Cálculo 2 (GCID). 31–5–2023

- Nombre y apellidos:
- DNI:

1. (**1.5 puntos**) Dar el concepto de norma en un espacio vectorial arbitrario. Indicar si alguna de las siguientes funciones representan o no una norma en el espacio correspondiente. En caso afirmativo, obtener la bola cerrada de centro el origen y radio 1.

   (a) $\|(x,y,z)\| = |x \cdot y \cdot z|$.

   (b) $\|(x,y)\| = 3(|x| + |y|)$.

   (c) $\|(x,y)\| = \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}$.

   Solución. Teoría. Para los ejemplos, (a) no es norma ya que $||(1,0,0)|| = 0$. (b) es una norma ya que es la norma 1 multiplicada por 3. Las bolas son análogas, multiplicando el radio por 3. (c) no es norma ya que $||9(4,4)|| = ||(36,36)|| = \sqrt{36} + \sqrt{36} = 12$ mientras que $9||(4,4)|| = 9(\sqrt{4} + \sqrt{4}) = 36$.

2. (**1.5 puntos**) Obtener en caso de existir

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(1-x)+y^2}{x^2+y^2}$$

¿Puede existir la diferencial de la función en $(0,0)$? ¿Y en $(1,2)$? Las respuestas deben ser razonadas.

Solución. Calculamos los límites iterados

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2(1-x)+y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}(1-x) = 1,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-x)+y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} 1 = 1.$$

Usando coordenadas polares, tenemos que

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta(1-r\cos\theta)+r^2\sin^2\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0}\cos^2\theta(1-r\cos\theta)+\sin^2\theta = 1.$$

Acotamos

$$|\cos^2\theta(1-r\cos\theta)+\sin^2\theta-1| = |r\cos^3\theta| \le r,$$

qur tiende a cero si r tiende a cero. Así

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(1-x)+y^2}{x^2+y^2} = 1.$$

Podemos definir entonces $f(0,0)=1$, de forma que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(1-x)+y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & si \quad (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

de forma continua. Para ver si existe la diferencial, calculamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-h-1}{h} = -1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = 0.$$

Para ver que es diferenciable calculamos el límite

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left| \frac{h_1^2(1-h_1)+h_2^2}{h_1^2+h_2^2} - 1 - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} (h_1,h_2) \right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_2^2 h_1|}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$

Tomando límites direccionales $h_2 = mh_1$ tenemos que

$$\lim_{h_1\to 0} \frac{|m^2 h_1^3|}{h_1^3(1+m^2)\sqrt{1+m^2}} = \frac{m^2}{(1+m^2)\sqrt{1+m^2}},$$

que al depender de m hace que no sea diferenciable en $(0,0)$.

Al ser $f(x,y)$ cociente de funciones diferenciables, será diferenciable except cuando se anule el denominador. Por lo tanto será diferenciable en $(1,2)$.

3. (**1.5 puntos**) Dada la ecuación

$$x^3yz + a(x+z)^2 = 1,$$

obtener los valores de a para los cuales es posible definir la variable x como función implícta de las variables y y z en el punto $(1,2,3)$ utilizando el teorema de la función implícita. Obtener el polinomio de Taylor de grado dos de dicha función.

Solución. Obviamente, debe verificarse que $6+16a=1$, de donde $a=-5/16$. Como, si $F(x,y,z) = x^3yz - 5/16(x+z)^2 - 1$, tenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2yz - 5/8(x+z),$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,2,3) = 18 - 5/2 \neq 0,$$

tenemos que la ecuación define a $x = x(y,z)$ de forma que $x(2,3)=1$. Para calcular su polinomio de Taylor, derivamos implícitamente la expresión

$$x(y,z)^3yz - 5/16(x(y,z)+z)^2 - 1 = 0,$$

teniendo

$$\begin{aligned} 3\frac{\partial x}{\partial y}(y,z)x(y,z)^2yz + x(y,z)^3z - \frac{5}{8}(x(y,z)+z)\frac{\partial x}{\partial y}(y,z) &= 0, \\ 3\frac{\partial x}{\partial z}(y,z)x(y,z)^2yz + x(y,z)^3y - \frac{5}{8}(x(y,z)+z)\left(\frac{\partial x}{\partial z}(y,z)+1\right) &= 0. \end{aligned}$$

Particularizando en $(2,3)$ y simplificando,tenemos

$$\begin{aligned} 18\frac{\partial x}{\partial y}(2,3) + 3 - \frac{5}{2}\frac{\partial x}{\partial y}(2,3) &= 0, \\ 18\frac{\partial x}{\partial z}(2,3) + 2 - \frac{5}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial z}(2,3)+1\right) &= 0, \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{\partial x}{\partial y}(2,3)=-\frac{6}{31},\quad \frac{\partial x}{\partial z}(2,3)=\frac{1}{31}.$$

Derivando nuevamente

$$\begin{aligned}
0 &= 3\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}(y,z)x(y,z)^2yz+6\frac{\partial x}{\partial y}(y,z)^2x(y,z)yz+3\frac{\partial x}{\partial y}(y,z)x(y,z)^2z\\
&\quad +3\frac{\partial x}{\partial y}(y,z)x(y,z)^2z-\frac{5}{8}\frac{\partial x}{\partial y}(y,z)^2-\frac{5}{8}(x(y,z)+z)\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}(y,z),\\
0 &= 3\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}(y,z)x(y,z)^2yz+6\frac{\partial x}{\partial y}(y,z)\frac{\partial x}{\partial z}(y,z)x(y,z)yz+3\frac{\partial x}{\partial y}(y,z)x(y,z)^2y\\
&\quad +3\frac{\partial x}{\partial z}(y,z)x(y,z)z+x(y,z)^3-\frac{5}{8}(\frac{\partial x}{\partial z}(y,z)+1)\frac{\partial x}{\partial y}(y,z)-\frac{5}{8}(x(y,z)+z)\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}(y,z),\\
0 &= 3\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(y,z)x(y,z)^2yz+6\frac{\partial x}{\partial z}(y,z)^2x(y,z)yz+3\frac{\partial x}{\partial z}(y,z)x(y,z)^2y\\
&\quad +3\frac{\partial x}{\partial z}(y,z)x(y,z)^2y-\frac{5}{8}\left(\frac{\partial x}{\partial z}(y,z)+1\right)^2-\frac{5}{8}(x(y,z)+z)\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(y,z).
\end{aligned}$$

Particularizando en $(2,3)$ y simplificando

$$\begin{aligned}
0 &= 18\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}(2,3)+\frac{1296}{961}-\frac{108}{31}-\frac{108}{7688}-\frac{5}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}(2,3),\\
0 &= 18\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}(2,3)-\frac{216}{961}-\frac{36}{31}-\frac{54}{31}+1+\frac{120}{961}-\frac{5}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}(2,3),\\
0 &= 18\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(2,3)+\frac{36}{961}+\frac{12}{31}-\frac{640}{961}-\frac{5}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(2,3),
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}(2,3) &= \frac{63639}{29791},\\
\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}(2,3) &= \frac{49763}{29791},\\
\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(2,3) &= \frac{11368}{29791},
\end{aligned}$$

y el polinomio de Taylor de grado dos será

$$\begin{aligned}
p_2(y,z) &= x(2,3)+\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial x}{\partial y}(2,3)(y-2)+\frac{\partial x}{\partial z}(2,3)(z-3)\right)\\
&\quad +\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}(2,3)(y-2)^2+2\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}(2,3)(y-2)(z-3)+\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(2,3)(z-3)^2\right)\\
&= 1-\frac{6}{31}(y-2)+\frac{1}{31}(z-3)+\frac{127251}{59582}(y-2)^2\\
&\quad +\frac{49763}{29791}(y-2)(z-3)+\frac{5684}{29791}(z-3)^2.
\end{aligned}$$

4. (**1.75 puntos**) Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,x)=\left(y^2z^3+2xy, 2xyz^3+z^2+x^2, 3xy^2z^2+2yz\right),$$

obtener

$$\int_\gamma \mathbf{F} dl$$

donde γ es la curva con origen en $(0,0,0)$ y que pasando por los puntos $(1,0,0)$, $(0,1,1)$ y $(1,2,2)$, finaliza en $(1,2,3)$.

Solución. El campo está definido en todo el espacio y su rotacional es

$$rot(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 + 2xy & 2xyz^3 + z^2 + x^2 & 3xy^2z^2 + 2yz \end{vmatrix} = (0,0,0)\,.$$

Por lo tanto existe una función potencial $f(x,y,z)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y^2z^3 + 2xy, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2xyz^3 + z^2 + x^2, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 3xy^2z^2 + 2yz. \end{aligned}$$

Integrando la primera expresión respecto de x tenemos

$$f(x,y,z) = \int (y^2z^3 + 2xy)dx = xy^2z^3 + x^2y + k(y,z).$$

Sustituyendo en la segunda expresión y simplificando

$$\frac{\partial k}{\partial y} = z^2$$

e integrando respecto de y

$$k(y,z) = \int z^2 dy = z^2y + c(z).$$

Así

$$f(x,y,z) = xy^2z^3 + x^2y + z^2y + c(z).$$

Derivando y sustuyendo en la tercera expresión tenemos

$$c'(z) = 0,$$

de donde $c(z)$ es constante y una función potencial es

$$f(x,y,z) = xy^2z^3 + x^2y + z^2y.$$

Así

$$\int_\gamma \mathbf{F} dl = f(1,2,3) - f(0,0,0) = 128.$$

5. (**1.75 puntos**) Calcular el volumen de $\mathbb{R}^3$ delimitado por las superficies $y^2 = 1-z$, $x=0$, $x=4$, $z=0$.

   Solución. Tomamos las funciones $z = 1-y^2$ y $z=0$ y obtenemos la intersección, que da los puntos $y = \pm 1$. El volumen es

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_{-1}^1 \int_0^{1-y^2} dzdydx &= \int_0^4 \int_{-1}^1 (1-y^2)dydx \\ &= \int_0^4 \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^1 dx = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$