

Teoría de conjuntos

Jose Salvador Cánovas Peña.
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística.

Índice general

1. Teoría de conjuntos	2
1.1. Nociones básicas de conjuntos	2
1.1.1. Conjunto y elementos	2
1.2. Operaciones con conjuntos	2
1.2.1. Unión, intersección y complementario	3
1.2.2. Diagramas de Venn	4
1.2.3. Álgebra de operaciones de conjuntos	4
1.3. Principio de inducción	5
1.4. Conjuntos finitos	6
1.5. Relaciones binarias	7
1.5.1. Producto cartesiano	7
1.5.2. Relaciones	7
1.5.3. Tipos de relaciones	8
1.5.4. Relación de equivalencia	9
1.5.5. Relación de orden	10
1.6. Ejercicios	11

Capítulo 1

Teoría de conjuntos

1.1. Nociones básicas de conjuntos

1.1.1. Conjunto y elementos

Podemos definir un conjunto como una colección de objetos, que se llaman elementos. En general, denotaremos los conjuntos por letras mayúsculas y sus elementos con minúsculas. Ejemplos de conjuntos son $A = \{1, 2, 3\}$ o $\mathbb{N} =$ números naturales. Los conjuntos se pueden escribir utilizando llaves y poniendo sus elementos, como en el caso de A , o mediante una propiedad que describe el conjunto, como en el caso de \mathbb{N} . La relación de pertenencia de un elemento a un conjunto se denotará por \in , y su negación \notin . En los ejemplos anteriores tenemos que $1 \in A$, $1 \in \mathbb{N}$, pero $4 \notin A$. La relación de pertenencia es útil a la hora de describir conjuntos, como por ejemplo

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n < 4\}.$$

Aquí los $:$ se leen tal que. Así, A es el conjunto de los números naturales tales que son menores que cuatro.

Dados dos conjuntos A y B , se dice que A está contenido en B si todo elemento de A también pertenece a B . Se escribirá $A \subseteq B$ y se dirá que A es un subconjunto de B . Los conjuntos A y B son iguales si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, y se denotará $A = B$. La negación de $A \subseteq B$, se escribirá $A \not\subseteq B$, la negación de $A = B$ será $A \neq B$, mientras que $A \subsetneq B$ denotará que $A \subseteq B$ pero $A \neq B$. A modo de ejemplo, consideremos los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4\}$. Se verifica que $A \not\subseteq B$, $B \subseteq A$, $B \neq A$, luego $B \subsetneq A$.

Los siguientes símbolos se reservan para los siguientes conjuntos, \mathbb{N} es el conjunto de los números naturales, \mathbb{Z} es el conjunto de los números enteros, \mathbb{Q} es el conjunto de los números racionales, \mathbb{R} es el conjunto de los números reales y \mathbb{C} es el conjunto de los números complejos.

1.2. Operaciones con conjuntos

Como vamos a ver, es posible hacer diferentes operaciones entre conjuntos. Es necesario entonces definir dos conjuntos especiales, llamados conjuntos universo y vacío. El conjunto vacío se denota por \emptyset y es el conjunto que no tiene elementos. El conjunto universo U es

áquel que contiene todos los posibles elementos que estemos considerando. Ambas definiciones son imprecisas, pero cobrarán sentido cuando se definan a continuación las operaciones entre conjuntos.

1.2.1. Unión, intersección y complementario

Supongamos dos conjuntos A y B que tienen sus elementos pertenecientes a un conjunto universo U . Se define la intersección de A y B como el conjunto cuyos elementos pertenecen a ambos conjuntos. Se denota por

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Dos conjuntos A y B se dicen disjuntos si $A \cap B = \emptyset$. Se tiene que

$$A \cap B \subseteq A \text{ y } A \cap B \subseteq B.$$

Se define la unión de ambos conjuntos como el conjunto cuyos elementos pertenecen a alguno de los conjuntos A o B . Se denota por

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Si A y B son disjuntos, se dice que su unión es disjunta. Se tiene que

$$A \subseteq A \cup B \text{ y } B \subseteq A \cup B.$$

Se define la diferencia de A menos B como el conjunto que cuyos elementos pertenecen a A , pero no a B . Se denotará por

$$A \setminus B := \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

El complementario de A será entonces la diferencia del conjunto universal U menos A . Se denotará

$$A^c := U \setminus A.$$

Como se ve, no es posible definir el complementario sin haber establecido previamente un conjunto universal que contiene todos los elementos posibles. Es fácil darse cuenta que

$$A \setminus B = A \cap B^c.$$

Esta operación no es conmutativa ya que $A \setminus B \neq B \setminus A$. Por ejemplo, los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 4, 5\}$ cumplen que $A \setminus B = \{2, 3\}$ mientras que $B \setminus A = \{4, 5\}$. Se define la diferencia simétrica como

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

que sí será una operación conmutativa. En el ejemplo anterior se tendría que $A \triangle B = \{2, 3, 4, 5\}$.

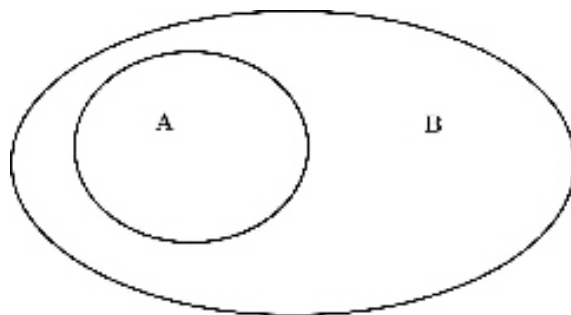


Figura 1.1: Inclusión $A \subseteq B$.

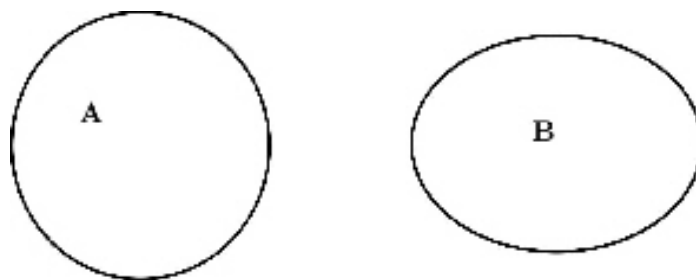


Figura 1.2: Ejemplo de conjuntos disjuntos.

1.2.2. Diagramas de Venn

Un diagrama de Venn es un gráfico donde los conjuntos se representan en el plano con una línea cerrada y que permiten visualizar las diferentes operaciones y propiedades de los conjuntos y las operaciones entre ellos. Por ejemplo, la figura 1.1 muestra la inclusión de $A \subseteq B$

El diagrama de Venn de dos conjuntos disjuntos se muestra en la figura 1.2

Las diferentes operaciones que hemos estudiado se representarían como se muestra en la figura 1.3.

En general, se trata una buena herramienta para visualizar las diferentes propiedades que relacionan diferentes conjuntos, aunque hemos de poner de manifiesto que en ningún caso, suponen una prueba formal de las mismas.

1.2.3. Álgebra de operaciones de conjuntos

Las principales propiedades de las operaciones de conjuntos son las siguientes. Supongamos que tenemos tres conjuntos A , B y C dentro de un conjunto universo U . Entonces se verifican las siguientes propiedades.

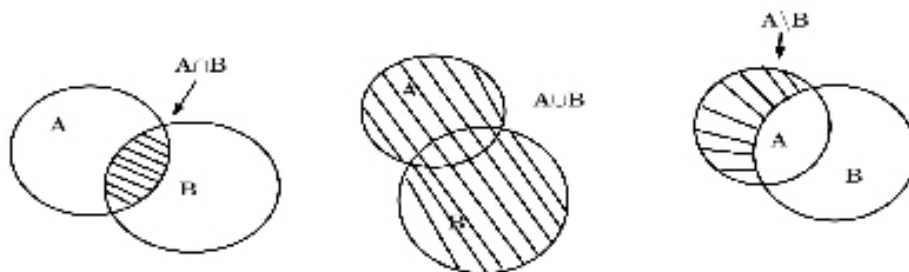


Figura 1.3: Intersección, unión y diferencia de conjuntos.

Leyes idempotentes.	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Leyes asociativas.	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Leyes conmutativas.	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Leyes distributivas.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Leyes de identidad.	$A \cup \emptyset = A$ y $A \cup U = U$	$A \cap \emptyset = \emptyset$ y $A \cap U = A$
Ley de involución.	$(A^c)^c = A$	
Leyes de complementos.	$A \cup A^c = U$ y $U^c = \emptyset$	$A \cap A^c = \emptyset$ y $\emptyset^c = U$
Leyes de DeMorgan.	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

No es difícil establecer un paralelismo entre las operaciones con conjuntos y las de la lógica cambiando proposiciones por conjuntos, el operador \vee por la unión \cup , y el operador \wedge por la intersección \cap .

Veamos por ejemplo como se prueba que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. Tomemos un elemento arbitrario $x \in (A \cup B)^c$. Entonces $x \in U \setminus (A \cup B)$, por lo que $x \notin A \cup B$, lo que implica que $x \notin A$ y $x \notin B$. Como $x \notin A$, se verifica que $x \in A^c$. Similarmente $x \in B^c$. Como x pertenece a ambos conjuntos $x \in A^c \cap B^c$. Probamos así que $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$. Probemos ahora la inclusión contraria $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$. Para ello tomamos $x \in A^c \cap B^c$, que cumplirá por tanto $x \in A^c$ y $x \in B^c$. Entonces $x \notin A$ y $x \notin B$, por lo que $x \notin A \cup B$, lo que implica que $x \in (A \cup B)^c$. Así, si $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$ y $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$, tenemos que $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$. De manera análoga se prueban el resto de propiedades.

1.3. Principio de inducción

El principio de inducción tiene que ver con el conjunto de los números naturales \mathbb{N} . Una forma de construir los números naturales a partir de la suma es la siguiente. Partimos de 1, si sumamos $1 + 1$ obtenemos el 2, sumando $2 + 1$ tenemos el 3, y en general, si n es un número natural $n + 1$ es el siguiente número natural.

Si ahora tenemos una propiedad $P(n)$ que depende del número natural n , el principio de inducción afirma que si $P(1)$ es cierta, y suponiendo que $P(n)$ es cierta hasta el valor n , se verifica que $P(n+1)$ es cierta, entonces $P(n)$ es cierta para todo número natural n .

Consideremos el siguiente ejemplo: probar que la suma de los n primeros números naturales es igual a n^2 . Aquí la propiedad

$$P(n) : 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Efectivamente, $P(1)$ es cierta ya que $1 = 1^2$. Si suponemos $P(n)$ es cierta, y probemos $P(n+1)$. Para ello consideramos

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1)$$

y veamos que es igual a $(n + 1)^2$. Operamos

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) &= 1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) \\ &= [1 + 3 + \dots + (2n - 1)] + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2, \end{aligned}$$

como queríamos probar. Nótese que hemos usado que $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$, es decir, la hipótesis de inducción.

1.4. Conjuntos finitos

Un conjunto A se dice finito si es vacío o tiene una cantidad finita de elementos, que será un número natural n . Se denota el número de elementos de A como $|A|$. Conjunto infinito es aquel que tiene una cantidad no finita de elementos, como por ejemplo el conjunto \mathbb{N} de los números naturales.

El principio de inclusión-exclusión nos permite establecer una relación entre el número de elementos de dos conjuntos finitos como sigue.

Theorem 1.4.1 (Principio de inclusión-exclusión) Sean A y B dos conjuntos finitos sobre un mismo universo. Entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Demostración. Distinguiremos diferentes casos. Claramente, si $A \cap B = \emptyset$, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Supongamos ahora que $A \cap B \neq \emptyset$. Entonces $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, por lo que

$$|A \cup (B \setminus A)| = |A| + |B \setminus A|.$$

Como $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$, tendremos que

$$|A \cup B| = |A| + |B \setminus A|. \tag{1.1}$$

Por otra parte, $B = (B \setminus A) \cup (B \cap A)$ y $(B \setminus A) \cap (B \cap A) = \emptyset$, por lo que

$$|B| = |B \setminus A| + |B \cap A|,$$

de donde

$$|B \setminus A| = |B| - |B \cap A|.$$

Sustituyendo en (1.1) obtenemos

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |B \cap A|,$$

con lo que terminamos la prueba. \square

1.5. Relaciones binarias

1.5.1. Producto cartesiano

Dados dos conjuntos A y B , se define su producto cartesiano $A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Por ejemplo, si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{3, 4\}$ se cumple que

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}.$$

El conjunto es de pares ordenados, es decir, (a, b) es distinto de (b, a) . Si $A = B$, el $A \times A$ se escribe A^2 . Así, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Si A y B son finitos, se verifica que

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Si $n \in \mathbb{N}$ se define inductivamente $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}$. El conjunto $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ también se denota $\prod_{i=1}^n A_i$.

1.5.2. Relaciones

Dados dos conjuntos A y B , se define la relación R entre ambos como un subconjunto de producto cartesiano $A \times B$. Si $(a, b) \in R$, se dice que a está relacionado con b , y lo contrario si $(a, b) \notin R$. Se denotará $a \sim b$ y $a \approx b$, respectivamente. Si $A = B$, se dice que R es una relación sobre A . Dada una relación R , se define su relación inversa como $R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$. Por ejemplo, dado $A = \{1, 2, 3\}$ se define la relación

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}.$$

Su relación inversa será

$$R^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (1, 3)\}.$$

Un ejemplo conocido de relaciones son las funciones o aplicaciones. Dados dos conjuntos A y B , una aplicación o función de A sobre B es una relación R tal que para cada $a \in A$ el conjunto $\{(a, b) : b \in B\}$ tiene un único elemento. De otra forma, si $(a, b_1), (a, b_2) \in R$, entonces $b_1 = b_2$. Usualmente se denota como $f : A \rightarrow B$ de forma que los elementos de la relación son

de la forma $(a, f(a))$ con $a \in A$ y $f(a) \in B$. El conjunto A se denomina dominio de f , mientras que B es el rango. La imagen de f es

$$\text{Im } f = f(A) := \{f(a) : a \in A\} \subseteq B.$$

Dado $B' \subseteq B$ se llama imagen inversa de B' al conjunto

$$f^{-1}(B') := \{a \in A : f(a) \in B'\} \subseteq A.$$

Una función se dice sobreyectiva o suprayectiva si $f(A) = B$ e inyectiva si $f(a_1) = f(a_2)$ implica que $a_1 = a_2$. Una aplicación inyectiva y sobreyectiva se dice biyectiva. Si A y B son finitos, existe una aplicación biyectiva entre ambos si tienen el mismo número de elementos.

1.5.3. Tipos de relaciones

Las relaciones se pueden clasificar atendiendo a diferentes propiedades. Dada una relación R sobre un conjunto A y $a, b, c \in A$, se dice que:

- R es reflexiva si $a \sim a$.
- R es transitiva si $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces $a \sim c$.
- R es simétrica si $a \sim b$, entonces $b \sim a$.
- R es antisimétrica si se cumple que si $a \sim b$ y $b \sim a$, entonces $a = b$. Equivalentemente, si $a \neq b$ y $a \sim b$, entonces $b \not\sim a$.

Por ejemplo, la relación sobre $A = \{1, 2, 3\}$

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

es reflexiva, simétrica y transitiva, mientras que

$$R' = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$$

es reflexiva, antisimétrica y transitiva, y

$$R'' = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$$

no cumple ninguna de las anteriores propiedades.

Las relaciones se pueden representar gráficamente. Para ello dibujamos en el plano los elementos de A y llevamos una línea con un flecha de vector de a a b si $a \sim b$. Por ejemplo, la relación R'' se puede representar de la forma que muestra la figura 1.4

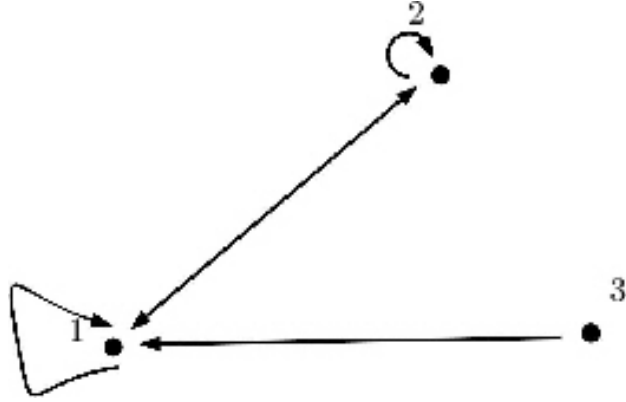


Figura 1.4: Grafo de la relación R'' .

1.5.4. Relación de equivalencia

Las relaciones de equivalencia se utilizan para clasificar elementos de un conjunto con las mismas propiedades. Una relación R sobre A es de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva. Dado $a \in A$, se define la clase de equivalencia de a como el conjunto

$$[a] := \{b \in A : a \sim b\}.$$

Es obvio que $[a] \neq \emptyset$ porque $a \sim a$. Además, se verifica la siguiente propiedad.

Proposition 1.5.1 *Dada una relación de equivalencia R sobre A y $a, b \in A$. Entonces o $[a] \cap [b] = \emptyset$ o $[b] = [a]$.*

Demostración. Dado $b \in A$, se cumple que o $b \in [a]$ o $b \notin [a]$. Si $b \in [a]$, veamos que $[b] = [a]$. Como $b \in [a]$ se verifica que $a \sim b$, y por ser simétrica $b \sim a$, de donde $a \in [b]$. Sea ahora $c \in [a]$, es decir $c \sim a$. Como $a \sim b$, se cumple que $c \sim b$ por ser transitiva. Entonces $c \in [b]$ y $[a] \subseteq [b]$. Similarmente se prueba que $[b] \subseteq [a]$, de donde $[a] = [b]$.

Veamos que si $b \notin [a]$, entonces $[a] \cap [b] = \emptyset$. Supongamos que $c \in [a] \cap [b]$, es decir $a \sim c$ y $c \sim b$, de donde por transitividad $a \sim b$, de donde $b \in [a]$, que es una contradicción. Así, $[a] \cap [b] = \emptyset$. \square

Si tenemos una relación de equivalencia sobre A , esta induce una partición sobre este conjunto formado por aquellos elementos que tienen un comportamiento similar de acuerdo con la relación de equivalencia. El conjunto $A/\sim := \{[a] : a \in A\}$ es el conjunto de las clases de equivalencia. Por ejemplo, la relación

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

es de equivalencia sobre $A = \{1, 2, 3\}$. Hay dos clases de equivalencia, $[1] = \{1, 2\}$ y $[3] = \{3\}$. Respecto a R es como si A solo tuviera dos elementos al ser 1 y 2 equivalentes. Es decir, $A/\sim = \{[1], [3]\}$.

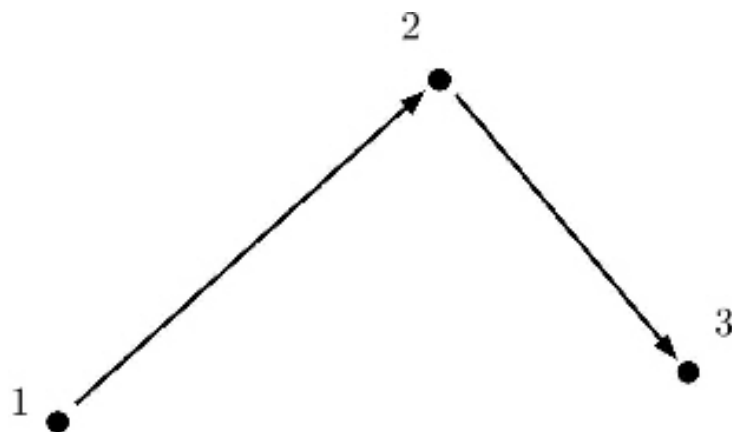


Figura 1.5: Diagrama de Hasse de la relación de orden R' .

1.5.5. Relación de orden

Una relación es de orden si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. En las relaciones de orden, si $a \sim b$, escribiremos $a \leq b$. La relación de orden es total si dados $a, b \in A$, $a \neq b$, se verifica que o bien $a \leq b$ o bien $b \leq a$. La relación es parcial en otro caso. Por ejemplo, la relación

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$$

sobre $A = \{1, 2, 3\}$ es de orden parcial, ya que $2 \not\leq 3$ y $3 \not\leq 2$. Sin embargo

$$R' = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$$

es una relación de orden total. El conjunto de los naturales con el orden usual es una relación de orden total.

Las relaciones de orden pueden representarse gráficamente mediante diagramas de Hasse. En ellos se eliminan todos los elementos reflexivos y los de transitividad, es decir, los que pueden obtenerse a partir de otros dos mediante la propiedad transitiva. Por ejemplo, la relación R' se puede representar gráficamente eliminando la línea $(1, 3)$ como se muestra en la figura 1.5.

Dada una relación de orden R sobre A y $A' \subseteq A$, un elemento $a \in A$ se dirá:

- Cota superior de A' si $a' \leq a \forall a' \in A'$. Cota inferior de A' si $a \leq a' \forall a' \in A'$.
- Supremo de A' si es cota superior de A' y cumple que si $b \in A$ es también cota superior, entonces $a \leq b$. Respectivamente, es ínfimo de A' si es cota inferior y si $b \in A$ es cota inferior de A' , entonces $b \leq a$.
- Máximo de A' si es supremo de A' y $a \in A'$. Respectivamente, es mínimo de A' si es ínfimo de A' y $a \in A'$.
- Maximal de A' si no existe $a' \in A'$ tal que $a \leq a'$ y $a \in A'$. Respectivamente, es minimal si no existe $a' \in A'$ tal que $a' \leq a$ y $a \in A'$.

Por ejemplo, consideremos el conjunto

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

Sea R la relación sobre A de forma que $a \leq b$ si a divide a b , esto es, existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $b = a \cdot c$. Es fácil ver que R es una relación de orden parcial ya que por ejemplo, ni $5 \leq 12$ ni $12 \leq 5$. Dado $A' = \{1, 2, 3, 6\}$ se tiene que 6 y 12 son cotas superiores de A' , 6 es supremo, máximo y maximal. Respectivamente, 1 es cota inferior, ínfimo, mínimo y minimal de A' . Si ahora tomamos $B = \{1, 2, 3, 9\}$, se tiene que 1 es cota inferior, ínfimo, mínimo y elemento minimal. Sin embargo, no hay cota superior ni supremo ni máximo ya que ningún elemento de A es dividido por 6 y 9.

1.6. Ejercicios

1. Enumerar los elementos de los siguientes conjuntos:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x < 9\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{N} : x < 22 \text{ y par}\}$.

c) $C = \{x \in \mathbb{N} : 4x < 9\}$.

d) $D = \{x \in \mathbb{N} : 4x = 9\}$.

2. Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ el conjunto universo y $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, $C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $E = \{2, 4, 6, 8\}$ y $F = \{1, 5, 9\}$.

a) Encontrar $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$, $A \cap C$, $D \cup F$ y $D \cap F$.

b) Obtener A^c , B^c , D^c , E^c , $A \setminus B$, $B \setminus A$, $D \setminus E$.

c) Calcular $(A \cap B)^c \cup E$, $(A \cup F) \setminus B$, $(F \cap E^c) \cup (A \cup D^c)$.

3. Demostrar que puede cumplirse que $A \cap B = A \cap C$ sin que $B = C$, y que $A \cup B = A \cup C$ sin que $B = C$.

4. Demostrar las siguientes igualdades entre conjuntos:

a) $B \setminus A = B \cap A^c$.

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

c) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

5. Ilustrar las leyes de De Morgan mediante diagramas de Venn.

6. En una encuesta aplicada a 120 personas se encontró que 65 leen el As, 20 leen tanto el As como el Marca, 45 leen el Marca, 25 leen tanto el As como el Sport, 42 leen el Sport, 15 leen tanto el Marca como el Sport, y 8 leen las tres publicaciones. Se pide:

- a) Encontrar el número de personas que leen por lo menos una de las tres publicaciones.
- b) Encontrar el número de personas que leen exactamente una publicación.
7. Dado un conjunto A , se define 2^A o $P(A)$ como el conjunto que contiene cada uno de los subconjuntos de A . Calcular 2^A para $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
8. Sean $A_n = \{n, 2n, 3n, 4n, \dots\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Calcular $A_3 \cap A_5$, $A_4 \cap A_5$, y $\cup_{n \in P} A_n$ donde P es el conjunto de los números primos.
9. Demostrar las siguientes fórmulas mediante inducción matemática:
- a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- b) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
- c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- d) $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5 para todo $n \in \mathbb{N}$.
10. Los conjuntos difusos o fuzzy fueron introducidos por L. Zadeh a mediados del siglo pasado y en la actualidad tiene múltiples aplicaciones a la ingeniería y la mal llamada inteligencia artificial. Se usa en circunstancias en las que hay una gradación entre la pertenencia o no de un elemento al conjunto. En concreto, dado un conjunto X , un conjunto difuso A es una aplicación $A : X \rightarrow [0, 1]$ de forma que $A(x)$ es un número entre 0 y 1 que indica el grado de pertenencia de x a A . Dados dos A y B dos conjuntos difusos, se definen la intersección, unión y complementario de conjuntos difusos como
- $$\begin{aligned}(A \cap B)(x) &= \min\{A(x), B(x)\}, \\(A \cup B)(x) &= \max\{A(x), B(x)\}, \\(A^c)(x) &= 1 - A(x),\end{aligned}$$
- para todo $x \in X$. Probar que las leyes de DeMorgan $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ y $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ se cumplen, pero que las leyes de los complementos $A \cup A^c = U$ y $A \cap A^c = \emptyset$ no. Aquí, el conjunto universal cumple que $U(x) = 1$ y el vacío $\emptyset(x) = 0$.
11. Dados $A = \{1, 2\}$, $B = \{x, y, z\}$ y $C = \{3, 4\}$, encontrar: $A \times B \times C$.
12. Proporcionar un ejemplo de una relación R sobre $A = \{1, 2, 3\}$ tal que:
- a) R sea tanto simétrica como antisimétrica.
- b) R no sea simétrica ni antisimétrica.
- c) R sea transitiva pero $R \cup R^{-1}$ no.
13. Dado el conjunto \mathbb{Z} de enteros y un entero $m > 1$. Se dice que x es congruente con y módulo m , que se denota $x \equiv y \pmod{m}$ si $x - y$ es divisible entre m . Demostrar que esto define una relación de equivalencia sobre \mathbb{Z} .

14. Sea A un conjunto de enteros diferentes de cero y sea \approx la relación sobre A definida por $(a, b) \approx (c, d)$ siempre que $ad = bc$ para todo $a, b, c, d \in A$. Demostrar que \approx es una relación de equivalencia.
15. Sea \mathcal{L} cualquier colección de conjuntos. Probar que la relación de inclusión de conjuntos \subseteq es de orden parcial sobre \mathcal{L} .
16. Consideramos el conjunto \mathbb{Z} de enteros. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, se define la relación aRb si $b = a^r$ para algún entero positivo r . Demostrar que R es un orden parcial sobre \mathbb{Z} .

Bibliografía

- [1] S. Lipschutz y M. L. Lipson, Matemáticas discretas, McGraw-Hill.
- [2] M .Díaz Toca, F. Guil Asensio y L. Marín, Matemáticas para la computación, Ed. Diego Marín.