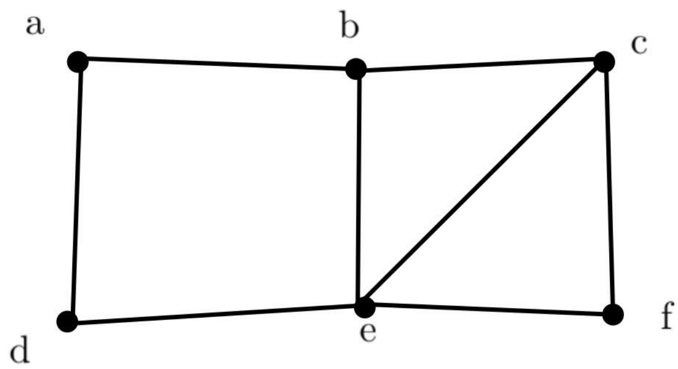

Figura 1.19: Grafo.

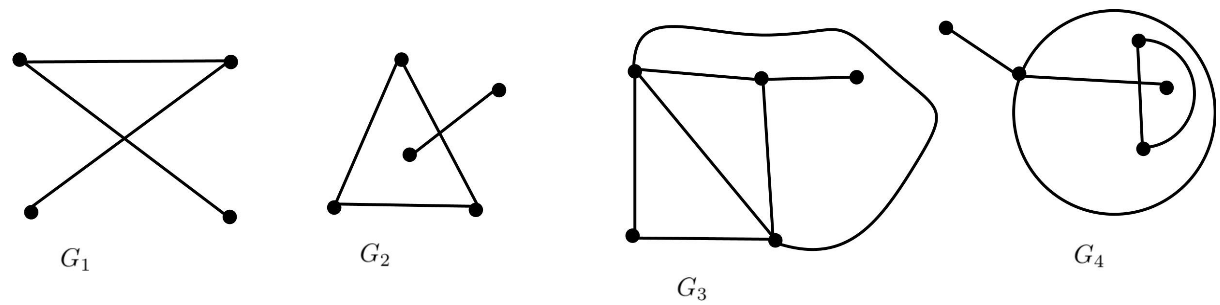

Figura 1.20: Grafos diversos.

c) La distancia de a a f.

d) Todos los ciclos que incluyen al vértice a.

e) El diámetro del grafo.

f) Todos los ciclos en G.

2. Considerar los multigrafos en la figura 1.20.

   a) ¿Cuáles son conexos? Si un grafo no es conexo, encuentre sus componentes conexos.

   b) ¿Cuáles no tienen ciclos?

   c) ¿Cuáles no tienen lazos?

   d) ¿Cuáles son grafos simples?

3. Sea G el grafo en la figura 1.21. Encontrar:

   a) Todos los caminos simples de a a c.

   b) Todos los ciclos.

   c) El subgrafo G' generado por $V' = \{b, c, d, e\}$.

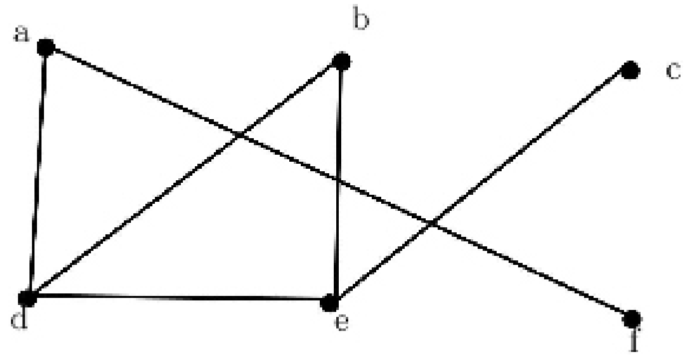

Figura 1.21: Grafo.

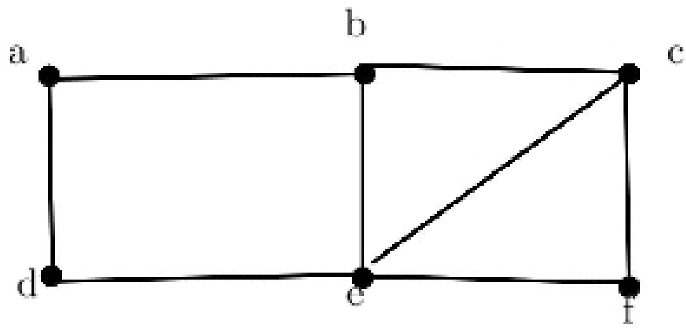

Figura 1.22: Grafo.

d) El grafo $G - e$.

e) Todos los puntos de corte.

f) Todos los puentes.

4. Dado el grafo de la figura 1.22, deteminar todos los subgrafos que resultan de eliminar un vértices. Demostrar que ninguno de los grafos obtenidos es isomorfo. ¿Tiene el grafo puntos de corte?

5. Determinar cuáles de los grafos de la figura 1.23 son Eulerianos.

6. Determinar cuáles de los grafos de la figura 1.23 son Hamiltonianos.

7. Trazar todos los árboles que hay con exactamente seis vértices.

8. Encontrar todos los árboles generadores del grafo de la figura 1.24.

9. Encontrar el árbol generador de peso mínimo para el grafo de la figura 1.25.

10. Sea $G = (V, E)$ un grafo con más de un vértice. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

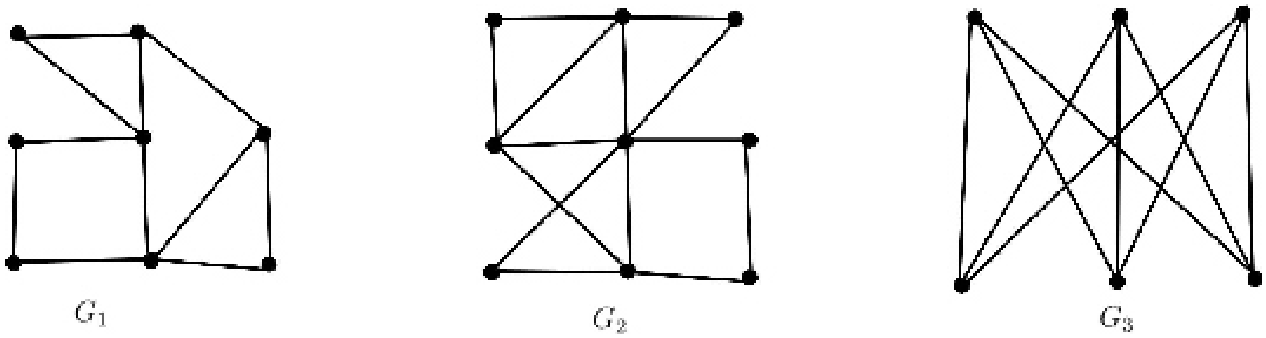

Figura 1.23: Grafos diversos.

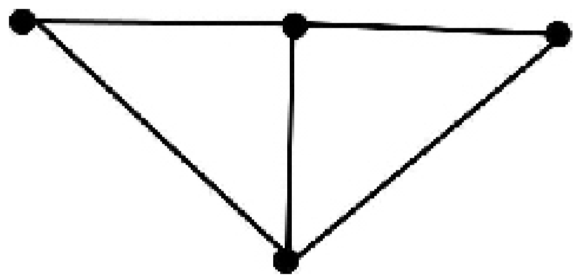

Figura 1.24: Grafo.

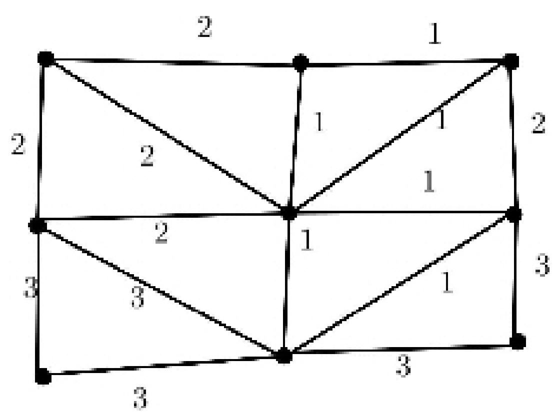

Figura 1.25: Grafo ponderado.

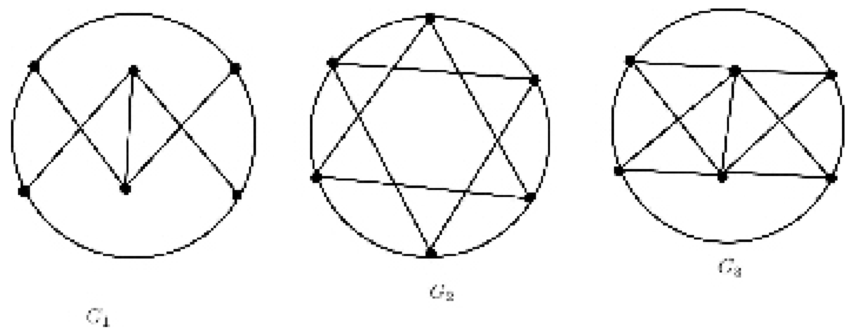

Figura 1.26: Grafos diversos.

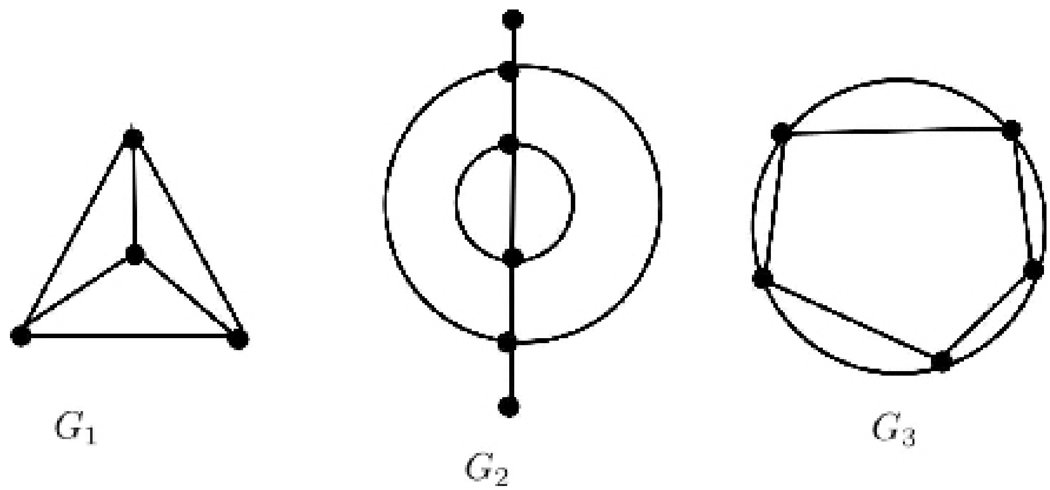

Figura 1.27: Grafos diversos.

   a) G es un árbol.
   b) Cada par de vértices está unido por exactamente un camino simple.
   c) G es conexo, pero $G \setminus \mathbf{e}$ es inconexo para cualquier arista $\mathbf{e} \in E$.
   d) G es no tiene ciclos, pero si a G se agrega cualquier arista, entonces el grafo resultante tiene exactamente un ciclo.

11. Dibujar una representación plana, en caso de ser posible, de los grafos de la figura 1.26.

12. Contar el número de vértices, aristas y regiones de cada mapa en la figura 1.27 y comprobar la fórmula de Euler. También, encontrar el grado de cada una de las regiones.

13. Encontrar el número mínimo n de colores necesarios para pintar cada mapa en la figura

14. Demostrar que un grafo plano G es 5-coloreable, o se puede colorear con 5 colores.

15. Encontrar la matriz de adyacencia de los grafos de la figura 1.27.

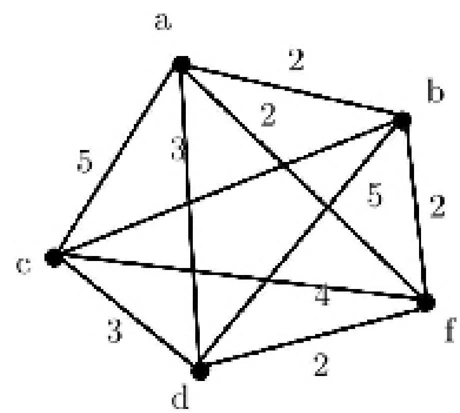

Figura 1.28: Grafo ponderado.

16. Dibujar el grafo que tienen las sigueintes matrices de adyacencia

$$(a)\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (b)\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (c)\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

17. Encontrar los árboles generadores de peso mínimo del grafo de la figura 1.28.

18. Encontrar el camino de peso mínimo entre los vértices a y f del grafo de la figura 1.28.

19. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Definimos una relación R dada por, dados $u, v \in V$

$$u \sim v$$

si y solo si existe un camino desde u hasta v. Demostrar que R es una relación de equivalencia y explicar qué representa cada clase de equivalencia en esta relación.

20. Dado el grafo bipartito $K_{n,m}$ responder a las siguientes cuestiones:

   a) Si $K_{n,m}$ contiene 16 aristas y $m \leq n$, determinar m y n tales que $K_{n,m}$ posea un camino cerrado euleriano pero no un ciclo hamiltoniano.

   b) Si $K_{n,m}$ contiene 16 aristas y $m \leq n$, determinar m y n tales que $K_{n,m}$ posea un camino cerrado euleriano y un ciclo hamiltoniano.

   c) ¿Existe un ciclo hamiltoniano en $K_{4,4}$? ¿Y en $K_{4,5}$? ¿Y en $K_{4,6}$?

   d) Establecer una condición necesaria y suficiente para que $K_{n,m}$ sea hamiltoniano.

21. Un grafo G no contiene ciclos y además tiene 526 vértices y 520 aristas. Si cada componente conexa de G es un árbol, ¿cuántas componentes conexas forman G?

22. Si un árbol G solo tiene vértices de grado 4 o de grado 1, probar que entonces el número de vértices de grado 1 que hay coincide con el doble del de vértices de grado 4 más 2.

23. Construye un grafo plano con 10 aristas y 7 regiones distintas. Si no se puede, explica porque.

Bibliografía

[1] S. Lipschutz y M. L. Lipson, Matemáticas discretas, McGraw-Hill.

[2] M .Díaz Toca, F. Guil Asensio y L. Marín, Matemáticas para la computación, Ed. Diego Marín.