Cálculo 2
Grado en Ingeniería de datos - Ejercicio 1
Fecha de Entrega: 11-3-2025

Apellidos y Nombre:

DNI/NIE: | | | | | | | | | |

$$\underbrace{\square}_{A}\ \underbrace{\square}_{B}\ \underbrace{\square}_{C}\ \underbrace{\square}_{D}\ \underbrace{\square}_{E}\ \underbrace{\square}_{F}$$

A modo de ejemplo, si se tratase del DNI 22987654V, se tendrían los valores

$$A = 9, \quad B = 8, \quad C = 7, \quad D = 6, \quad E = 5, \quad F = 4.$$

En cada ejercicio propuesto se realizará el que corresponda con el valor de que se haya obtenido con el DNI. Por ejemplo, con este DNI/NIF se haría el ejercicio A.9 del listado.

A. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales que corresponda:

$$\text{A.0}\begin{cases} x' = -9x - 24y + t, \\ y' = x + y + e^t \cos t, \\ x(0) = 1,\ y(0) = -1. \end{cases} \qquad \text{A.1}\begin{cases} x' = -7x - 8y + t^2, \\ y' = x - y + \cos t, \\ x(0) = 1,\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$\text{A.2}\begin{cases} x' = -10x - 35y + t, \\ y' = x + 2y + e^t t, \\ x(0) = -1,\ y(0) = -1. \end{cases} \qquad \text{A.3}\begin{cases} x' = -6x - 3y + t + 1, \\ y' = x - 2y + e^{-t} \sin t, \\ x(0) = 1,\ y(0) = -1. \end{cases}$$

$$\text{A.4}\begin{cases} x' = -8x - 15y + t - \sin t, \\ y' = x + e^t t, \\ x(0) = 1,\ y(0) = 2. \end{cases} \qquad \text{A.5}\begin{cases} x' = -12x - 63y, \\ y' = x + 4y + 1 + e^t \cos t, \\ x(0) = -1,\ y(0) = -1. \end{cases}$$

$$\text{A.6}\begin{cases} x' = -11x - 48y - 4t, \\ y' = x + 3y + 4\cos t, \\ x(0) = 2,\ y(0) = -1. \end{cases} \qquad \text{A.7}\begin{cases} x' = -10x - 35y + t, \\ y' = x + 2y + e^t + \cos t, \\ x(0) = 1,\ y(0) = -1. \end{cases}$$

$$\text{A.8}\begin{cases} x' = -4x + y - 1, \\ y' = x + -4y + e^{2t} \cos(3t), \\ x(0) = 1,\ y(0) = -1. \end{cases} \qquad \text{A.9}\begin{cases} x' = -6x - 3y + te^t, \\ y' = x - 2y + 3t, \\ x(0) = 2,\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Solución. Se supondrá que en Phyton se han cargado e introducido todos los paquetes y variables necesarias para resolver el problema. En esta resolución tomamos un problema genérico de la forma

$$\begin{cases} x' = ax + by + f(t), \\ y' = x + cy + g(t), \\ x(0) = e,\ y(0) = f. \end{cases}$$

Cada alumno debe cambiarlos por sus datos. Transformamos el sistema a

$$\begin{cases} z\mathcal{L}[x](z) - e = a\mathcal{L}[x](z) + b\mathcal{L}[y](z) + \mathcal{L}[f](z), \\ z\mathcal{L}[y](z) - f = \mathcal{L}[x](z) + c\mathcal{L}[y](z) + \mathcal{L}[g](z). \end{cases}$$

Las transformadas $\mathcal{L}[f](z)$ se calculan tecleando

laplace_transform(f(t),t,z,noconds=True).

Definiendo X e Y para las transformadas de x e y, definimos las ecuaciones

eq1=(z-a)*X-b*Y-e-$\mathcal{L}[f](z)$
eq2=(z-c)*Y-X-f-$\mathcal{L}[g](z)$,

y tecleamos

solve([eq1,eq2],[X,Y])

para obtener las soluciones de la forma

X=$P_1(z)/Q_1(z)$
Y=$P_2(z)/Q_2(z)$,

donde P_i y Q_i son polinomios de forma que el grado de P_i es menor que el de Q_i, $i = 1, 2$. Tecleamos

inverse_laplace_transform($P_1(z)/Q_1(z)$,z,t)

y

inverse_laplace_transform($P_2(z)/Q_2(z)$,z,t)

para calcular $x(t)$ e $y(t)$.

B. Se considera la ecuación
$$y^{3)} + (B+1)y'' + 5y' + 2y = f(t),$$
donde B se obtiene con el DNI/NIF. Probar que el sistema es asintóticamente estable y encontrar la solución en régimen estacionario si $f(t)$ es la función 4-periódica tal que $f(t) = t^3 - (A+1)t$ para $t \in (-2,2)$, donde A se obtiene con el DNI/NIF. Para ello se deben usar aproximaciones con series de Fourier de órdenes $n = 1,\ 3$ y 5. Representar conjuntamente las tres soluciones en un intervalo adecuado y explicar los resultados obtenidos.

Solución. Se supondrá que en Phyton se han cargado e introducido todos los paquetes y variables necesarias para resolver el problema. En esta resolución cada alumno debe de cambiar los valores de A y B por los que le correspondan. Usando la transformada de Laplace transformamos la ecuación diferencial en la ecuación algebraica
$$\left(z^3 + (B+1)z^2 + 5z + 2\right)\mathcal{L}[y](z) = \mathcal{L}[f](z),$$
de donde
$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{1}{z^3 + (B+1)z^2 + 5z + 2}\mathcal{L}[f](z),$$
y la función de transferencia es
$$T(z) = \frac{1}{z^3 + (B+1)z^2 + 5z + 2}.$$
Para ver si el sistema es asíntoticamente estable tecleamos
$$\text{solve}(z**3 + (B+1)*z**2 + 5*z + 2{,}0, z)$$
y nos da las soluciones en función de B. Para todo $B \in \{0, ..., 9\}$ se cumple que las raíces tienen parte real negativa, por lo que el sistema es asintóticamente estable, Para obtener las soluciones en el régimen estacionario tecleamos

```
sf=fourier_series(t**3-(A+1)*t, (t, -2, 2))
```

y para cada una de las aproximaciones pedidas

```
s1 = sf.truncate(n=1)
s2 = sf.truncate(n=3)
s3 = sf.truncate(n=5).
```

Estas funciones deben de tener una expresión de la forma
$$\begin{aligned}
s1 &= a_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), \\
s2 &= a_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + a_2 \sin(\pi t) + a_3 \sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right), \\
s3 &= a_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + a_2 \sin(\pi t) + a_3 \sin\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + a_3 \sin(2\pi t) + a_5 \sin\left(\frac{5\pi}{2}t\right),
\end{aligned}$$
donde a_i, $1 \le i \le 5$, dependen de los valores de A.

A continuación definimos la función de transferencia

```
def T(z):
    return 1/(z**3+(B+1)*z**2+5*z+2)
```

A partir de aquí obtenermos las soluciones tecleando
$$sol1 = a_1 * absT(I*pi/2) * \sin(pi*t/2 + \arg T(I*pi/2)),$$
$$\begin{aligned}
sol2 = {} & a_1 * absT(I*pi/2) * \sin(pi*t/2 + \arg T(I*pi/2)) \\
& + a_2 * absT(I*pi) * \sin(pi*t + \arg T(I*pi)) \\
& + a_3 * absT(3*I*pi/2) * \sin(3*pi*t/2 + \arg T(3*I*pi/2)),
\end{aligned}$$
y
$$\begin{aligned}
sol3 = {} & a_1 * absT(I*pi/2) * \sin(pi*t/2 + \arg T(I*pi/2)) \\
& + a_2 * absT(I*pi) * \sin(pi*t + \arg T(I*pi)) \\
& + a_3 * absT(3*I*pi/2) * \sin(3*pi*t/2 + \arg T(3*I*pi/2)) \\
& + a_4 * absT(2*I*pi) * \sin(2*pi*t + \arg T(I*pi)) \\
& + a_5 * absT(5*I*pi/2) * \sin(5*pi*t/2 + \arg T(5*I*pi/2)).
\end{aligned}$$
Para representarlas conjuntamente tecleamos
$$plot(sol1, sol2, sol3, (t, -2, 8))$$
eligiendo el intervalo $(-2, 8)$ para ello. Vemos que sol1 es la que menos se aproxima a las otras dos que deben ser más aproximadas a la solución real.