Capítulo 1

LIMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

1.1. Función de Varias Variables

Por una *función de varias variables* entenderemos una función cuyo dominio de definición D es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y su rango está contenido en $\mathbb{R}^m$. La denotaremos como $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Si el rango de dicha función es un conjunto de $\mathbb{R}$, diremos que es una *función real de varias variables* y la denotaremos por $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Ejemplos de funciones reales de varias variables son $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (\sin(xy), x + y + \cos z)$$

o $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \cos(x^2 + y).$$

Una función siempre tiene que venir dada por su dominio y su descripción en un punto arbitrario de su dominio, como en los ejemplos que hemos considerado. Dada por ejemplo una expresión de la forma $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$, entenderemos que ésta es una función de varias variables cuyo dominio de definición es el mayor posible, es decir, todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ donde la expresión tiene sentido. En este caso será la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cuyo dominio de definición será

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\right\}.$$

Dada una función $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se definen las funciones coordenadas de ésta como las m funciones reales de varias variables $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de manera que para todo elemento $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se verifica

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})..., f_m(\mathbf{x})).$$

Por ejemplo la función $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (\sin(x + y), x - z, y^2 + z, x^2 + y^2 + z^2)$$

tiene por funciones coordenadas las funciones $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\begin{aligned}
f_1(x, y, z) &= \sin(x + y), \\
f_2(x, y, z) &= x - z, \\
f_3(x, y, z) &= y^2 + z, \\
f_4(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2.
\end{aligned}$$

Asimismo, se pueden hacer representaciones gráficas de funciones reales definidas sobre dominios de $\mathbb{R}^2$. Esto requiere el buen conocimiento de la gráfica de algunas funciones reales de variable real, así como la forma de las cónicas. En general el estudio de la representación gráfica se abordará durante las prácticas con ordenador, pero es interesante que el alumno aprenda a visualizar gráficas como la de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$, que se muestra en la figura 1.1, o la función $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ cuya representación gráfica se puede ver en la figura 1.2.

1.2. Límite de una Función de Varias Variables

Consideremos una función $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y denotemos por $\|\cdot\|_n$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y por $\|\cdot\|_m$ una norma en $\mathbb{R}^m$. Consideremos $\mathbf{x}_0$ un punto de acumulación de D y sea $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^m$.

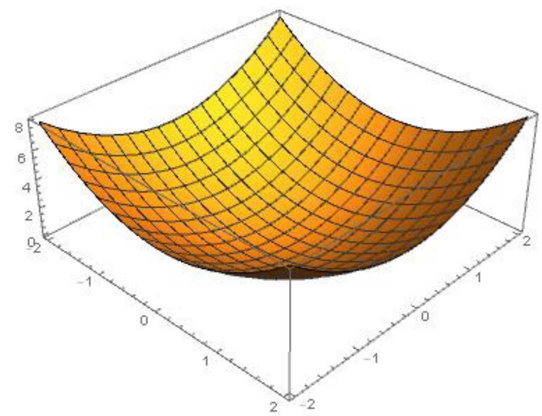

Figura 1.1: Gráfica de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ en el dominio $[-2,2] \times [-2,2]$.

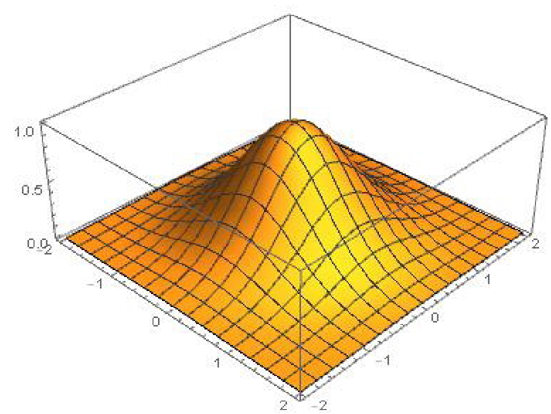

Figura 1.2: Gráfica de la función $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ en el dominio $[-2,2] \times [-2,2]$.

Definition 1 *Decimos que el* límite *cuando* $\mathbf{x}$ *tiende a* $\mathbf{x}_0$ *de la función* $\mathbf{f}$ *es* $\mathbf{l}$, *y lo denotaremos por* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{l}$,*cuando para todo número real* $\varepsilon>0$ *existe otro número real* $\delta>0$ *(que depende de* $\mathbf{x}_0$ *y* ε*) de manera que para todo* $\mathbf{x}\in D$ *verificando que* $\|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}\|_n<\delta$ *se cumple que* $\|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{l}\|_m<\varepsilon$.

La definición coincide por completo con la definición de límite de funciones reales de variable real cuando la función es $f:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Es indispensable que $\mathbf{x}_0$ sea un punto de acumulación de D para poder acercarnos a dicho punto por puntos de D todo lo que queramos.

En relación al límite de funciones de varias variables se estudiarán las siguientes propiedades.

Proposition 2 *El límite en caso de existir es único.*

La siguiente propiedad es importante porque permite reducir el cálculo de límites de funciones de varias variables al cálculo de límites de funciones reales de varias variables, hecho que será de gran utilidad en multitud de ejemplos prácticos.

Proposition 3 *Sea* $\mathbf{f}:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *con funciones coordenadas* $\mathbf{f}=(f_1,...,f_m)$. *Entonces*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{l}=(l_1,...,l_m)\Leftrightarrow\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}f_i(\mathbf{x})=l_i \text{ para todo } i=1,2,...,m.$$

Además se verifican las siguientes propiedades.

Proposition 4 *Sean* $\mathbf{f},\mathbf{g}:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *dos funciones de varias variables y* $\mathbf{x}_0$ *un punto de acumulación de* D. *Sean* $\mathbf{l}_1=\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *y* $\mathbf{l}_2=\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\mathbf{g}(\mathbf{x})$. *Entonces se verifican las siguientes igualdades:*

(a) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}(\alpha\mathbf{f}(\mathbf{x})+\beta\mathbf{g}(\mathbf{x}))=\alpha\mathbf{l}_1+\beta\mathbf{l}_2$ *para todo par de números reales* α *y* β.

(b) Si $m=1$ *entonces* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}f(\mathbf{x})\cdot g(\mathbf{x})=l_1\cdot l_2$.

(c) Si $m=1$ *y* $l_2\neq 0$, *entonces* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})=l_1/l_2$.

Todos estos resultados ayudan en gran medida al cálculo del límite, pero a la hora de abordar el cálculo práctico de éste necesitamos introducir nuevos conceptos. Vamos a continuación a centrarnos en el cálculo de límites de funciones reales definidas sobre un dominio de $\mathbb{R}^2$.

1.2.1. Cálculo práctico del límite

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función y (x_0, y_0) un punto de acumulación de D. Haciendo un cambio de coordenadas en las variables x e y podemos suponer que $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Para proceder al cálculo del límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$$

podemos proceder de dos maneras. Usando la definición o intentando reducir el problema al cálculo de límites de funciones reales de variable real. La primera manera suele ser difícil de aplicar además de necesitar un número real l que sea candidato a límite. Vamos a empezar a dar técnicas para reducir el problema al cálculo de límites de funciones de variable real. Empezaremos por los *límites iterados*.

Límites Iterados. Son dos límites obtenidos de la siguiente forma. Hacemos primero el límite de la función cuando x tiende a cero, y obtenemos así una función que depende de y. A continuación calculamos el límite de dicha función cuando y tiende a cero obteniendo el primer límite iterado. Intercambiando el orden de los límites se obtiene el segundo límite iterado. Esquemáticamente el proceso se puede escribir como

$$\begin{aligned} \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x, y)\right) &= l_{12}, \\ \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x, y)\right) &= l_{21}. \end{aligned}$$

Si existe el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = l$, entonces los límites iterados son iguales y coinciden con éste. Así en caso de no ser iguales los límites iterados se tendría la no existencia del límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

De la igualdad de los límites iterados no podrá extraerse nunca la existencia del límite de la función en dicho punto. Tendríamos entonces un candidato a límite de la función en dicho punto con el que aplicar la definición.

Límites Direccionales. Consideremos una función $y = g(x)$ de manera que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Se define el *límite direccional a lo largo de g* como

$$\lim_{x\to 0} f(x, g(x)) = l_g.$$

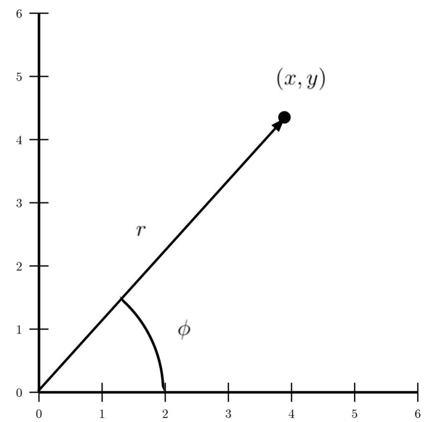

Figura 1.3: Coordenadas polares.

En caso de que exista el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$ se verifica que $l = l_g$ para toda función g satisfaciendo las condiciones anteriores. En caso de encontrar dos funciones de manera que los límites direccionales no coincidan, tendríamos que el límite de la función en $(0,0)$ no existiría. En general suelen considerarse familias de funciones de la forma $y = mx$ o $y = mx^2$, con m un número real, para calcular límites direccionales.

Paso a Coordenadas Polares. En general, la única manera que tenemos de calcular un límite de la forma $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ sin tener de acudir a la definición del mismo es mediante el paso a coordenadas polares. Las coordenadas polares consiste en asignar a cada punto (x,y) salvo el $(0,0)$ unas nuevas coordenadas que son el radio de dicho vector, y el ángulo que forma con el eje x, como se aprecia en la figura 1.3.

La relación entre las coordenadas cartesianas y las polares vienen dadas por la relación

$$\begin{cases} x = r\cos\phi, \\ y = r\sin\phi. \end{cases}$$

Así la función considerada $f(x,y)$ puede tener una expresión en coordenadas polares de la forma

$$f(r,\phi) = f(r\cos\phi, r\sin\phi).$$

La siguiente proposición nos muestra como obtener un límite mediante el uso de coordenadas polares.

Proposition 5 *Sean $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $(0,0)$ un punto de acumulación de D. Supongamos que $|f(r,\phi) - l| \leq F(r)$ donde $F(r)$ es una función real de variable real satisfaciendo que $\lim_{r\to 0} F(r) = 0$ y que $\lim_{r\to 0} f(r,\phi)$ no depende del ángulo ϕ. Entonces*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l \Leftrightarrow \lim_{r\to 0} f(r,\phi) = l.$$

Así para calcular el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

procederíamos de la siguiente manera. Primero calcularíamos los límites iterados, que en este caso dan ambos cero. En caso de no ser iguales obtendríamos la no existencia del límite. Posteriormente podemos estudiar algunos límites direccionales, y en caso de ser alguno distinto de cero tendríamos la no existencia del límite. En este ejemplo no ocurre esto y todo los límites direccionales dan cero. Finalmente aplicaríamos la Proposición 5 y calcularíamos

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3 \cos^2\phi \sin\phi}{r^2} = 0,$$

y como

$$\left| \frac{r^3 \cos^2\phi \sin\phi}{r^2} \right| \leq r,$$

tendríamos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0.$$

1.3. Continuidad de Funciones de Varias Variables

Definition 6 *Sean ahora una función $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{x}_0 \in D$. $\mathbf{f}$ es continua en el punto $\mathbf{x}_0$ si existe el límite*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Si $\mathbf{f}$ es continua en $\mathbf{x}_0$ para todo punto $\mathbf{x}_0 \in D$ la función $\mathbf{f}$ se dice continua en D.

La definición coincide con la continuidad de funciones reales de variable real. Se deduce de la Proposición 3 el siguiente resultado.

Proposition 7 *Sea* $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *con funciones coordenadas* $\mathbf{f} = (f_1, ..., f_m)$*. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

(a) $\mathbf{f}$ *es continua en un punto* $\mathbf{x}_0 \in D$ *si y sólo si cada función* f_i *es continua en* $\mathbf{x}_0$ *para* $i = 1, 2, ..., m$*.*

(b) $\mathbf{f}$ *es continua en* D *si y sólo si cada función* f_i *es continua en* D *para* $i = 1, 2, ..., m$*.*

De la Proposición 4 se deducen las siguientes propiedades de las funciones continuas.

Proposition 8 *Sean* $\mathbf{f}, \mathbf{g} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *funciones de varias variables continuas en* $\mathbf{x}_0$ *(respectivamente en* D*). Entonces se verifican las siguientes propiedades:*

(a) La función $\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g}$ *es continua en* $\vec{x}_0$ *(respectivamente en* D*) para todo par de números reales* α *y* β*.*

(b) Si $m = 1$*, entonces la función producto* $f \cdot g$ *es continua en* $\mathbf{x}_0$ *(respectivamente en* D*).*

(c) Si $m = 1$ *y* $g(\mathbf{x}) \neq 0$ *para todo punto de* D*, entonces la función cociente* f/g *es continua en* $\mathbf{x}_0$ *(respectivamente en* D*).*

Consideremos dos funciones $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{g} : D' \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ de manera que la imagen de $\mathbf{f}$ está contenida en D'. Podemos definir la función compuesta $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ dada por $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ para todo $\mathbf{x} \in D$. Con respecto a su continuidad tenemos la siguiente proposición.

Proposition 9 *En las condiciones anteriores, si* $\mathbf{f}$ *es continua en* $\mathbf{x}_0 \in D$ *y* $\mathbf{g}$ *es continua en* $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$*, entonces se verifica que* $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ *es continua en* $\mathbf{x}_0$*. Si* $\mathbf{f}$ *es continua en* D *y* $\mathbf{g}$ *es continua en* D'*, entonces* $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ *es continua en* D*.*

El cálculo práctico de la continuidad de agiliza bastante con éstas proposiciones. No obstante nosotros nos plantearemos el estudio de funciones de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ fundamentalmente. Para la verificación de la continuidad de una función hemos de remitirnos al cálculo de límites de funciones estudiado en la sección anterior.

1.4. ACTIVIDADES

Exercise 1.4.1 *Calcular el máximo dominio de definición de las funciones siguientes:*

(a) $f(x,y) = \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$.

(b) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$.

(c) $\overrightarrow{f}(x,y) = \left(\frac{xy}{x^2+y^2-1}, \frac{xy}{x^2+y^2-4}\right)$.

(d) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$.

(e) $\overrightarrow{f}(x,y,z) = \left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2-4}, \log\left(x^2+y^2+z^2-1\right)\right)$.

Exercise 1.4.2 *Estudiar la existencia del límite en el punto* $(0,0)$ *de la función* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}.$$

Exercise 1.4.3 *Estudiar la existencia del límite en el punto* $(0,0)$ *de la función* $\overrightarrow{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$\overrightarrow{f}(x,y) = \left(x+y^2, \frac{xy}{x^2+y^2}\right).$$

Exercise 1.4.4 *Estudiar la existencia del límite en el punto* $(0,0)$ *de la función* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x,y) = \frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Exercise 1.4.5 *Estudiar la existencia del límite en el punto* $(0,0)$ *de la función* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x,y) = \frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Exercise 1.4.6 *Estudiar la existencia del límite en el punto* $(0,0)$ *de la función* $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x,y)=\frac{2x^5+2y^3\left(2x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Exercise 1.4.7 *Estudiar la existencia del límite en el punto* $(0,0)$ *de la función* $\overrightarrow{f}:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^3$ *dada por*

$$\overrightarrow{f}(x,y)=\left(xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},xy,\sqrt{|xyz|}\right).$$

Exercise 1.4.8 *Estudiar la existencia del límite en el punto* $(0,0)$ *de la función* $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x,y)=\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}.$$

Exercise 1.4.9 *Estudiar la existencia del límite en el punto* $(0,0)$ *de la función* $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$

Exercise 1.4.10 *Estudiar la existencia del límite en el punto* $(0,0)$ *de la función* $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+y^4}.$$

Exercise 1.4.11 *Estudiar la existencia del límite en el punto* $(0,0)$ *de la función* $\overrightarrow{f}:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}^2$ *dada por*

$$\overrightarrow{f}(x,y)=\left(\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2},\sin\left(\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}\right)\right).$$

Exercise 1.4.12 *Dadas las funciones*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2-y^2} & si\ |x|\neq|y|,\\ 0 & si\ |x|=|y|,\end{cases}$$

y

$$g(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+x^2y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

se pide:

(a) *Hallar* $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$ *en los siguientes casos:* $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{k}{n}\right)$ *y* $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$ *, donde* k *es un número real.*

(b) *¿Existe* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ *?*

(c) *Comprobar si* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0$.

Exercise 1.4.13 *Estudiar la continuidad de la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercise 1.4.14 *¿Es posible definir las funciones de los ejercicios 1.4.2, 1.4.3, 1.4.4, 1.4.5, 1.4.6, 1.4.7, 1.4.8, 1.4.9, 1.4.10 y 1.4.11 de manera que éstas sean continuas?*

Exercise 1.4.15 *Estudiar la continuidad de las siguientes funciones*

$$\begin{aligned} (a)\ f(x,y) &= \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases} \\ (b)\ f(x,y) &= \begin{cases} \left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}, \sin(xy)\right) & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ (0,0) & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases} \\ (c)\ f(x,y) &= \begin{cases} \frac{\sin xy}{x} & si\ x \neq 0, \\ y & si\ (x,y) = (0,y). \end{cases} \end{aligned}$$

Exercise 1.4.16 *¿Qué tiene que valer el número real* k *para que la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ k & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

sea continua?

Exercise 1.4.17 *¿Qué tiene que valer el número real* k *para que la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ k & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

sea continua?

Exercise 1.4.18 *Estudiar la continuidad en el punto* $(0,0)$ *de la función*

$$f(x,y) = \begin{array}{ll} x + x^2y^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right) & si\ (x,y) \neq (0,y), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,y). \end{array}$$

Exercise 1.4.19 *Sea la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(x-y)}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de dicha función en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

Exercise 1.4.20 *Determinar si la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & si\ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua.

Exercise 1.4.21 *Consideramos la función:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \mathit{0} & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de dicha función.

Exercise 1.4.22 *Dada la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln\left(1+x^2y^2\right)}{x^4+2x^2y^2+y^4} & si\ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

analizar la continuidad de la función.

Exercise 1.4.23 *Sea la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

con α *un número natural. Estudiar para los valores de* $\alpha = 3$ *y* 4 *la continuidad de dicha función.*