Técnicas de conteo y recurrencias

Jose Salvador Cánovas Peña.
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística.

Índice general

Capítulo 1

Técnicas de conteo y recurrencias

En este tema vamos a trabajar cómo obtener todos los posibles resultados de un evento, o el número de elementos de un conjunto sin necesidad de enumerarlos todos. Para ello, vamos a ver nociones de combinatoria y dos principios que pasamos a decribir y que son conocidos de la teoría de conjuntos.

El **principio de la suma** establece que si tenemos un evento que puede desarrollarse de dos maneras distintas con n y m resultados, respectivamente, entonces el número total de resultados posibles es $n + m$. Este principio es consecuencia directa de que, dados dos conjuntos distintos finitos A y B (las dos maneras distintas en las que puede desarrollarse el evento) verifica que $|A \cup B| = |A| + |B|$. Por ejemplo, si podemos hacer un viaje en avión, en 4 compañías aéreas diferentes, o en tren, con dos compañías a elegir, el número total de opciones que tenemos para hacer el viaje es 6.

El **principio del producto** establece que si tenemos un evento que es la combinación de dos, independientes entre sí, con n y m resultados, entonces el resultado del evento es $n \cdot m$. Este principio es consecuencia de que si tenemos dos conjutos finitos A y B, entonces $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. Por ejemplo, si tenemos que vestirnos y tenemos 6 camisetas y 4 pantalones, podemos elegir en total 24 vestimentas.

Tanto el principio de la suma como el del producto pueden generalizarse inductivamente de forma natural a procesos con k eventos, cada uno con n_i casos posibles. En el caso del princpio de la suma tendríamos $n_1 + n_2 + ... + n_k$ casos posibles, y en el del producto $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$.

1.1. Combinatoria

A continuación vamos a describir diferentes eventos en los que va a ser posible calcular el número de posibles resultados. Para ello necesitaremos las funciones combinatorias definidas sobre números naturales. La primera de ellas es el factorial $n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$, por ejemplo $4! = 24$. Por convención $0! = 1$.

Si $n > m$, el número combinatorio

$$\left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right) := \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

Dados naturales n, $m_1, ..., m_k$, el número multinomial

$$\binom{n}{m_1, ..., m_k} := \frac{n!}{m_1! \cdot ... \cdot m_k!}.$$

Obsérvese que

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} = \binom{n}{m, n-m}.$$

La siguiente proposición puede ser de utilidad.

Proposition 1 *Dados naturales $n > m$ se verifica que*

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}.$$

Demostración. Calculamos

$$\begin{aligned}
\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} &= \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)! \cdot (n-m+1)!} \\
&= \frac{n! \cdot (n-m+1) + n! \cdot m}{m! \cdot (n-m+1)!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{m! \cdot (n-m+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{m! \cdot (n-m+1)!} = \binom{n+1}{m}.
\end{aligned}$$

□

1.1.1. Permutaciones

Una permutación es una ordenación de un conjunto con n elementos distintos. Por ejemplo, cada uno de los resultados posibles de la final de los 100 metros en unos juegos olímpicos. La fórmula para obtener el número total de permutaciones se deduce a partir del princpio del producto. Tomamos los n posibles elementos y los ordenamos. Definimos los procesos P_i elegir el elemento de la posición i, $i \in \{1, ..., n\}$. Para P_1 podemos elegir n elementos, para P_2 serán $n-1$, y así sucesivamente. Nótese que los sucesos son independientes. Así, el número total de permutaciones posibles será

$$P(n) = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Por ejemplo, los resultados posibles de la final de los 100 metros serán

$$P_8 = 8! = 40320.$$

En el caso anterior los elementos del conjunto son distintos. Supongamos ahora que podemos establecer tipos equivalentes o repetidos en nuestro conjunto y que queremos saber cuántas posibles ordenaciones hay. Por ejemplo, cuántos números diferentes pueden formarse con las cifras de 55678999. Obviamente aquí no tenemos 8! posibles ordenaciones ya que si permutamos los dos primeros cincos se obtiene el mismo número. Hablamos entonces de permutaciones con repetición de 8 elementos donde 1 se repite 2 veces y otro 3. El general, hablaremos de permutaciones con repetición de n elementos con m_1, m_2,...,m_k repeticiones. Veamos cuántos casos hay. Sin contar las repeticiones hay $n!$ casos, y debemos contar los casos que dan ordenaciones iguales. Dada una ordenación, hay $m_1!$ ordenaciones que iguales si reordenamos el primer elemento repetido, $m_2!$ si reordenamos el segundo, y así sucesivamente. Así, por el principio de multiplicación una permutación aparece repetida $n_1! \cdot ... \cdot n_k!$ veces. Entonces el número total de permutaciones posibles será

$$P^r(n, m_1, ..., m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot ... \cdot m_k!},$$

donde el superíndice r indica la posibilidad de repetición. Así, podemos formar

$$P^r(8, 2, 3) = \frac{8!}{2! \cdot 3!} = 3360$$

números con las cifras del número 55678999.

1.1.2. Variaciones

Si dado un conjunto de n elementos queremos elegir y ordenar m de ellos, estamos hablando del concepto de variación. Por ejemplo, en la final de los 100 metros queremos calcular cuántos podiums distintos pueden darse. Siguiendo la idea de la dedución de la fórmula para obtener los casos posibles en las permutaciones, podemos deducir que el número total de variaciones de n elementos tomados de m en m son

$$V(n, m) = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Así, los posibles podiums en la final de los 100 metros serán

$$V(8, 3) = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

En el caso anterior no era posible la repetición de los resultados, ya que un mismo atleta no puede ser oro y plata. Pero hay casos en que la repetición sí es posible, como en el caso de los sorteos de lotería, donde tenemos 10 cifras y ordenamos 5 de ellas en las que es posible la repetición de cifras. Hablamos entonces de variaciones con repetición. Siguiendo la demostración de la fórmula para la permutaciones, y teniendo en cuenta que ahora hay n posibilidades en cada elección, se tiene que la fórmula de variaciones con repetición de n elementos tomados de m en m es

$$V^r(n, m) = n^m,$$

donde r indica repetición. Así, los posibles resultados en el sorteo de la lotería son

$$V^r(10, 5) = 10^5 = 100000.$$

1.1.3. Combinaciones

Si dado un conjunto de n elementos queremos elegir m de ellos sin que importe el orden de elección, estamos hablando del concepto de combinación. Por ejemplo, cuántos cócteles distintos pueden hacerse a partir de 5 bebidas diferentes mezcando tres de ellas. Como sabemos de las variaciones, el número total de éstas es $= n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-m+1)$. Ahora bien, en la combinación el orden no importa. Así, para cada posible elección de m elementos hay $m!$ posibles ordenaciones de estos, que darán lugar a una única combinación de esos elementos. Por tanto, el número total de combinaciones es

$$C(n,m) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right).$$

Así, el número total de cócteles posible es

$$C(5,3) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array} \right) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = 10.$$

En el ejemplo anterior de los cócteles, hemos supuesto implícitamente que las bebidas no pueden repetirse. Supongamos que así fuera sin que nos importe la cantidad de cada una de ellas que se echa en el brebaje. Esteremos hablando de combinaciones con repetición de n elementos tomados de m en m. Obtener los casos totales aquí no es tan sencillo, así que tomemos el ejemplo de los cócteles como una primera aproximación. Etiquetamos las bebidas con letras A, B, C, D, E de forma que posibles combinaciones de cócteles son AAA, ABB, BCE, DEE. Vamos a codificar cada combinación con ceros y unos de manera que 0 va a ser una bebida y 1 va a ser el cambio de bebida en el cóctel en el orden alfabético. Como elegimos tres bebidas, necesitaremos tres ceros y cuatro unos, ya que elegida una bebida sólo podemos cambiar a una de las cuatro restantes. Así, AAA se codificaría como 0001111, ABB como 0100111, BCE como 1010110 y DEE como 1110100. Nótese que identificamos un cambio el no poner la bebida A en el cóctel. Así, e número de cócteles posibles será el número de posibles codificaciones de ceros y unos, por lo que debemos calcular este número. Para obtenerlo, podemos imaginar un código de unos en el cúal reemplazamos 3 de ellos por ceros, o un código de ceros en el que reemplazamos 4 de ellos por unos. En el primer caso sería $C(7,3)$ y en el segundo $C(7,4)$ y se cumple

$$C(7,3) = \left(\begin{array}{c} 7 \\ 3 \end{array} \right) = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \left(\begin{array}{c} 7 \\ 4 \end{array} \right) = C(7,4).$$

Si ahora tenemos combinaciones con repetición de n elementos tomados de m en m, codificamos los resultados posibles con sucesiones de ceros y unos que tengan m ceros y $n-1$ unos. Reproduciendo el razonamiento anterior, tendríamos la fórmula

$$C^r(n,m) = C(n+m-1,m) = C(n+m-1,n-1),$$

donde r indica repetición. Así, el número de posibles cócteles es

$$C^r(5,3) = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35.$$

1.2. Principio del palomar

El principio del palomar es la casi evidente afirmación: si tenemos n casas de palomas y $n+1$ palomas, entonces al menos en una casa hay 2 palomas. Una versión generalizada es la siguiente cuya demostración es obvia.

Theorem 2 (Principio de Dirichlet) *Dados $n, m, k \in \mathbb{N}$, si guardamos n objetos en m cajas, sabiendo que $n > m \cdot k$, entonces debe existir al menos una caja que contenga como mínimo $k+1$ objetos.*

Por ejemplo, son necesarios 25 personas para que al menos 3 de ellas cumplan años en el mismo mes, 22 para que al menos 4 de ellas nacieran el mismo día de la semana. Veremos diversas aplicaciones de este principio en los ejercicios del tema.

1.3. Principio de inclusión-exclusión

Recordemos que en teoría de conjuntos el principio de inclusión-exclusión establecía que dados dos conjuntos finitos A y B, el cardinal $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Vamos a ver la siguiente generalización del mismo. Dado el conjunto $C = \{1, 2, ..., n\}$ y $m \leq n$, sea $\mathcal{C}(n, m)$ el conjunto de todas los posibles subconjuntos de C formados por m elementos. Por ejemplo, si $C = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $\mathcal{C}(4, 2) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$. Como sabemos, el número de elementos de cada conjunto $\mathcal{C}(n, m)$ será

$$|\mathcal{C}(n, m)| = C(n, m) = \left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right).$$

Theorem 3 *Dados n conjuntos finito $A_1, ..., A_n$ dentro del mismo conjunto universo se verifica que*

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \cdot \left(\sum_{B \in \mathcal{C}(n,m)} | \cap_{i \in B} A_i| \right).$$

Demostración. Procedemos por inducción en n. Para $n = 2$ es el principio $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$. Vamos a probarlo para $n = 3$ como ejemplo. En este caso

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1 \cup (A_2 \cup A_3)| \\ &= |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |A_1 \cap (A_2 \cup A_3)|. \end{aligned}$$

Como $A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cup A_3)$, tenemos que

$$\begin{aligned} |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |A_1 \cap (A_2 \cup A_3)| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| - |(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cup A_3)| \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| \\ &\quad -(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cup A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|) \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cup A_3| \\ &\quad +|A_1 \cap A_2 \cap A_3|, \end{aligned}$$

que es la fórmula pedida.

Supongamos ahora que el resultado se cumple para n y lo probamos para $n+1$.

$$\begin{aligned}
\left|\cup_{i=1}^{n+1} A_i\right| &= |(\cup_{i=1}^{n} A_i) \cup A_{n+1}| = |\cup_{i=1}^{n} A_i| + |A_{n+1}| - |(\cup_{i=1}^{n} A_i) \cap A_{n+1}| \\
&= \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \cdot \left(\sum_{B \in \mathcal{C}(n,m)} | \cap_{i \in B} A_i| \right) + |A_{n+1}| - |(\cup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1}))| \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| + \sum_{m=2}^{n} (-1)^{m-1} \cdot \left(\sum_{B \in \mathcal{C}(n,m)} | \cap_{i \in B} A_i| \right) \\
&\quad - \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \cdot \left(\sum_{B \in \mathcal{C}(n,m)} | (\cap_{i \in B} A_i) \cap A_{n+1}| \right) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{C}(n+1,1)} |A_i| + \sum_{m=2}^{n} (-1)^{m-1} \cdot \left(\sum_{B \in \mathcal{C}(n+1,m)} | \cap_{i \in B} A_i| \right) + (-1)^{n+1} | \cap_{i=1}^{n+1} A_i| \\
&= \sum_{m=1}^{n+1} (-1)^{m-1} \cdot \left(\sum_{B \in \mathcal{C}(n+1,m)} | \cap_{i \in B} A_i| \right),
\end{aligned}$$

dado que $\mathcal{C}(n,m) \cup \mathcal{C}'(n,m-1) = \mathcal{C}(n+1,m)$, donde $\mathcal{C}'(n,m-1) = \{B \cup A_{n+1} : B \in \mathcal{C}(n,m-1)\}$.□

A modo de ejemplo, un grupo de 43 personas utilizan tres sistemas operativos, Windows, Mac y Linux. Se tiene que 25 de ellos usaron Windows, 19 Mac y 13 Linux. Además, 7 de ellos usaron Windows y Mac, 4 Mac y Linux, y 4 Windows y Linux. Si queremos saber cuántos de ellos usaron los tres sistemas operativos, usamos el principio de inclusión-exclusión con $n=3$. Definimos A_1 los usuarios de Windows, A_2 los de Mac y A_3 los de Linux. La respuesta a la pregunta es calcular $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$. Como

$$\begin{aligned}
43 &= |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
&= 25 + 19 + 13 - 7 - 4 - 4 + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|,
\end{aligned}$$

tenemos que

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1.$$

1.4. Recurrencias

Una ecuación en diferencias es una expresión de la forma

$$x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, ..., x_n, n), \tag{1.1}$$

donde $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$ es una función que supondremos al menos continua. Ejemplos de ecuaciones en diferencias son

$$x_{n+2} = x_{n+1} x_n + \frac{n}{n^2+1}, \tag{1.2}$$

$$x_{n+3} = x_{n+2} - x_n, \tag{1.3}$$

$$x_{n+1} = nx_n. \tag{1.4}$$

Se llama orden de la ecuación a k. Así la ecuación (1.2) tiene orden 2, (1.3) orden 3 y (1.4) orden uno. Distinguimos entre ecuación autónoma cuando el tiempo n no aparece explícitamente en la ecuación, y no autónoma cuando sí lo hace. Las ecuaciones (1.2) y (1.4) son no autónomas mientras que (1.3) sí lo es. Por último, distinguiremos entre ecuaciones lineales, cuando la función f es lineal o afín como las ecuaciones (1.3) y (1.4), y las no lineales como (1.2). Dentro de las lineales trataremos especialemente las que tienen coeficientes constantes, como la ecuación (1.3) de las que tienen coeficientes dependientes de n como (1.4).

Si se asume la continuidad de la función f, para construir una solución de una ecuación de orden k se precisan exactamente k condiciones iniciales $x_0, x_1, ..., x_{k-1} \in \mathbb{R}$. A las soluciones de las ecuaciones también las llamaremos órbitas. El orden puede verse entonces como en número mínimo de condiciones necesarias para poder construir una solución u órbita de la ecuación. La sucesión de Fibonacci

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...)$$

es la órbita o solución de la ecuación en diferencias de orden dos

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

con condición inicial $x_0 = x_1 = 1$.

Como veremos posteriormente, el estudio de las soluciones de ecuaciones en diferencia no lineales es complicado. Vamos a ver a continuación cómo calcular las soluciones de ecuaciones lineales con coeficientes constantes.

1.4.1. Ecuaciones lineales con coeficientes constantes

Podemos escribir la ecuación lineal con coeficientes constantes de la forma

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + ... + a_{k-1} x_{n+1} + a_k x_n = g(n),$$

donde $a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \neq 0$, y g es una función real. Si la función $g(n) = 0$, diremos que la ecuación es homogénea y no homogénea en caso contrario.

Llamamos solución general de la ecuación en diferencias a una expresión de la forma

$$x_n = F(n, c_1, ..., c_k)$$

donde $c_1, ..., c_k$ son constantes que dependen de las condiciones iniciales, de manera que para cada valor n la función $F(n, c_1, ..., c_k)$ nos da el término n-ésimo de la sucesión solución. Veamos a continuación cómo obtener la solución general de una ecuación lineal homogénea de la forma

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + ... + a_{k-1} x_{n+1} + a_k x_n = 0. \tag{1.5}$$

Dado $r \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tomamos la sucesión $x_n = r^n$ y veamos que tiene que pasar para que sea solución de la ecuación (1.5). Sustituyendo en la misma tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + ... + a_{k-1} x_{n+1} + a_k x_n \\ &= r^{n+k} + a_1 r^{n+k-1} + a_2 r^{n+k-2} + ... + a_{k-1} r^{n+1} + a_k r^n \\ &= r^n \left(r^k + a_1 r^{k-1} + a_2 r^{k-2} + ... + a_{k-1} r + a_k \right) = r^n p(r), \end{aligned}$$

donde

$$p(r) := r^k + a_1 r^{k-1} + a_2 r^{k-2} + ... + a_{k-1} r + a_k$$

se llama polinomio característico de la ecuación (1.5). De la ecuación

$$0 = r^n p(r)$$

se tiene que $x_n = r^n$ es solución si y sólo si

$$p(r) = 0,$$

es decir, si es un cero del polinomio característico de la ecuación (1.5).

Por ejemplo, tomemos la ecuación

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0,$$

cuyo polinomio característico es

$$p(r) = r^2 - r - 1.$$

Sus raíces se calculan como

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Así, dos soluciones de dicha ecuación son

$$x_n^1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

y

$$x_n^2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

No es posible obtener más soluciones, por lo que éstas deben de ser suficientes para obtener la solución general. Para ello, necesitamos el siguiente resultado.

Teorema 1 *El $\mathcal{S}$ conjunto de soluciones de la ecuación lineal*

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + ... + a_{k-1} x_{n+1} + a_k x_n = 0$$

es un espacio vectorial de dimensión k.

Demostración. El conjunto de las sucesiones reales x_n es un espacio vectorial con las operaciones suma y producto por escalares naturales. Dadas las soluciones x_n e y_n y los escalares α, β, la sucesión $\alpha x_n + \beta y_n$ verifica que

$$\begin{aligned} & \alpha x_{n+k} + \beta y_{n+k} + a_1(\alpha x_{n+k-1} + \beta y_{n+k-1}) + ... \\ & +(\alpha x_{n+1} + \beta y_{n+1}) a_{k-1} + a_k(\alpha x_n + \beta y_n) \\ = \ & \alpha(x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + ... + a_{k-1} x_{n+1} + a_k x_n) \\ & +\beta(y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + ... + a_{k-1} y_{n+1} + a_k y_n), \end{aligned}$$

que será igual a cero ya que

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + ... + a_{k-1} x_{n+1} + a_k x_n = 0$$

e

$$y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + ... + a_{k-1} y_{n+1} + a_k y_n = 0$$

por ser solución. Por lo tanto es solución de la ecuación, y $\mathcal{S}$ es un subespacio vectorial. Como cada solución viene definida por k condiciones iniciales, y $\mathbb{R}^k$ tiene dimensión k, el conjunto $\mathcal{S}$ también tiene dimensión k.$\square$

Por lo tanto, para la ecuación

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$$

se verifica que la solución general es de la forma

$$x_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

Para el caso de la sucesión de Fibonacci, con condición inicial 1 y 1, se tendrá que

$$x_0 = 1 = c_1 + c_2,$$

$$x_1 = 1 = c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

de donde

$$c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}},\ c_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}},$$

de donde

$$x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

Cuando las soluciones no son reales o son múltiples no es posible seguir esta estrategia ya que se necesitan más soluciones linealmente independientes para formar una base. Para conseguirlas se procederá de la siguiente manera:

1. Si r es una raíz real de $p(r)$ de multiplicidad m, tenemos las soluciones linealmente independientes r^n, $nr^n, n^2 r^n, ..., n^{m-1} r^n$.

2. Si $r = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$ y $\overline{r} = \rho(\cos\theta - i \sin\theta)$ son una raices complejas de $p(r)$ de multiplicidad m, tenemos las soluciones linealmente independientes $\rho^n \cos(n\theta)$, $\rho^n \sin(n\theta)$, $n\rho^n \cos(n\theta)$, $n\rho^n \sin(n\theta), ...,$ $n^{m-1}\rho^n \cos(n\theta)$, $n^{m-1}\rho^n \sin(n\theta)$.

Por ejemplo, la ecuación

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$$

tiene polinomio característico

$$p(r) = r^2 - 2r + 2$$

con raíces $r = 1 \pm i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} \pm \sin\frac{\pi}{4}\right)$, y su solución general será

$$x_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(c_1 \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right).$$

La ecuación

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$$

tiene polinomio característico

$$p(r) = r^2 - 4r + 4,$$

con raiz $r = 2$, por lo que la solución general será

$$x_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n.$$

Este método tiene la limitación práctica de tener que resolver la ecuación polinómica $p(r) = 0$, por lo que en principio, sólo es posible resolver de esta manera ecuaciones de orden bajo, o aquellas con una forma concreta. Es u problema generalizado ya que cualquier otro método, como el de usar la transformada Z, precisa de la resolución de este tipo de ecuaciones.

Una vez resuelta la ecuación homogénea, supongamos la ecuación no homogénea

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + ... + a_{k-1} x_{n+1} + a_k x_n = g(n), \tag{1.6}$$

con $g(n) \neq 0$. El siguiente resultado nos dice cómo son las soluciones.

Teorema 2 *Las soluciones de la ecuación (1.6) son de la forma*

$$x_n = x_n^h + x_n^p,$$

donde x_n^h *es la solución de la ecuación homogénea asociada y* x_n^p *es una solución particular de la ecución no homogénea.*

Demostración. Suponiendo conocida una solución particular de la ecuación no homogénea x_n^p, sea x_n otra solución. Definimos $y_n = x_n - x_n^p$, y veamos que es solución de la ecuación homogénea asociada, con lo que se probaría el resultado. Sustituimos y_n en la ecuación

$$\begin{aligned}
& y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + ... + a_{k-1} y_{n+1} + a_k y_n \\
= \; & x_{n+k} - x_{n+k}^p + a_1 \left(x_{n+k-1} - x_{n+k-1}^p\right) + ... + a_k \left(x_n - x_n^p\right) \\
= \; & (x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + ... + a_{k-1} x_{n+1} + a_k x_n) \\
& -(x_{n+k}^p + a_1 x_{n+k-1}^p + ... + a_{k-1} x_{n+1}^p + a_k x_n^p) \\
= \; & g(n) - g(n) = 0,
\end{aligned}$$

con lo que termina la prueba.□

En general, no es sencillo encontrar soluciones particulares, pero es posible en los casos concretos de las posibles soluciones linealmente independientes de las ecuaciones homogéneas. El método se llama de coeficientes indeterminados que vemos con el siguiente ejemplo.

$$x_{n+2} - 4x_{n-1} + 4x_n = (-1)^n.$$

Como $g(n) = 3^n$, proponemos una solución que sea proporcional a ésta, es decir, $x_n^p = A3^n$, donde A es una constante a determinar. Sustituyendo en la ecuación tenemos

$$A(-1)^{n+2} - 4A(-1)^{n+1} + 4A(-1)^n = (-1)^n,$$

y simplificando

$$(A + 4A + 4A)(-1)^n = 9A(-1)^n = (-1)^n,$$

de donde $9A = 1$, y la solución particular es

$$x_n^p = \frac{1}{9}(-1)^n.$$

La solución general será por tanto

$$x_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n + \frac{1}{9}(-1)^n.$$

Si tenemos la ecuación

$$x_{n+2} - 4x_{n-1} + 4x_n = \sin n,$$

tomamos como solución particular

$$x_n^p = A \sin n + B \cos n,$$

y si se trata de

$$x_{n+2} - 4x_{n-1} + 4x_n = n3^n,$$

se tomará

$$x_n^p = (An + B)3^n.$$

Se deja como ejercicio calcular los valores A y B que dan la solución particular.

1.4.2. Estabilidad de ecuaciones lineales

Una ecuación lineal homogénea siempre tiene como solución las sucesión constante $x_n = 0$. Cualquier otra solución será de la forma

$$y_n = \sum_{i=1}^{s} p_i(n) r_i^n + \sum_{i=1}^{r} \rho_i^n \left(q_i(n) \cos(n\theta_i) + h_i(n) \sin(n\theta_i) \right),$$

donde $p_i(n)$, $q_i(n)$ y $h_i(n)$ son polinomios en n, que serán constantes si las raíces r_i o $\rho_i(\cos\theta_i + i\sin\theta_i)$ tienen multiplicidad 1. Si calculamos

$$\lim_{n\to\infty} y_n,$$

es fácil darse cuenta de que será cero si $|r_i| < 1$, $i = 1, ..., s$ y $|\rho_i| < 1$, $i = 1, ..., r$. En ese caso, todas las soluciones convergen a cero y el sistema se dirá asintóticamente estable. Si $|r_i| = 1$ (o $|\rho_i| = 1$) para algún i, entonces

$$p_i(n) r_i^n$$

estará acotado si $p_i(n)$ es constante, es decir, si la raiz tiene multiplicidad uno. Si todas las raíces verifican que $|r_i| \leq 1$, $i = 1, ..., s$ y $|\rho_i| \leq 1$, $i = 1, ..., r$, y aquellas con módulo 1 tienen multiplicidad 1, esntonces el sistema se dice estable, y ninguna solución converge a infinito en módulo. En caso contrario, el sistema se dirá inestable y sí que existirán soluciones cuyo módulo crezca de forma exponencial.

Por ejemplo, la ecuación

$$x_{n+2} + x_n = 0$$

es estable, pero no asíntoticamente estable,

$$x_{n+2} - \frac{x_n}{4} = 0$$

es asintóticamente estable, mientras que

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$$

es inestable.

Si una ecuación homogénea es asintóticamente estable, entonces una ecuación no homogéna asociada tendrá la solución de la forma

$$x_n = x_n^h + x_n^p,$$

y a partir de un cierto valor de n el término homogéneo será prácticamente nulo, y por tanto despreciable. Entonces, la solución para n sufientemente grande es

$$x_n = x_n^p.$$

Este hecho es de utilidad a la hora de diseñar circuitos digitales.

1.5. Ejercicios

1. Calcular $\frac{7!}{10!}$ y $\frac{12!}{10!}$.

2. Simplificar $\frac{n!}{(n-1)!}$ y $\frac{(n+2)!}{n!}$.

3. Supongamos que tenemos 5 libros de historia, 3 de sociología, 6 de antropología y 4 de psicología. Encontrar el número n de posibilidades entre las que un estudiante puede escoger:

   a) Uno de los libros.

   b) Un libro de cada tema.

4. En un curso de historia hay 8 estudiantes hombres, 6 estudiantes mujeres y 2 no binarios. Encontrar los posibles casos de elegir:

   a) Un representante del curso.

b) Dos representantes del curso: un hombre y una mujer.

c) Dos representantes del curso: una mujer y un no binario.

d) Un presidente y un vicepresidente.

5. Entre A y B hay cuatro líneas de autobuses, y entre B y C hay tres líneas de autobuses. Encontrar el número de formas en que una persona puede viajar en autobús:

    a) De A a C pasando por B.

    b) En viaje de ida y vuelta de A a C pasando por B.

    c) En viaje de ida y vuelta de A a C pasando por B pero sin usar una línea de autobús más de una vez.

6. Encontrar todas las posibles formas en que 7 personas pueden sentarse:

    a) En una fila de sillas.

    b) Alrededor de una mesa redonda.

7. Encontrar el número de permutaciones distintas que pueden formarse con todas las letras de las palabras PATOS, PARADAS y SOCIOLÓGICAS.

8. En un curso hay 16 hombres, 14 mujeres y 3 no binarios. Encuentre el número de maneras de elegir:

    a) Un comité de 4 miembros.

    b) Un comité de 6 miembros con 2 hombres, mujeres y 2 no binarios.

    c) Un presidente, un vicepresidente y un tesorero.

9. Una caja contiene 8 calcetines azules y 6 calcetines rojos. Encontrar el número de formas en que es posible extraer dos calcetines de la caja si:

    a) Pueden ser de cualquier color.

    b) Deben ser del mismo color.

10. Encontrar el número de comités de 5 miembros con un director que es posible escoger entre un grupo de 12 personas.

11. Encontrar el número mínimo de estudiantes necesario para garantizar que al menos cinco de ellos están en cada uno de los cursos de un grado de cuatro años.

12. Sea L una lista (no necesariamente en orden alfabético) de las 27 letras del alfabeto.

13. Supongamos que de 32 personas que reciclan papel o botellas (o ambos) hay 30 que reciclan papel y 14 que reciclan botellas. Encontrar el número de personas que:

a) Reciclan papel y botellas.

b) Sólo reciclan papel.

c) Sólo reciclan botellas.

14. Las letras A, B, C y D representan, respectivamente, cursos de arte, biología, química y teatro. Calcular el número total de personas en una sala teniendo en cuenta la siguiente casuística: 12 cursan A, 5 cursan A y B, 4 cursan B y D, 2 cursan B, C, D, 20 cursan B, 7 cursan A y C, 3 cursan C y D, 3 cursan A, C, D, 20 cursan C, 4 cursan A y D, 3 cursan A, B y C, 2 cursan los cuatro, 8 cursan D, 16 cursan B y C, 2 cursan A, B y D y 71 no cursan ningún curso.

15. Dados números reales a y b, demostrar la fórmula del binomio

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) a^{n-i} b^i.$$

16. Un estudiante debe cursar cinco materias de tres áreas de estudio. En cada una de ellas se ofrecen diferentes cursos, pero el estudiante no puede cursar más de dos cursos de cada área. Se pide:

    a) Usar el principio del palomar para demostrar que el estudiante debe cursar por lo menos dos cursos de cada área.

    b) Usar el principio de inclusión-exclusión para demostrar que el estudiante debe cursar por lo menos un curso de cada área.

17. Una tienda vende 5 tipos de donuts. Encontrar el número de maneras en las que un cliente puede comprar:

    a) 8 donuts.

    b) Una docena de donuts.

18. Resolver las siguientes recurrencias lineales:

$$(a)\ \left\{ \begin{array}{c} x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}, \\ x_0 = 1,\ x_1 = 2. \end{array} \right. \quad (b)\ \left\{ \begin{array}{c} x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1}, \\ x_0 = 1,\ x_1 = 0. \end{array} \right. \quad (c)\ \left\{ \begin{array}{c} x_{n+1} = -3x_n + 4x_{n-1}, \\ x_0 = -1,\ x_1 = -2. \end{array} \right.$$

$$(d)\ \left\{ \begin{array}{c} x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1}, \\ x_0 = 1,\ x_1 = 2. \end{array} \right. \quad (e)\ \left\{ \begin{array}{c} x_{n+1} = -4x_n - 4x_{n-1}, \\ x_0 = 1,\ x_1 = 0. \end{array} \right. \quad (f)\ \left\{ \begin{array}{c} x_{n+1} = 10x_n - 25x_{n-1}, \\ x_0 = -1,\ x_1 = -2. \end{array} \right.$$

$$(g)\ \left\{ \begin{array}{c} x_{n+1} = -x_{n-1}, \\ x_0 = 1,\ x_1 = 2. \end{array} \right. \quad (h)\ \left\{ \begin{array}{c} x_{n+1} = 2x_n - 2x_{n-1}, \\ x_0 = 1,\ x_1 = 0. \end{array} \right. \quad (i)\ \left\{ \begin{array}{c} x_{n+1} = 2x_n - 5x_{n-1}, \\ x_0 = -1,\ x_1 = -2. \end{array} \right.$$

$$(j)\ \left\{ \begin{array}{c} x_{n+1} = 3x_n - 7x_{n-1} + 5x_{n-2}, \\ x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 0. \end{array} \right. \quad (k)\ \left\{ \begin{array}{c} x_{n+1} = 4x_n - 5x_{n-1} + 2x_{n-2}, \\ x_0 = 1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1. \end{array} \right.$$

$$(l)\ \left\{ \begin{array}{c} x_{n+1} = -2x_n + x_{n-1} + 2x_{n-2}, \\ x_0 = -1,\ x_1 = -2,\ x_2 = 3. \end{array} \right. \quad (m)\ \left\{ \begin{array}{c} x_{n+1} = -4x_n - 6x_{n-1}4x_{n-2}, \\ x_0 = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1. \end{array} \right.$$

19. Resolver las siguientes recurrencias lineales:

$$(a)\quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1} + 1, \\ x_0 = 1,\ x_1 = 2. \end{cases} \qquad (b)\quad \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1} + n, \\ x_0 = 1,\ x_1 = 0. \end{cases}$$

$$(c)\quad \begin{cases} x_{n+1} = -3x_n + 4x_{n-1} - 6, \\ x_0 = -1,\ x_1 = -2. \end{cases} \qquad (d)\quad \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + 2^n, \\ x_0 = 1,\ x_1 = 2. \end{cases}$$

$$(e)\quad \begin{cases} x_{n+1} = -4x_n - 4x_{n-1} - (-1)^n, \\ x_0 = 1,\ x_1 = 0. \end{cases} \qquad (f)\quad \begin{cases} x_{n+1} = 10x_n - 25x_{n-1} + n - 4^n, \\ x_0 = -1,\ x_1 = -2. \end{cases}$$

20. Obtener a y b para que la recurrencia

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1} \\ x_0 = 0,\ x_1 = 1, \end{cases}$$

tenga $x_n = 2^n - 1$ por solución.

21. Obtener a y b para que la recurrencia

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1} \\ x_0 = 1,\ x_1 = \sqrt{2}, \end{cases}$$

tenga $x_n = 2^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ por solución.

22. Obtener a y b para que la recurrencia

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1} \\ x_0 = 0,\ x_1 = 3, \end{cases}$$

tenga $x_n = n3^n$ por solución.

23. Obtener a, b y c para que la recurrencia

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1} + cx_{n-2} \\ x_0 = 2,\ x_1 = 2 + \sqrt{2},\ x_2 = 4, \end{cases}$$

tenga $x_n = 2^n \left(1 + \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)$ por solución.

24. Obtener a y b para que la recurrencia

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n - 4x_{n-1} + b \\ x_0 = 1,\ x_1 = 3, \end{cases}$$

tenga $x_n = n2^n + 1$ por solución.

25. Obtener a y b para que la recurrencia

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n - 2x_{n-1} \\ x_0 = 2,\ x_1 = b, \end{cases}$$

tenga $x_n = 2^n + 1$ por solución.

26. Probar que cualquier x_n solución de la recurrencia

$$x_{n+1} = \frac{1}{6}x_n + \frac{1}{3}x_{n-1}$$

satisface que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

27. Probar que cualquier x_n solución de la recurrencia

$$x_{n+1} = \frac{1}{6}x_n + \frac{1}{3}x_{n-1} + 1$$

satisface que $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.

Bibliografía

[1] S. Lipschutz y M. L. Lipson, Matemáticas discretas, McGraw-Hill.

[2] M .Díaz Toca, F. Guil Asensio y L. Marín, Matemáticas para la computación, Ed. Diego Marín.