Capítulo 1

NOCIONES DE TOPOLOGIA EN $\mathbb{R}^n$

1.1. Definición de Norma y Espacio Normado

Vamos a centrarnos en el conjunto $\mathbb{R}^n$ en general, y en los conjuntos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ en particular. Una *norma* en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

de manera que se satisfacen las siguientes condiciones para todo par de vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y para todo número real α.

(N1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ y $\|\mathbf{x}\| = 0$ si y solo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(N2) $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \, \|\mathbf{x}\|$.

(N3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Al par $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ se le denomina *espacio vectorial normado* $\mathbb{R}^n$. Veamos a continuación algunos ejemplos de normas.

Example 1 *Si consideramos el conjunto* $\mathbb{R}$ *y el valor absoluto* $|\cdot|$, *es fácil comprobar que dicho valor absoluto es una norma. Así,* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *es un espacio vectorial normado.*

Example 2 *Veamos algunos ejemplos de normas en $\mathbb{R}^n$. El primer ejemplo que vamos a considerar es*

$$\|(x_1, ..., x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2},$$

que es la norma euclídea, estudiada en la parte de álgebra lineal, y que proviene de un producto escalar. En general, esta será la norma que utilizaremos más frecuentemente, por lo que la denotaremos usualmente como $\|(x_1, ..., x_n)\|$ en vez de $\|(x_1, ..., x_n)\|_2$. Además, es posible encontrar más normas en el espacio $\mathbb{R}^n$, como pondremos de manifiesto a continuación.

Example 3 *Un segundo ejemplo de norma en $\mathbb{R}^n$ es*

$$\|(x_1, ..., x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, ...|x_n|\}.$$

El tercer ejemplo que vamos a considerar es

$$\|(x_1, ..., x_n)\|_1 = |x_1| + ... + |x_n|.$$

Es fácil comprobar que esta tres aplicaciones son normas de $\mathbb{R}^n$. Es interesante para el alumno que compruebe las propiedades de norma para cada una de las normas consideradas.

Las tres normas, y cualquier otra que pudiésemos considerar en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes en el siguiente sentido: dada una norma $\|\cdot\|$ de $\mathbb{R}^n$, siempre existen números reales positivos α,β tales que para todo elemento $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ se verifica:

$$\alpha \|(x_1, ..., x_n)\|_2 \leq \|(x_1, ..., x_n)\| \leq \beta \|(x_1, ..., x_n)\|_2 .$$

Esto implica que a la hora de dar las definiciones de continuidad y diferenciabilidad de funciones de varias variables, es irrelevante la norma que tomemos para dar dichas definiciones. Asimismo, eligiendo normas adecuadas, pueden simplificarse algunos problemas prácticos notablemente.

1.2. Nociones de Topología

La noción de norma permite definir distancias en $\mathbb{R}^n$. Dada una norma $\|\cdot\|$ de $\mathbb{R}^n$ y dos puntos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, se define la distancia de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ como

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| .$$

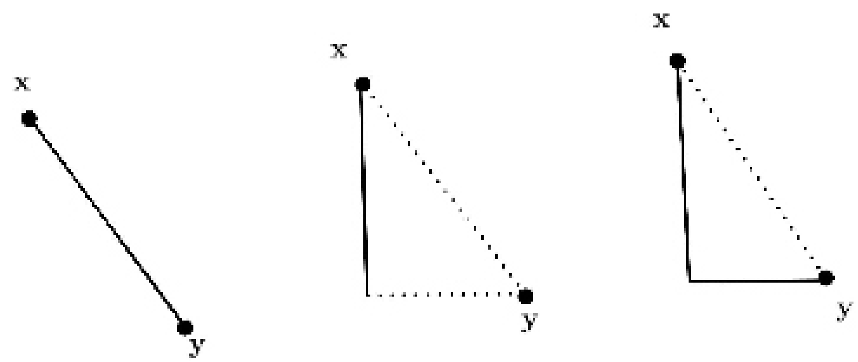

Figura 1.1: Distancia entre los puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en el plano para las distancias definidas a partir de la norma euclídea (izquierda), $|| \cdot ||_\infty$ (centro) y $|| \cdot ||_1$ (derecha). La distancia aparece representada por la línea continua.

Obviamente, la definición de distancia depende de la norma implicada. En la figura 1.1 vemos gráficamente la distancia en el caso de las tres normas mencionadas anteriormente en el caso del plano $\mathbb{R}^2$.

Las distancias satisfacen las siguientes propiedades heredadas de las propiedades de la norma. Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que:

(D1) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ y $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ si y solo si $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

(D2) Propiedad simétrica $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

(D3) Desigualdad triangular $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$.

En general, toda función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ es una distancia si se verifican las tres propiedades anteriores. Un espacio se dice métrico si existe una métrica d definido sobre él. Nosotros vamos a trabajar fundamentalmente con la distancia definida por la norma euclídea.

El concepto básico que permite desarrollar la topología de $\mathbb{R}^n$ es el de bola abierta. Supongamos una distancia d en $\mathbb{R}^n$ y fijemos un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y un número real positivo $\varepsilon > 0$, se define la *bola abierta de centro* $\mathbf{x}_0$ *y radio* ε como el conjunto

$$B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) < \varepsilon\}.$$

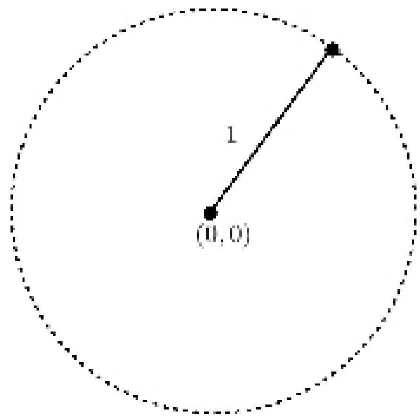

Figura 1.2: Bola abierta de centro $(0,0)$ y radio 1 en la norma euclídea. Nótese que el borde del círculo dado por la ecuación $x^2+y^2=1$ no pertenece al conjunto.

En caso de tener la desigualdad $\leq$ en el conjunto anterior tenemos la *bola cerrada de centro* $\mathbf{x}_0$ *y radio* ε

$$\overline{B}(\mathbf{x}_0,\varepsilon)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}_0,\mathbf{x})\leq\varepsilon\}\,.$$

En caso de que la distancia venga dada por una norma, como por ejemplo la norma euclídea, estos conjuntos pueden escribirse como

$$B(\mathbf{x}_0,\varepsilon)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n : ||\mathbf{x}_0-\mathbf{x}||<\varepsilon\}$$

y

$$\overline{B}(\mathbf{x}_0,\varepsilon)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n : ||\mathbf{x}_0-\mathbf{x}||\leq\varepsilon\}\,.$$

Veamos el aspecto que tienen las bolas abiertas de radio 1 y centro $(0,0)\in\mathbb{R}^2$ en las tres normas que hemos definido anteriormente. En la norma euclídea $\|\cdot\|_2$, tendremos el conjunto

$$B((0,0),1)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2}<1\right\},$$

que geométricamente tiene el siguiente aspecto que se muestra en la figura 1.2.

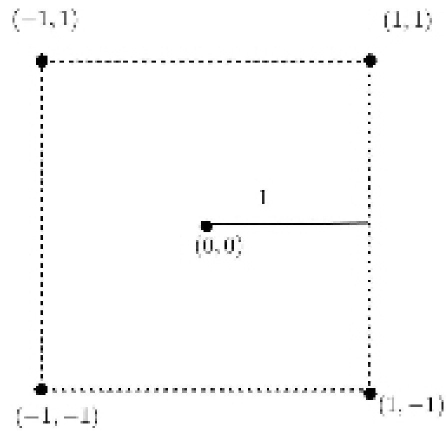

Figura 1.3: Bola abierta de centro $(0,0)$ y radio 1 en la distancia dada por la norma $||\cdot||_\infty$. De nuevo, el borde deliminado por la línea punteada no entra dentro del conjunto.

sin incluir el borde o frontera determinado por la ecuación $x^2+y^2=1$.

En la norma $\|\cdot\|_\infty$, la bola

$$B((0,0),1)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \text{máx}\{|x|,|y|\}<1\right\},$$

tiene la forma mostrada en la figura 1.3.

Finalmente en la distancia construida a partie de la norma $\|\cdot\|_1$ la bola

$$B_1((0,0),1)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|<1\right\},$$

es de la forma mostrada en la figura 1.4.

1.3. Conjuntos abiertos y cerrados

Un conjunto $A\subseteq\mathbb{R}^n$ se dice *abierto* si para para todo punto $\mathbf{x}\in A$ existe un número real positivo $\varepsilon>0$ de manera que la bola abierta $B(\mathbf{x},\varepsilon)$ está contenido completamente en A. Un conjunto $C\subseteq\mathbb{R}^n$ se dice *cerrado* si su conjunto complementario

$$C^c=\mathbb{R}^n\setminus C=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n : \mathbf{x}\notin C\}$$

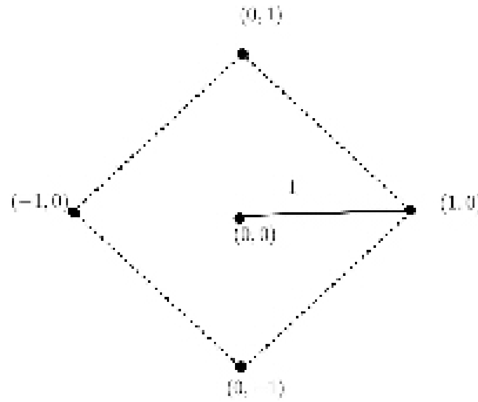

Figura 1.4: Bola abierta de centro $(0,0)$ y radio 1 en la distancia definida por la norma $||\cdot||_1$. El borde de la figura marcado en línea discontinua no pertenece al conjunto.

es abierto. En particular, toda bola abierta es un conjunto abierto y toda bola cerrada es un conjunto cerrado. A modo de ejemplo, el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x+y < 1\}$$

será abierto, el conjunto

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x+y \leq 1\}$$

será cerrado, y el conjunto

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x+y \leq 1\}$$

no es ni abierto ni cerrado.

Dado $D \subseteq \mathbb{R}^n$, no necesariamente abierto ni cerrado, se define el *interior* del mismo, y se denotará $\mathrm{Int}(D)$, como el mayor abierto contenido en D. Asímismo, se define la *clausura* de D, denotada $\mathrm{Cl}(D)$, como el menor cerrado conteniendo a D. Finalmente, definimos la *frontera* de D como $\mathrm{Fr}(D) = \mathrm{Cl}(D) \setminus \mathrm{Int}(D)$. En general, vamos a utilizar conjuntos donde la frontera vendrá determinada por la curvas (en $\mathbb{R}^2$) o superficies (en $\mathbb{R}^3$) que encierran al conjunto. El interior es el conjunto excluyendo la frontera y la clausura será el conjunto junto con la frontera.

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice *acotado* si existe un número real positivo K de manera que $d(0,\mathbf{x}) \leq K$ para todo punto $\mathbf{x} \in A$.

Un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice *compacto* si es cerrado y acotado.

Sea un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se dice que un punto $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de acumulación* de A cuando para todo número real $\varepsilon > 0$ el conjunto $B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \cap A$ tiene infinitos elementos. Los puntos de acumulación son aquellos sobre los que posteriormente podremos calcular límites de funciones de varias variables. Si el conjunto A es abierto, todo punto de A es de acumulación.

1.4. ACTIVIDADES

Exercise 1.4.1 *Demostrar que los siguientes conjuntos de* $\mathbb{R}^2$ *son abiertos:*

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

(b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1\}$.

(c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0\}$.

(d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1/x > 1\}$.

Exercise 1.4.2 *Demostrar que los siguientes conjuntos de* $\mathbb{R}^2$ *son cerrados:*

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1\}$.

(b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2\}$.

(c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1/x \leq 1\}$.

Exercise 1.4.3 *Calcular los puntos de acumulación de los conjuntos de las actividades 1.4.1 y 1.4.2.*

Exercise 1.4.4 *Calcular el interior, la clausura y la forntera de los conjuntos de las actividades 1.4.1 y 1.4.2.*

Exercise 1.4.5 *Decir cuales de los siguientes conjuntos de* $\mathbb{R}^2$ *son abiertos o cerrados y calcular sus puntos de acumulación.*

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 > 1\}$.

(b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \geq 2\}$.

(c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{máx}\{|x|, |y|\} \leq 1\}$.

Exercise 1.4.6 *En $\mathbb{R}^n$ se define: $||\mathbf{x}|| = \frac{1}{k}(|x_1| + ... + |x_n|)$, donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $k > 0$. Probar que:*

(a) Es una norma.

(b) Es equivalente con la norma euclídea.

(c) Dibujar la bola abierta centrada en el origen con radio $2K$.

Exercise 1.4.7 *Sea X un espacio vectorial, por ejemplo $X = \mathbb{R}^n$. Definimos la aplicación $\varphi : X \to \mathbb{R}$ como $\varphi(\mathbf{0}) = 0$ y $\varphi(\mathbf{x}) = 1$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. ¿Es φ una norma?*

Exercise 1.4.8 *Dado un conjunto arbitrario X, para todo $x, y \in X$ se define la métrica discreta como: $d(x, y) = 0$ si $x = y$, $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$. Se pide:*

(a) Probar que es, en efecto, una distancia.

(b) Encontrar las bolas abiertas y cerradas de radios 1/2, 1 y 2.

Exercise 1.4.9 *Sea $(\mathbb{R}^n, d)$ un espacio métrico cualquiera. A partir de la distancia d, se define la aplicación*

$$\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{1 + d(\mathbf{x}, \mathbf{y})},$$

para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Probar que es tambi en una métrica o distancia en $\mathbb{R}^n$. (Indicación: Observar que la función real $f(x) = x/(1 + x)$ es estrictamente creciente para $x > 0$ y use, tras su pertinente comprobación, que

$$\frac{a + b}{1 + a + b} \leq \frac{1}{1 + a} + \frac{b}{1 + b}$$

para todo $a, b > 0$).

Exercise 1.4.10 *Demostrar si los siguientes conjuntos son cerrados o abiertos en $\mathbb{R}^2$. Al mismo tiempo, calcular el interior, la clausura, la frontera y los puntos de acumulaci on de cada uno de ellos:*

(a) $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1\}$.

(b) $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x + y < 1\}$.

(c) $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{xy} > 1\}$.

(d) $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \sqrt{1 - x - y}\}$.

(e) $A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0,\ |x| + y \geq 0\}$.

(f) $A_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$.

(g) $A_7 = [0, 1) \times (-1, 1]$.

Exercise 1.4.11 *Indicar cuáles de los siguientes conjuntos son abiertos o cerrados (consideramos cualquiera de las normas equivalentes), o ninguna de las dos cosas, y calcular su frontera y sus puntos de acumulación:*

(a) $B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 > 1\}$.

(b) $B_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

(c) $B_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq 2\}$.

(d) $B_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{máx}\{|x|, |y|\} \leq 1\}$.

(e) $B_5 = \{x \in \mathbb{R} : x = 1 + \frac{1}{m},\ \textit{con}\ m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0\}$.

Exercise 1.4.12 *En* $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||)$ *, consideramos dos conjuntos compactos y disjuntos (sin intersección común)* K_1 *y* K_2 *. ¿Es compacta la unión* $K_1 \cup K_2$*?*