Capítulo 1

CALCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES I

1.1. Derivabilidad y Diferenciabilidad de Funciones de Varias Variables

Sea $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función de varias variables con D un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. El principal problema con el que nos encontramos para generalizar el concepto de derivada en el ámbito de las funciones de varias variables es que no siempre puede escribirse el cociente

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

que sirve de base para el concepto de derivada. Cuando consideramos funciones reales de varias variables esto puede hacerse introduciendo la nociones de *derivadas direccional* y *parcial*.

1.1.1. Derivadas Direccional y Parcial

Sea $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función real de varias variables definida sobre un conjunto abierto D. Consideremos un vector arbitrario de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ y un punto $\mathbf{a} \in D$. Se define la *derivada direccional en la dirección del vector* $\mathbf{v}$

de f en el punto $\mathbf{a}$ como

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+h\cdot\mathbf{v})-f(\mathbf{a})}{h},$$

en caso de que dicho límite exista. Cabe decir que esta noción es una extensión de la definición de derivada de funciones reales de variable real.

Consideremos en $\mathbb{R}^n$ la base canónica $\mathcal{C}=\{\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n\}$ donde $\mathbf{e}_i=(0,...,0,1,0,...,0)$ es el vector de la base canónica con el uno en la posición i-ésima. Se define la *derivada parcial i–ésima de f en el punto* $\mathbf{a}$ como

$$D_{\mathbf{e}_i}f(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+h\cdot\mathbf{e}_i)-f(\mathbf{a})}{h}.$$

Es decir la derivada direccional de dicha función en el punto $\mathbf{a}$ según la dirección del vector $\mathbf{e}_i$. Si prestamos atención esta derivada parcial coincide con la derivada de la función real de variable real f_i definida por $f_i(x_i)=f_i(a_1,...,x_i,...,a_n)$ siendo $\mathbf{a}=(a_1,...,a_n)$. Es decir, la función construida a partir de f fijando todas las coordenadas menos la i-ésima. Por esto, la derivada parcial i–ésima puede denotarse de las siguientes formas

$$D_i f(\mathbf{a}),\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}),\ D_{x_i}f(\mathbf{a}) \text{ ó } f_{x_i}(\mathbf{a}).$$

Por ejemplo, la función $f(x,y,z)=\sin(xy+z)$ verifica que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= y\cos(xy+z),\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= x\cos(xy+z),\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \cos(xy+z),
\end{aligned}$$

Las derivadas direccionales y parciales no son una buena generalización del concepto de derivada de una función real de variable real en el siguiente sentido: la existencia de la derivada parcial o direccional en un punto no implica la continuidad de la función en dicho punto, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo.

Example 1 *Consideremos la función*

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2}{y} & si\ y\neq 0,\\ 0 & si\ y=0. \end{cases}$$

Esta función no es continua en $(0,0)$ ya que si tomamos la dirección $y = x$ se tiene que el límite en esa dirección es

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0,$$

mientras que si tomamos la dirección $y = x^2$ se verifica que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1,$$

por lo que el límite no existe. Sin embargo

$$\begin{aligned} D_1 f(0,0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} D_2 f(0,0) &= \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Se hace necesaria otra extensión del concepto de derivada que nos asegure la continuidad, y que además sea válida para funciones de varias variables en general. Esta extensión se conoce con el nombre de *diferencial* y la introduciremos a continuación.

1.1.2. Diferencial de una función de varias variables

Sea $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función de varias variables con D un conjunto abierto. Denotemos por $\|\cdot\|_n$ y $\|\cdot\|_m$ dos normas en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. Sea $\mathbf{a} \in D$. La función $\mathbf{f}$ es *diferenciable en el punto* $\mathbf{a}$ si existe una aplicación lineal $\mathbf{U} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de manera que

$$\lim_{\mathbf{h}\to \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - \mathbf{U}(\mathbf{h})\|_m}{\|\mathbf{h}\|_n} = 0.$$

La aplicación lineal $\mathbf{U}$ la denotaremos por $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$. La función $\mathbf{f}$ se dice diferenciable en D si existe $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ para todo punto $\mathbf{a} \in D$.

Hemos de hacer notar que esto es una extensión del concepto de derivada en el siguiente sentido: si una función $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es derivable en un punto $x_0 \in (a, b)$ con derivada $f'(x_0)$, es claro que la aplicación lineal $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $u(x) = f'(x_0)x$ verifica que

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - u(h)|}{|h|} = 0,$$

por lo que es la diferencial de dicha función.

1.2. Propiedades de la Diferencial

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función de varias variables con D un conjunto abierto. Las principales propiedades de la diferencial que vamos a estudiar son las siguientes.

Proposition 2 *Dado* $\mathbf{a} \in D$, *si* $\mathbf{f}$ *es diferenciable en* $\mathbf{a}$, *la diferencial* $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ *es única.*

Theorem 3 *Dado* $\mathbf{a} \in D$, *si* $\mathbf{f}$ *es diferenciable en* $\mathbf{a}$, *entonces* $\mathbf{f}$ *es continua en el punto* $\mathbf{a}$.

Vemos así como la diferenciabilidad de la función $\mathbf{f}$ implica la continuidad de la misma.

Proposition 4 *Sean* D *un conjunto abierto y* $\mathbf{f}, \mathbf{g} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *dos funciones diferenciables en un punto* $\mathbf{a} \in D$. *Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

(a) La función suma $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ *es diferenciable en* $\mathbf{a}$ *y se verifica que*

$$D(\mathbf{f} + \mathbf{g})(\mathbf{a}) = D\mathbf{f}(\mathbf{a}) + D\mathbf{g}(\mathbf{a}).$$

(b) Si $m = 1$, *entonces la función producto* $f \cdot g$ *es diferenciable en* $\mathbf{a}$ *y se verifica la fórmula*

$$D(f \cdot g)(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a}) \cdot Df(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \cdot Dg(\mathbf{a}).$$

(c) *Si $m = 1$ y $g(\mathbf{a}) \neq 0$, se verifica que la función cociente f/g es diferenciable en $\mathbf{a}$ y se cumple la fórmula*

$$D(f/g)(\mathbf{a}) = \frac{g(\mathbf{a}) \cdot Df(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}) \cdot Dg(\mathbf{a})}{g(\mathbf{a})^2}.$$

Podemos comprobar las similitudes entre esta proposición y las reglas de derivación de funciones reales de variable real y darnos cuenta de que se mantienen todas ellas. Otra regla que se mantiene es la regla de la cadena, que nos da la manera de calcular la diferencial de funciones compuestas.

Consideremos dos funciones $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{g} : D' \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ de manera que la imagen de $\mathbf{f}$ está contenida en D'. Podemos definir entonces la función compuesta $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ dada por $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ para todo $\mathbf{x} \in D$. Tenemos entonces la siguiente proposición conocida como la regla de la cadena.

Proposition 5 *Bajo las condiciones anteriores, si $\mathbf{f}$ es diferenciable en un punto $\mathbf{a} \in D$ y $\mathbf{g}$ es diferenciable en $\mathbf{f}(\mathbf{a})$, se verifica que $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$ y la diferencial de dicha función se calcula con la fórmula*

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{a}) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{a})) \circ D\mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

A pesar de todas estas fórmulas, todavía no tenemos un método práctico para calcular la diferencial de una función en un punto. En la siguiente sección veremos cómo abordar este problema con garantías.

1.3. Cálculo práctico de la diferencial

El cálculo práctico de la diferencial de una función de varias variables $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con D un conjunto abierto, se apoya en los siguientes resultados.

Proposition 6 *Sea $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función de varias variables con D un conjunto abierto y con funciones coordenadas $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_m)$. Sea $\mathbf{a} \in D$. Entonces $\mathbf{f}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$ si y sólo si cada una de las funciones coordenadas f_i son diferenciables en $\mathbf{a}$ para $i = 1, 2, ..., m$. Además las funciones coordenadas de $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ son $Df_i(\mathbf{a})$, es decir*

$$D\mathbf{f}(\mathbf{a}) = (Df_1(\mathbf{a}), ..., Df_m(\mathbf{a})).$$

Tenemos entonces que el cálculo de la diferencial de una función de varias variables se reduce al cálculo de la diferencial de funciones reales de varias variables. Con respecto a éstas, tenemos el siguiente resultado que nos liga el concepto de diferencial con los de derivadas direccional y parcial.

Proposition 7 *Sean D un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en un punto $\mathbf{a} \in D$. Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Entonces se verifica que*

$$Df(\mathbf{a})(\mathbf{v}) = D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}).$$

Debe ser conocido del álgebra lineal estudiado en este curso que calcular una aplicación lineal es equivalente a calcularr su matriz asociada a las bases canónicas del espacio de partida y llegada. Aplicando la Proposición 7 y considerando las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$ es fácil comprobar que la matriz asociada a $Df(\mathbf{a})$ en estas bases es

$$(D_1 f(\mathbf{a}), ..., D_n f(\mathbf{a})).$$

Considerando ahora una función $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en un punto $\mathbf{a} \in D$ con funciones coordenadas $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_m)$, la matriz asociada a $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} D_1 f_1(\mathbf{a}) & D_2 f_1(\mathbf{a}) & ..... & D_n f_1(\mathbf{a}) \\ D_1 f_2(\mathbf{a}) & D_2 f_2(\mathbf{a}) & ..... & D_n f_2(\mathbf{a}) \\ .... & .... & ..... & .... \\ D_1 f_m(\mathbf{a}) & D_2 f_m(\mathbf{a}) & ..... & D_n f_m(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

la cual se conoce como *matriz jacobiana de* $\mathbf{f}$ *en el punto* $\mathbf{a}$, y que denotaremos por $J\mathbf{f}(\mathbf{a})$. La diferencial de la función en dicho punto será la aplicación lineal $D\mathbf{f}(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por

$$\begin{aligned} D\mathbf{f}(\mathbf{a})(x_1, x_2, ..., x_n) &= J\mathbf{f}(\mathbf{a}) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_1 f_1(\mathbf{a}) & D_2 f_1(\mathbf{a}) & ..... & D_n f_1(\mathbf{a}) \\ D_1 f_2(\mathbf{a}) & D_2 f_2(\mathbf{a}) & ..... & D_n f_2(\mathbf{a}) \\ .... & .... & ..... & .... \\ D_1 f_m(\mathbf{a}) & D_2 f_m(\mathbf{a}) & ..... & D_n f_m(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

para todo vector $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Podemos además reinterpretar las proposiciones 4 y 5 desde el punto de vista de la matriz jacobiana de las funciones consideradas, apoyándonos en las propiedades de la matriz de una aplicación lineal con relación a la suma y composición de aplicaciones lineales. Obtenemos entonces las propiedades siguientes.

Proposition 8 *En las condiciones de la Proposición 4 se verifican:*

(a) Respecto a la función suma

$$J(\mathbf{f}+\mathbf{g})(\mathbf{a}) = J\mathbf{f}(\mathbf{a}) + J\mathbf{g}(\mathbf{a}).$$

(b) Respecto a la función producto

$$J(f \cdot g)(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a}) \cdot Jf(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \cdot Jg(\mathbf{a}).$$

(c) Respecto a la función cociente

$$J(f/g)(\mathbf{a}) = \frac{g(\mathbf{a}) \cdot Jf(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}) \cdot Jg(\mathbf{a})}{g(\mathbf{a})^2}.$$

Proposition 9 *En las condiciones de la Proposición 5 se verifica*

$$J(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{a}) = J\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{a})) \cdot J\mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

Hemos visto como las derivadas parciales de una función real de varias variables condicionan a la diferencial en el sentido que la matriz asociada de la diferencial en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$ tiene por coeficientes dichas derivadas parciales. Además las derivadas parciales permiten afirmar la existencia de la diferencial en las condiciones de la siguiente Proposición.

Proposition 10 *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función real de varias variables definida sobre el abierto D. Supongamos que existen las derivadas parciales $D_i f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de forma que son continuas en un punto $\mathbf{a} \in D$. Entonces la función f es diferenciable en dicho punto.*

El recíproco a esta Proposición es falso, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo.

Example 11 *Consideramos la función*

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Es fácil ver que

$$\begin{aligned}D_1f(0,0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0,\\ D_2f(0,0) &= \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0,\end{aligned}$$

por lo que la diferencial $Df(0,0)$, en caso de existir, es la función constante igual a cero. Esta función es diferenciable en $(0,0)$ ya que

$$\begin{aligned}\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\left|f(h_1,h_2)-f(0,0)-(0,0)\cdot\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\left|(h_1^2+h_2^2)\sin\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\\ &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\left|\sqrt{h_1^2+h_2^2}\sin\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right|.\end{aligned}$$

Tomando coordenadas polares calculamos

$$\lim_{r\to0}\left|r\sin\frac{1}{r}\right|=0.$$

Así, la diferencial $Df(0,0)$ es la función constante igual a cero. Sin embargo las derivadas parciales no son continuas en dicho punto ya que

$$\begin{aligned}D_1f(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-(x^2+y^2)\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ &= 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{aligned}$$

Tomando límites iterados tenemos que

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{x\to0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$$

que no existe ya que no existe $\lim_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$. Por lo tanto $D_1f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$. De forma análoga se razona para $D_2f(0,0)$.

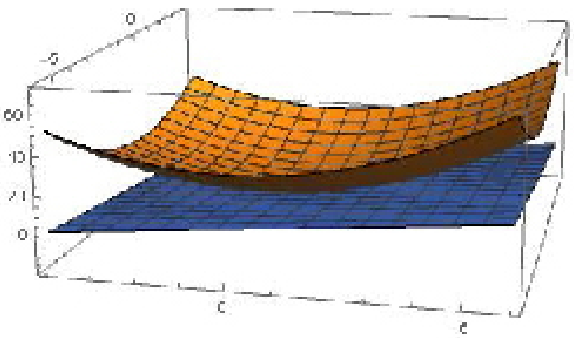

Figura 1.1: Plano tangente a $f(x,y) = x^2 + y^2$ en el punto $(-1,-1)$.

1.4. Interpretación Geométrica de las Derivadas Parciales

Consideremos una función $f(x,y)$ definida sobre un cierto conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$. Sea (x_0, y_0) un punto de dicho conjunto de manera que f es diferenciable en dicho punto. La ecuación del plano tangente a la gráfica de la función en dicho punto es de la forma

$$z - f(x_0, y_0) = D_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + D_2 f(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Así dada la función $f(x,y) = x^2 + y^2$, la ecuación de su plano tangente en el punto $(-1,-1)$ tiene por ecuación $z = -2x - 2y - 2$, como nos muestra la figura 1.1.

1.5. Derivadas Parciales de Orden Superior

Consideremos una función real de varias variables $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con D un conjunto abierto. Si dicha función tiene derivadas parciales continuas en D, es decir existen las funciones $D_i f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y son continuas para $i = 1, 2, ..., n$, podemos plantearnos con cada una de ellas el cálculo de la derivada parcial de cada una de estas funciones, obteniéndose de esta manera las derivadas parciales segundas de f en un punto $\mathbf{a} \in D$ denotadas por $D_{ij}^2 f(\mathbf{a})$, que significará primero una derivación de f respecto de la variable x_i y posteriormente respecto de la variable x_j. Otras maneras de denotar esta derivada segunda son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a}) \text{ ó } f_{x_i x_j}(\vec{a}).$$

Iterando el proceso podemos construir derivadas parciales sucesivas de la función f. Una función que tenga todas las derivadas parciales k–ésimas continuas se dirá de clase $C^k(D, \mathbb{R})$.

El problema que se plantea aquí es el de la permutabilidad en el orden de las derivaciones, es decir, dadas dos variables distintas x_i e x_j ¿en qué condiciones coinciden las derivadas $D^2_{ij} f(\mathbf{a})$ y $D^2_{ji} f(\mathbf{a})$ en un punto $\mathbf{a}$? El mismo problema se puede plantear con derivaciones de orden superior a dos, pero son reducibles a este caso. Se estudiará en el curso el siguiente Teorema debido a Schwarz.

Theorem 12 (Schwarz) *Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de manera que $D_i f$ y $D_j f$ son continuas en D para dos variables distintas x_i y x_j. Si $D^2_{ij} f$ existe y es continua en un punto $\mathbf{a} \in D$, entonces existe $D^2_{ji} f(\mathbf{a})$ y*

$$D^2_{ij} f(\mathbf{a}) = D^2_{ji} f(\mathbf{a}).$$

Existen ejemplos de funciones que no satisfacen este resultado como se muestra en el siguiente ejemplo.

Example 13 *Consideramos la función*

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si\ (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & si\ (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Puede comprobarse que sus derivadas parciales segundas son $D^2_{12} f(0, 0) = -1$ y $D^2_{21} f(0, 0) = 1$.

Este Teorema y otros similares permiten ahorrar trabajo a la hora del cálculo de las derivadas de orden superior, al ser gran parte de ellas iguales. Este hecho será de importancia en el cálculo de extremos de funciones reales de varias variables, y en la aplicación del Teorema de Taylor para estas funciones.

1.6. ACTIVIDADES

Exercise 1.6.1 *Decir si es o no diferenciable en el punto* $(0,0)$ *la función real*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

Exercise 1.6.2 *Comprobar que la función* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & si\ \ (x,y)\neq(0,y)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,y)\,,\end{cases}$$

es continua en $(0,0)$, *pero no es diferenciable en este punto.*

Exercise 1.6.3 *Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad de la función* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

Calcular su derivada direccional respecto de cualquier vector $v=(v_1,v_2)$ *en el punto* $(0,0)$.

Exercise 1.6.4 *Sea* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

Comprobar que f *tiene derivada direccional respecto de cualquier vector de* $\mathbb{R}^2$ *en el punto* $(0,0)$, *pero* f *no es derivable en dicho punto.*

Exercise 1.6.5 *Calcular las derivadas parciales de la función*

$$f(x,y)=x^2\tan\frac{y^2}{x^2+y^2}$$

definida para todo punto de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, *y comprobar que*

$$xD_1f(x,y)+yD_2f(x,y)=2f(x,y)\,.$$

Exercise 1.6.6 *Calcular las derivadas parciales de la función*

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}$$

definida en el conjunto $\{(x,y) : x > 0, y > 0\}$, *y comprobar que*

$$xD_1 f(x,y) + yD_2 f(x,y) = -\frac{1}{2} f(x,y).$$

Exercise 1.6.7 *Calcular las derivadas parciales de la función*

$$f(x,y) = y \log \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$$

definida en el conjunto $\{(x,y) : x > 0, y > 0\}$, *y calcular su diferencial en el punto* $(1,1)$.

Exercise 1.6.8 *Calcular las derivadas parciales de la función*

$$f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$$

definida en el conjunto $\{(x,y) : x > 0, y > 0\}$, *y calcular su diferencial en el punto* $(2,1)$.

Exercise 1.6.9 *Dada la función* $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$\vec{f}(x,y) = \left(x^4 + y^3, x^2y^2 - 3y^2\right)$$

formar su matriz jacobiana en el punto $(1,1)$. *Comprobar que* $\vec{f}$ *es diferenciable en dicho punto y calcular su diferencial.*

Exercise 1.6.10 *Dada la función* $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida por*

$$\vec{f}(x,y) = (x\cos y, x\sin y, x\cos y\sin y)$$

formar su matriz jacobiana en el punto $(\pi, \pi/2)$. *Comprobar que* $\vec{f}$ *es diferenciable en dicho punto y calcular su diferencial.*

Exercise 1.6.11 *Comprobar que la función* $\overrightarrow{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *definida por*

$$\overrightarrow{f}(x,y,z)=\left(x^2+yz-z^2,xy-xz+2z^2,xyz\right)$$

es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^3$ *y calcularla en el punto* $(3,2,1)$.

Exercise 1.6.12 *Calcular la matriz jacobiana de las siguientes funciones:*

(a) $f(x,y,z)=x^{y+z}$.

(b) $f(x,y,z)=x^{y^z}$.

(c) $f(x,y,z)=\sin(x\sin(y\sin z))$.

(d) $f(x,y)=\left(\sin(xy),\sin(x\sin y),x^4\right)$.

Exercise 1.6.13 *Sea* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *definida por*

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+x^2\sin\frac{1}{x},y\right) & si\ \ (x,y)\neq(0,y)\\ (0,y) & si\ \ (x,y)=(0,y).\end{cases}$$

Comprobar que f *es diferenciable.*

Exercise 1.6.14 *Sabiendo que* $f(x,y)=\sqrt{\log(xy)+\arcsin\frac{y}{x}}$, *calcular*

$$xf(x,y)\,D_1f(x,y)+yf(x,y)\,D_2f(x,y).$$

Exercise 1.6.15 *Sabiendo que* $f(x,y)=\sin\frac{2x+y}{2x-y}$, *calcular*

$$xD_1f(x,y)+yD_2f(x,y).$$

Exercise 1.6.16 *Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie* $z=x^2+y^2$ *en los puntos* $(0,0)$ *y* $(1,2)$.

Exercise 1.6.17 *Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie* $z=\log x^2+\log y^2$ *en los puntos* $(3,1)$ *y* (x_0,y_0).

Exercise 1.6.18 *Sea* A *un abierto de* $\mathbb{R}^3$ *y* $f:A\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$. *Supongamos que* f *es diferenciable en un punto* $(a_1,a_2,a_3)\in A$ *y que* $Df(a_1,a_2,a_3)(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2+x_3$ *para todo* $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$. *Calcular* $D_vf(a_1,a_2,a_3)$ *siendo* v *el vector siguiente:*

(a) $v = (1, 2, 3)$.

(b) $v = (0, 1, 1)$.

(c) $v = (-1, 1, 2)$.

Exercise 1.6.19 *Sea A un abierto de $\mathbb{R}^3$ y $\overrightarrow{f} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Supongamos que $\overrightarrow{f}$ es diferenciable en un punto $(a_1, a_2, a_3) \in A$. Si $\overrightarrow{f} = (f_1, f_2)$ y $D_{v_i} f_j (a_1, a_2, a_3) = i + j$ para $j = 1, 2$ e $i = 1, 2, 3$ donde $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ y $v_3 = (0, 0, 1)$, determinar la diferencial de $\overrightarrow{f}$ en dicho punto.*

Exercise 1.6.20 *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2} & si\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si\ (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Comprobar que existen las derivadas parciales segundas $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(0, 0)$ y $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}(0, 0)$, pero no son iguales.

Exercise 1.6.21 *Se consideran las funciones $\overrightarrow{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $\overrightarrow{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $\overrightarrow{f}(x, y) = (x^2 y^4, x^3 y^3 + 4xy^2)$ y $\overrightarrow{g}(x, y) = (x \sin y, y \sin x)$. Sea $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$. Calcular la matriz jacobiana de $\overrightarrow{F}$ en el punto $(2, -1)$.*

Exercise 1.6.22 *Se consideran las funciones $\overrightarrow{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ y $\overrightarrow{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $\overrightarrow{f}(t) = (t^2, 3t - 1, 1 - t^2)$ y $\overrightarrow{g}(x, y, z) = (x^2 - y - zx, y^2 + xy + z^2)$. Sea $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$. Calcular la matriz jacobiana de $\overrightarrow{F}$ en el punto -1. ¿Es posible calcular la matriz jacobiana de la función $\overrightarrow{G} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$ en el punto $(1, 1, 1)$?*

Exercise 1.6.23 *Hallar la expresión de las derivadas parciales de la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x, y) = f(g(x) k(y), g(x) + h(y)),$$

donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase $C^1(\mathbb{R})$ y $g, h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son de clase $C^1(\mathbb{R})$.

Exercise 1.6.24 *Calcular la expresión de las derivadas parciales de la función $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por*

$$F(x, y, z) = f(x^y, y^z, z^x)$$

donde $f : M \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función de clase $C^1(M)$ con

$$M = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}.$$

Exercise 1.6.25 *Calcular la expresión de las derivadas parciales de la funciones $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dadas por*

(a) $F(x, y, z) = \int_0^{x+y+z} \sin t dt.$

(b) $F(x, y, z) = \int_0^{xyz} t \sin t dt.$

(c) $F(x, y, z) = \int_{x^2+y^2}^{xyz} \sin t dt.$

Exercise 1.6.26 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x, y) = f\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) \text{ con } x, y \neq 0.$$

Comprobar que se satisfacen las igualdades:

(a) $x^2 \frac{\delta F}{\delta x}(x, y) + y^2 \frac{\delta F}{\delta y}(x, y) = 0.$

(b) $xy(x + y)\frac{\delta^2 F}{\delta x \delta y}(x, y) + x^2 \frac{\delta^2 F}{\delta x^2}(x, y) + y^2 \frac{\delta^2 F}{\delta^2 y}(x, y) = 0.$

Exercise 1.6.27 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\mathbb{R})$ y sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x, y) = \frac{f(y/x)}{x} \text{ con } x \neq 0.$$

Comprobar que se satisfacen las igualdades:

(a) $x \frac{\delta F}{\delta x}(x, y) + y \frac{\delta F}{\delta y}(x, y) + F(x, y) = 0.$

(b) $x^2 \frac{\delta^2 F}{\delta x^2}(x, y) + y^2 \frac{\delta^2 F}{\delta^2 y}(x, y) + 2xy \frac{\delta^2 F}{\delta x \delta y}(x, y) = 2F(x, y).$

Exercise 1.6.28 *Sea* $f(x,y) = x^2 - y^2$ *y hagamos* $x = \sin t$ *e* $y = t$ *con lo que se obtiene la función compuesta* $F(t) = f(x(t), y(t))$. *Calcular las tres primeras derivadas de dicha función.*

Exercise 1.6.29 *Dada* $f(x,y,z)$ *se define el gradiente de* f *como*

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \left(\frac{\delta f}{\delta x}(x,y,z), \frac{\delta f}{\delta y}(x,y,z), \frac{\delta f}{\delta z}(x,y,z)\right).$$

Dadas las coordenadas cilíndricas de $\mathbb{R}^3$

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z, \end{array}\right.$$

obtener el gradiente de f *en estas coordenadas.*

Exercise 1.6.30 *Si ahora tenemos las coordenadas esféricas*

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi, \end{array}\right.$$

obtener el gradiente de la función del ejercicio anterior en estas nuevas coordenadas.

Exercise 1.6.31 *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *una función de clase* $C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. *Comprobar que*

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+y^2}\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x,y) + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x,y)\right) &= \\ = 4\left(\frac{\delta^2 f}{\delta u^2}(u,v) + \frac{\delta^2 f}{\delta v^2}(u,v)\right) \end{aligned}$$

donde $u = x^2 - y^2$ *y* $v = 2xy$.

Exercise 1.6.32 *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función de clase* $C^2(\mathbb{R}^2)$. *Comprobar que*

$$\left(x^2 - y^2\right)\left(\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x,y) + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x,y)\right) = 4\frac{\delta^2 f}{\delta u \delta v}(u,v)$$

donde $u = \log(x+y)$ *y* $v = \log(x-y)$.

Exercise 1.6.33 *Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$. Comprobar que*

$$x^2\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x,y)-y^2\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x,y)=2uv\frac{\delta^2 f}{\delta u\delta v}(u,v)-u\frac{\delta f}{\delta u}(u,v)$$

donde $u=x/y$ y $v=xy$.

Exercise 1.6.34 *Demostrar que si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es una función de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$ y se verifica la igualdad*

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x,y)+\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x,y)=0,$$

entonces también se verifica

$$\frac{\delta^2 f}{\delta u^2}(u,v)+\frac{\delta^2 f}{\delta v^2}(u,v)=0$$

donde $x=u/(u^2+v^2)$ e $y=v/(u^2+v^2)$.

Exercise 1.6.35 *Dada la función*

$$f(x,y)=\begin{cases} x+x^2y^2\sin\left(\frac{y}{x}\right) & si\ (x,y)\neq(0,y),\\ 0 & si\ (x,y)=(0,y),\end{cases}$$

estudiar su diferenciabilidad en el punto $(0,0)$. Calcular $\frac{\delta f}{\delta x}$ y $\frac{\delta f}{\delta y}$. ¿Son continuas en $(0,0)$?

Exercise 1.6.36 *Enunciado del teorema de la función recíproca o inversa.*

Exercise 1.6.37 *Consideramos la función:*

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de dicha función.

Exercise 1.6.38 *Sea $f:A\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z)=\log(g(x+yz))$ siendo*

$$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: y\neq 0\right\}$$

y g una función real positiva de clase $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Se pide:

(a) *Calcular* $D = z^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

(b) *Hallar las funciones* f *definidas en* A *tales que verifican* $D = x + yz$.

Exercise 1.6.39 *Dada la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln\left(1+x^2y^2\right)}{x^4+2x^2y^2+y^4} & si\ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) *Calcular* $f_x(0,0)$ *y* $f_y(0,0)$.

(b) *¿Es diferenciable la función en el punto* $(0,0)$*?*

Exercise 1.6.40 *Sea la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha}{x^2+y^2} & si\ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ \ (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

con α *un número natural. Estudiar para los valores de* $\alpha = 3$ *y* 4:

(a) *Existencia de derivadas parciales de* f.

(b) *Diferenciabilidad de* f.

Exercise 1.6.41 *Dar un ejemplo de una función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *con diferencial en el punto* $(0,0)$, *y cuyas derivadas parciales no sean continuas en dicho punto.*

Exercise 1.6.42 *Determinar si la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & si\ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es diferenciable.

Exercise 1.6.43 *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *una aplicación diferenciable y sea* $a = (a_1, a_2, a_3)$ *un punto de* $\mathbb{R}^3$. *Explica como se calcula la diferencial de* f *en dicho punto, enunciando aquellos resultados que permitan su cálculo.*

Exercise 1.6.44 *Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(x-y)}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de dicha función en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

Exercise 1.6.45 *Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones derivables y a y b dos números reales distintos de cero. Definamos la función*

$$F(x,y) = f(ax+by) + g(ax+by) + h(ax+by).$$

Demostrar que

$$b\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = a\frac{\partial F}{\partial y}(x,y).$$

Exercise 1.6.46 *Demostrar que las derivadas parciales $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ de la aplicación*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

no coinciden en el punto $(0,0)$. ¿Coinciden en los puntos $(x,y) \neq (0,0)$? ¿Es diferenciable dicha función en el punto $(0,0)$?

1.7. El Teorema de Taylor para Funciones Reales de Varias Variables

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función real de varias variables con D un conjunto abierto. La idea del Teorema de Taylor para varias variables es idéntica a la que subyace para funciones reales de variable real: intentar sustituir una función por un polinomio que en general tendrá n variables. No obstante, dado un punto $\mathbf{a} \in D$ hemos de hacer notar que, como en el caso de una variable, bajo ciertas condiciones la función sólo puede sustituirse por el polinomio de forma local, es decir, para puntos cercanos a $\mathbf{a}$.

El conjunto D debe de cumplir la siguiente condición. Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{x}$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$. Definimos el intervalo

$$[\mathbf{a}, \mathbf{x}] = \{(1-t)\cdot \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{x} : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Dado $\mathbf{a} \in D$, el conjunto D debe de verificar que $[\mathbf{a}, \mathbf{x}]$ está contenido en D para todo punto $\mathbf{x} \in D$ suficientemente cercano al punto $\mathbf{a}$. En general todo conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ satisface esta condición. Podemos entonces enunciar el siguiente teorema.

Theorem 14 (Taylor) *Sean $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función real de varias variables con D un conjunto abierto y $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n) \in D$. Supongamos que f es de clase $C^k(D, \mathbb{R})$. Entonces para todo $\mathbf{x} \in D$ suficientemente próximo a $\mathbf{a}$ existe un número $\theta \in (0,1)$ tal que*

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{a}) + \frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n} D_i f(\mathbf{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}^2 f(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) \\ &\quad +... + \frac{1}{(k-1)!}\sum_{i_1...i_{k-1}=1}^{n} D_{i_1...i_{k-1}}^{k-1} f(\mathbf{a})(x_{i_1} - a_{i_1})...(x_{i_{k-1}} - a_{i_{k-1}}) \\ &\quad + \frac{1}{k!}\sum_{i_1...i_k=1}^{n} D_{i_1...i_k}^{k} f(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(x_{i_1} - a_{i_1})...(x_{i_k} - a_{i_k}). \end{aligned}$$

Como observamos, la fórmula obtenida en este caso es bastante más engorrosa que para el caso de funciones reales de variable real debido al gran número de variables involucradas en la misma. El polinomio de Taylor de grado $k-1$ centrado en $\mathbf{a}$ será de la forma

$$\begin{aligned} P_{k-1}(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{a}) + \frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n} D_i f(\mathbf{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}^2 f(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) \\ &\quad +... + \frac{1}{(k-1)!}\sum_{i_1...i_{k-1}=1}^{n} D_{i_1...i_{k-1}}^{k-1} f(\mathbf{a})(x_{i_1} - a_{i_1})...(x_{i_{k-1}} - a_{i_{k-1}}), \end{aligned}$$

mientras que

$$R_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{k!}\sum_{i_1...i_k=1}^{n} D_{i_1...i_k}^{k} f(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(x_{i_1} - a_{i_1})...(x_{i_k} - a_{i_k})$$

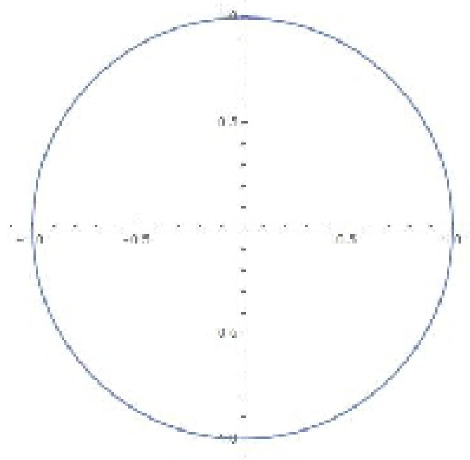

Figura 1.2: Circunferencia determinada por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

es el resto de Lagrange que nos dará una medida del error cometido en la aproximación. Como en el caso unidimensional este error nunca puede ser conocido con exactitud, y tendremos que conformarnos con obtener cotas superiores del mismo.

Nos centraremos en aplicaciones prácticas de funciones con dominio contenido en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ fundamentalmente por lo que básicamente habrá que tener claras y manejar el polinomio de Taylor con dos y tres variables. Veremos también una importante utilidad del polinomio de Taylor obteniendo fórmulas que permiten conocer cotas de los errores cometidos al hacer mediciones en las ciencias experimentales.

1.8. El Teorema de la Función Implícita

Consideremos la ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Dicha ecuación es la de una circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio uno, cuya representación gráfica se ve en la figura 1.2.

Si intentamos despejar alguna las dos variables implicadas en la ecuación, por ejemplo la variable y, obtenemos dos posibles soluciones

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

que se corresponden con dos posibles funciones, una correspondiente a la parte superior de la gráfica y otra correspondiente a la inferior. Así dado un punto (x_0, y_0) de la circunferencia es posible definir en un intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$ un número real, una única función $y(x)$ de manera que $y(x_0) = y_0$ siempre que y_0 sea distinto de ± 1.

El *Teorema de la función implícita* nos dará condiciones para, dada una ecuación o un sistema de ecuaciones, saber cuando algunas de las incógnitas implicadas en las mismas tienen una dependencia funcional de las demás. Podemos además saber esto sin necesidad de despejar ninguna de las incógnitas como hemos hecho en nuestro ejemplo.

En este curso estudiaremos el Teorema de la función implícita para una ecuación y un sistema de m ecuaciones. En el caso de una ecuación vamos a ver cuando una variable depende funcionalmente de las restantes, mientras que en el caso de un sistema de ecuaciones, vamos a ver si m variables son las que tienen una dependencia funcional de las demás. Empezamos con el Teorema para una ecuación.

1.8.1. El Teorema de la Función Implícita para una ecuación

Consideremos una ecuación de la forma $f(x_1, ..., x_n, y) = 0$, donde $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ es una función real de varias variables definida sobre un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$. Para agilizar la notación denotaremos $(x_1, ..., x_n)$ por $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, escribiéndose la ecuación anterior de la forma $f(\mathbf{x}, y) = 0$. El Teorema de la función implícita afirma lo siguiente:

Theorem 15 *Supongamos que la función f es de clase $C^k(D, \mathbb{R})$ y sea $(\mathbf{a}, b) \in D$ de manera que $f(\mathbf{a}, b) = 0$ y $\frac{\delta f}{\delta y}(\mathbf{a}, b) \neq 0$. Entonces existen un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{a} \in U$, un abierto $V \subset \mathbb{R}$ con $b \in V$ y una única función $\varphi : U \to V$ de clase $C^k(U, V)$ de manera que:*

(a) $U \times V \subset D$.

(b) $f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = 0$ *para todo* $\mathbf{x} \in U$.

(c) $\varphi(\mathbf{a}) = b$.

Es decir, el Teorema nos dice en que condiciones podemos despejar la variable y en función de las restantes variables para tener la función $y = \varphi(\mathbf{x})$.

Además del apartado (b) del Teorema podemos extraer sucesivas derivadas de la función φ derivando implícitamente la ecuación, esto es, derivando respecto de las variables x_i la expresión $f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = 0$, obteniéndose la ecuación

$$\frac{\delta f}{\delta x_i}(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) + \frac{\delta f}{\delta y}(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))\frac{\delta \varphi}{\delta x_i}(\mathbf{x}) = 0,$$

de donde sustituyendo $\mathbf{x}$ por $\mathbf{a}$ podemos obtener $\frac{\delta \varphi}{\delta x_i}(\mathbf{a})$.

1.8.2. El Teorema de la Función Implícita para un sistema de ecuaciones

Consideremos ahora un sistema de m ecuaciones con $n+m$ incógnitas de la forma

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = 0, \end{array}\right\}$$

donde $f_i : D \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ son funciones reales de varias variables para $i = 1, 2, ..., m$. Denotando por $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$, el sistema puede escribirse de la forma

$$\left.\begin{array}{l} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \end{array}\right\}$$

En estas condiciones podemos enunciar el siguiente teorema.

Theorem 16 *Supongamos que las funciones f_i son de clase $C^k(D, \mathbb{R})$ para todo $i = 1, 2, ..., m$ y sea $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in D$ de manera que $f_i(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ para todo $i = 1, 2, ..., m$. Si el determinante*

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta y_1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \frac{\delta f_1}{\delta y_2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \ldots & \frac{\delta f_1}{\delta y_m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ \frac{\delta f_2}{\delta y_1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \frac{\delta f_2}{\delta y_2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \ldots & \frac{\delta f_2}{\delta y_m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \ldots & \cdots\cdots \\ \frac{\delta f_m}{\delta y_1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \frac{\delta f_m}{\delta y_2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \ldots & \frac{\delta f_m}{\delta y_m}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \end{vmatrix} \neq 0,$$

entonces existen un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{a} \in U$, un abierto $V \subset \mathbb{R}^m$ con $\mathbf{b} \in V$ y una única función $\boldsymbol{\varphi} : U \to V$ de clase $C^k(U, V)$ con funciones coordenadas $(\varphi_1, ..., \varphi_m)$ de manera que se satisfacen las siguientes condiciones.

(a) $U \times V \subset D$.

(b) $f_i(\mathbf{x}, \varphi_1(\mathbf{x}), ..., \varphi_m(\mathbf{x})) = 0$ *para* $i = 1, 2, ..., m$ *y para todo* $\mathbf{x} \in U$.

(c) $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$.

Caben aquí las mismas consideraciones que hicimos para el Teorema 15.

1.9. El Teorema de la Función Inversa

En esta sección veremos en que condiciones es posible hacer un cambio de coordenadas en $\mathbb{R}^n$. Hemos visto en capítulos anteriores como en $\mathbb{R}^2$ el cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas polares simplificaba el cálculo del límite de funciones. Además hemos visto como hacer un cambio de coordenadas en funciones de varias variables y su comportamiento en relación a la derivación con la regla de la cadena. Para que el cambio de coordenas esté bien realizado no podemos asignar nada más que una coordenada cada punto de $\mathbb{R}^n$. El siguiente Teorema, conocido con el nombre de *Teorema de la función inversa* nos dice cuando eso es posible.

Theorem 17 *Sean* D *un abierto de* $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una función de clase* $C^k(D, \mathbb{R}^n)$. *Sea* $\mathbf{a} \in D$ *de manera que* $|J\mathbf{f}(\mathbf{a})| \neq 0$. *Entonces existen dos abiertos* U *y* V *de* $\mathbb{R}^n$ *con* $\mathbf{a} \in U$ *y* $\mathbf{f}(\mathbf{a}) \in V$ *de manera que* $\mathbf{f} : U \to V$ *es biyectiva y tiene una función inversa* $\mathbf{f}^{-1} : V \to U$ *de clase* $C^k(V, U)$ *de manera que*

$$J\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}) = J\mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x})) \text{ para todo } \mathbf{x} \in V.$$

Por ejemplo, aplicando este Teorema a la función de $\mathbb{R}^2$

$$f(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi),$$

vemos que esta función admite inversa siempre que r sea distinto de cero, con lo que el cambio a coordenadas polares siempre puede hacerse en todo punto salvo en el origen de coordenadas.

1.10. ACTIVIDADES

Exercise 1.10.1 *Calcular el polinomio de Taylor en* $(0, 0)$ *y en* $(1, 0)$ *hasta orden 3 de las siguientes funciones:*

(a) $f(x,y) = \log(1+x+y)$.

(b) $f(x,y) = e^x \sin y$.

(c) $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$.

Exercise 1.10.2 *Comprobar que la ecuación* $x^2+xy+y^3-11=0$ *define a* y *como función implícita de* x *en un abierto del punto* $x=1$ *en el cual toma el valor* $y=2$*. Calcular la primera y segunda derivada de dicha función en el punto* $x=1$*.*

Exercise 1.10.3 *Idem para la ecuación* $\sin x + \cos y - 1 = 0$ *en el punto* $x=\pi/2$ *e* $y=\pi/2$*. Obtener su polinomio de Taylor de grado 3 en el punto* $x=\pi/2$*.*

Exercise 1.10.4 *Idem para la ecuación* $e^x + \tan y - 1 = 0$ *en el punto* $x=0$ *e* $y=0$*. Obtener su polinomio de Taylor de grado 3 en el punto* $x=0$*.*

Exercise 1.10.5 *Comprobar que la ecuación* $x^2+y^2+z^2=49$ *define a* z *como función implícita de* x *e* y *en un abierto del punto* $(6,-3)$ *en el cual toma el valor* $z=-2$*. Obtener su desarrollo de Taylor en el punto* $(x,y)=(6,-3)$*.*

Exercise 1.10.6 *Idem con la ecuación* $xye^z + z\cos(x^2+y^2) = 0$ *en el punto* $(x,y)=(0,0)$ *con el valor de* $z=0$*.*

Exercise 1.10.7 *Comprobar que el sistema de ecuaciones*

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x-y-2xz=0 \end{array}\right.$$

define a (x,y) *como funciones implícitas de* z *en un abierto del punto* $z=0$ *con los valores* $(x,y)=(0,0)$*. Calcular las derivadas primeras y segundas de dicha función en el punto considerado.*

Exercise 1.10.8 *Comprobar que el sistema de ecuaciones*

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y-z^2-t^2=0 \\ x^2-y-z^2-t=0 \end{array}\right.$$

define a (z,t) *como funciones implícitas de* (x,y) *en un abierto del punto* $(x,y)=(2,1)$ *con los valores* $(z,t)=(1,2)$*. Calcular las derivadas parciales primeras y segundas de dicha función en el punto considerado.*

Exercise 1.10.9 *Idem para el sistema*

$$\begin{cases} xe^t + yz - z^2 = 0 \\ y\cos t + x^2 - z^2 = 1 \end{cases}$$

en el punto $(x, y) = (2, 1)$ *y* $(z, t) = (2, 0)$.

Exercise 1.10.10 *Estudiar si el sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 20 \\ x - xy + z = 4 \end{cases}$$

define a dos cualesquiera variables como función implícita de la tercera con los valores de la terna $(0, 2, 4)$. *Calcular las derivadas parciales primeras y segundas de dichas funciones en el punto considerado.*

Exercise 1.10.11 *Estudiar la existencia de función inversa de la aplicación* $\overrightarrow{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$\overrightarrow{f}(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

Exercise 1.10.12 *Idem para la aplicación* $\overrightarrow{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$\overrightarrow{f}(x, y) = \left(x^2 - y^2, 2xy\right).$$

Exercise 1.10.13 *Idem para la aplicación* $\overrightarrow{f} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$\overrightarrow{f}(x, y) = \left(\frac{x^2}{1 - x^2 - y^2}, \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}\right)$$

donde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

Exercise 1.10.14 *Calcular el desarrollo de Taylor de grado dos en el punto* $(0, 0)$ *de la función*

$$f(x, y) = \int_0^{x+y} te^{t^2} dt.$$

Exercise 1.10.15 *Dada la ecuación* $F(x, y, z) = z^2 - 2yz + x - 1 = 0$ *se pide*

(a) *Estudiar cuando se puede aplicar el teorema de la función implícita a dicha ecuación* $F(x, y, z) = 0$ *en los puntos* $P = (1, 1, 0)$ *y* $Q = (2, 1, 1)$ *para definir* z *como función implícita de* x *e* y.

(b) *Calcular* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1, 1)$ *y* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2, 1)$ *cuando sea posible.*

Exercise 1.10.16 *Demostrar que la ecuación*

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2} + \sin z$$

define implícitamente a z *como función de* x *e* y *en el punto* $(1, 1, 0)$*. Calcula el desarrollo de Taylor de grado 1 de dicha función en el punto* $(1, 1)$*.*