CÁLCULO II
1º GRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE DATOS 31/05/2023

Nombre y DNI:

. . . .

1. (**1.5 puntos**) Probar que si $\mathbf{F}$ es un campo conservativo con función potencial f, entonces para toda curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 se cumple que

$$\int_\gamma \mathbf{F} dl = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Solución:
Teórico. Como $F = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$, para el camino $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ en $[a,b]$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F} dl &= \int_a^b \langle \nabla f, \gamma' \rangle \, dt \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))\, \gamma_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))\, \gamma_2'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t))\, \gamma_3'(t) \right) dt \\
&= \int_a^b \left(\frac{d}{dt}(f(\gamma(t))) \right) dt = [f(\gamma(t))]_{t=a}^{t=b} \\
&= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).
\end{aligned}$$

2. (**1.5 puntos**) Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

probar que existen las derivadas parciales en todo punto de $\mathbb{R}^2$, pero no son continuas en $(0,0)$. Probar asimismo que f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$. Las respuestas deben ser razonadas.

Solución:
Calculamos las derivadas parciales de la función. Distinguimos dos casos:

- Caso $(x,y) \neq (0,0)$. Como las funciones son localmente de clase C^1 en cualquier punto distinto del origen, podemos aplicar simplemente las reglas ya conocidas de derivación para obtener

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\
=\;& 2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+(x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot(-\frac{1}{2})(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x)\\
=\;& 2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-x\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right);\\
&\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\\
=\;& 2y\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+(x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot(-\frac{1}{2})(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2y)\\
=\;& 2y\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-y\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).
\end{aligned}$$

- Caso $(x,y)=(0,0)$. Aplicamos la definición de derivada parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{|h|}\right)-0}{h}=\lim_{h\to 0}h\operatorname{sen}\left(\frac{1}{|h|}\right)=0,$$

  puesto que $|h\operatorname{sen}\left(\frac{1}{|h|}\right)|\le|h|\overset{h\to 0}{\to}0$.

  Análogamente, se comprueba que también $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

En definitiva:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}0, \text{ si } (x,y)=(0,0),\\ 2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-x\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \text{ si } (x,y)\neq(0,0),\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}0, \text{ si } (x,y)=(0,0),\\ 2y\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-y\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \text{ si } (x,y)\neq(0,0).\end{cases}$$

Pasamos a demostrar que las derivadas parciales no son continuas en $(0,0)$. Para ello, vamos a probar que no existen los límites $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Una forma de verlo es como sigue: tomamos la dirección $x=y>0$ (con valores positivos para evitar escribir $|x|=\sqrt{x^2}$). En ese caso, el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ se transforma en

$$\lim_{x\to 0^+}\left[2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x\sqrt{2}}\right)-x\frac{1}{x\sqrt{2}}\cos\left(\frac{1}{x\sqrt{2}}\right)\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{1}{x\sqrt{2}}\right)\right],$$

y este límite no existe porque, a pesar de que $2x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x\sqrt{2}}\right)$ tienda a 0 si x tiende 0, resulta que no existe $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x\sqrt{2}}\right)$ porque la función coseno tiene un comportamiento oscilatorio en este caso (por ejemplo, si se toma $x=\frac{1}{n\pi\sqrt{2}}$, con $n\to\infty$ encontramos $\cos\left(\frac{1}{x\sqrt{2}}\right)=\cos(n\pi)=(-1)^n$, una sucesión formada sucesivamente por -1 y 1, luego no convergente).

Por último, veamos que, no obstante,la función f es diferenciable en $(0,0)$. Por los cálculos anteriores, si f es diferenciable en $(0,0)$ debe venir dada a través de la aplicación lineal

$$df(0,0):(h,k)\mapsto h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=h\cdot 0+k\cdot 0=0,$$

ya que la diferenciabilidad implica la existencia de derivadas parciales en el punto considerado. Para probar definitivamente la diferenciabilidad, debemos probar que se cumple la definición de diferenciabilidad, a saber que

$$\lim_{h,k\to 0} \frac{|f(h,k) - f(0,0) - df(0,0)(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Y en efecto se cumple:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h,k\to 0} \frac{|f(h,k) - f(0,0) - df(0,0)(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
= &\lim_{h,k\to 0} \frac{|f(h,k) - 0 - 0|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{h,k\to 0} \frac{|(h^2+k^2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)|}{\sqrt{h^2+k^2}} \\
= &\lim_{h,k\to 0} \left[\sqrt{h^2+k^2}\right] \left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)\right| = 0,
\end{aligned}$$

en donde en el último paso hemos utilizado que la función seno está acotada y que $\sqrt{h^2+k^2}$ tiende a 0 cuando h, k tienden a 0.

3. (**1.5 puntos**) Dada la función

$$F(x,y,z) = ax^3y^2 + z - b\cos z.$$

Encontrar la relación entre a y b para que la ecuación $F(x,y,z)+1=0$ tenga $(1,1,0)$ como solución y probar que define z como función implícita de las variables x e y en dicho punto. Obtener el polinomio de Taylor de grado dos de dicha función alrededor de $(1,1)$.

Solución:
Para que se cumpla la ecuación $F(x,y,z)+1=0$ en $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,0)$, ha de ser

$$a + 0 - b\cdot 1 + 1 = 0 \to b = a+1.$$

En este caso, cualquier pareja de valores $(a,b) = (a, a+1)$ va a definir z como una función implícita $z(x,y)$ o $z = \varphi(x,y)$ en el punto $(1,1,0)$, ya que se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita aplicada a la expresión $\widetilde{F}(x,y,z) = 0$, donde $\widetilde{F}(x,y,z) = F(x,y,z) + 1 = ax^3y^2 + z - b\cos z + 1$:

- $\widetilde{F}$ es una función de clase C^1 en un entorno de $(1,1,0)$, incluso en todo $\mathbb{R}^3$, por tratarse de la suma de un polinomio y la función coseno.
- $\widetilde{F}(1,1,0) = F(1,1,0) + 1 = a1^31^2 + 0 - (a+1)\cos 0 + 1 = a - (a+1) + 1 = 0.$
- $\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial z}(1,1,0) = \frac{\partial F}{\partial z}(1,1,0) = [1 + b\operatorname{sen} z]_{x=1,y=1,z=0} = 1 \neq 0.$

Por tanto, existe un entorno $\mathcal{U}$ del punto $(x_0,y_0) = (1,1)$ y existe una única función $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(1,1) = 0, \qquad (A)$$

$$\widetilde{F}(x,y,\varphi(x,y)) = 0 \to F(x,y,\varphi(x,y)) + 1 = 0. \qquad (B)$$

El polinomio de grado dos de $\varphi(x,y)$ en dicho punto $(1,1)$ viene dado por

$$\begin{aligned}
P_2(x,y) &= \varphi(1,1) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(1,1)(y-1) \\
&\quad + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(1,1)(x-1)^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(1,1)(x-1)(y-1) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(1,1)(y-1)^2\right).
\end{aligned}$$

Para obtener $P_2(x,y)$, necesitamos calcular el valor de las derivadas parciales de φ involucradas en él.

Para las derivadas parciales primeras de φ, o bien podemos derivar parcialmente en (B), o recordar directamente que el enunciado del teorema de la función implícita nos dice que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x}}{\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial z}} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial y}}{\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial z}} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Por tanto,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-3ax^2y^2}{1+b\mathrm{sen} z} \overset{x=1,y=1,z=0}{\rightarrow} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(1,1) = -3a, \qquad (C)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{-2ax^3y}{1+b\mathrm{sen} z} \overset{x=1,y=1,z=0}{\rightarrow} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,1) = -2a. \qquad (D)$$

Para obtener las derivadas parciales segundas habrá que derivar las expresiones (C) y (D), y considerar que $z = \varphi(x,y)$, sin olvidar que tomamos $b = a+1$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -3ay^2 \frac{\left[2x(1+b\mathrm{sen} z) - x^2 b\cos(z)\cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right]}{(1+b\mathrm{sen} z)^2}$$

$$\overset{x=1,y=1,z=0}{\rightarrow} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(1,1) = -3a[2-b(-3a)] = -9a^2b - 6a = -9a^3 - 9a^2 - 6a;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = -3ax^2 \frac{\left[2y(1+b\mathrm{sen} z) - y^2 b\cos(z)\cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]}{(1+b\mathrm{sen} z)^2}$$

$$\overset{x=1,y=1,z=0}{\rightarrow} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(1,1) = -2a[2-b(-2a)] = -4a^2b - 4a = -4a^3 - 4a^2 - 4a;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2ax^3 \frac{\left[(1+b\mathrm{sen} z) - yb\cos(z)\cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]}{(1+b\mathrm{sen} z)^2}$$

$$\overset{x=1,y=1,z=0}{\rightarrow} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(1,1) = -2a[1-b(-2a)] = -4a^2b - 2a = -4a^3 - 4a^2 - 2a.$$

Por tanto, el polinomio de Taylor de grado dos de φ viene dado por

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= 0 + (-3a)(x-1) + (-2a)(y-1) + \frac{1}{2}(-9a^3 - 9a^2 - 6a)(x-1)^2 + \\ &+ (-4a^3 - 4a^2 - 4a)(x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(-4a^3 - 4a^2 - 2a)(y-1)^2. \end{aligned}$$

Si se quiere dejar como una suma de monomios en x e y, desarrollando se llega a

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= -\left(\frac{9}{2}a^3 + \frac{9}{2}a^2 + 3a\right)x^2 - \left(2a^3 + 2a^2 + a\right)y^2 - \left(4a^3 + 4a^2 + 4a\right)xy \\ &+ (13a^3 + 13a^2 + 7a)x + (8a^3 + 8a^2 + 4a)y - \left(\frac{21}{2}a^3 + \frac{21}{2}a^2 + 3a\right). \end{aligned}$$

4. (**1.75 puntos**) Calcular mediante integración el volumen de la porción de cono de ecuación $x^2 + y^2 = 9z^2$, con $h_1 \leq z \leq h_2$, donde $h_1 < h_2$ son números reales no negativos.

Solución:

En este ejercicio podemos aplicar el hecho de que si $f(x, y) \geq 0$ es una función continua en una región del plano D, entonces el volumen V limitado superiormente por la superficie $z = f(x, y)$ e inferiormente por la región D, junto con las correspondientes "caras" laterales, viene dado por $V = \iint_D f(x, y)dxdy$.

Dado que la ecuación se puede escribir como $x^2 + y^2 = (3z)^2$, vemos que se trata de la ecuación de un cono invertido, con vértice en el origen, y si fijamos su altura en h (es decir, $z = h$), entonces el radio R de dicho cono vendrá dado por $R = 3h$. Hecha esta apreciación, vamos a calcular el volumen $V(h)$ del cono de altura h y radio $R = 3h$ para su base, y luego lo aplicaremos al volumen V que nos piden, ya que se tendrá $V = V(h_2) - V(h_1)$.

Por nuestros conocimientos de geometría elemental, sabemos que $V(h)$ viene dado por $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = 3\pi h^3$ (aquí la altura es h y el radio $R = 3h$). Por tanto, el resultado buscado para nuestro problema es $V = 3\pi(h_2^3 - h_1^3)$. No obstante, el ejercicio pide obtener el volumen por integración.

Por la simetría del problema, para calcular $V(h)$, en vez de trabajar en toda la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -R \leq x \leq R, -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq +\sqrt{R^2 - x^2}\}$ (recuérdese que D es la región limitada por $x^2 + y^2 = R^2$), lo haremos solamente en el cuadrante positivo, con $z = \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + y^2}$; debemos calcular

$$4\int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + y^2}dy\right) dx.$$

Es más cómodo trabajar con coordenadas polares, con las que el cálculo anterior pasa a ser (recordemos que $R = 3h$)

$$4\int_0^R \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\rho \cdot \rho d\theta\right) d\rho = \frac{2}{3}\pi h R^2 = 6\pi h^3.$$

¿Por qué no obtenemos el resultado $3\pi h^3$ deseado? ¡Porque en realidad lo que hemos calculado es el volumen externo al cono, con cuya unión forman el cilindro de altura h y base circular de radio R! Como el volumen de este cilindro es $\pi h R^2 = 9\pi h^3$, encontramos finalmente que $V(h) = \text{Volumen del cilindro} - \text{Volumen externo del cono} = 9\pi h^3 - 6\pi h^3 = 3\pi h^3$.

Por tanto, $V(h) = 3\pi h^3$, y el volumen pedido es $V = V(h_2) - V(h_1) = 3\pi(h_2^3 - h_1^3)$.

Nota: El ejercicio también se puede resolver mediante integración triple, con la descripción del recinto $V(h)$ como

$$\begin{gathered} -R \leq x \leq R, \\ -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq +\sqrt{R^2 - x^2}, \\ \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h. \end{gathered}$$

En ese caso, por la simetría del problema, podemos limitarnos al primer octante y multiplicar por 4:

$$V(h) = 4\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{\frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} dzdydx = 4\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \left(h - \frac{1}{3}\sqrt{x^2 + y^2}\right) dydx.$$

En esta úlitma integral aplicaremos la técnica de coordenadas polares (no olvide multiplicar por el valor absoluto del determinante jacobiano del cambio, ρ en el caso del cambio a polares):

$$\begin{aligned} V(h) &= 4\int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(h - \frac{1}{3}\rho\right) \cdot \rho d\theta d\rho = 2\pi \int_0^R \left(h - \frac{1}{3}\rho\right) \cdot \rho d\rho = \cdots = 3\pi h^3; \\ V &= V(h_2) - V(h_1) = 3\pi(h_2^3 - h_1^3). \end{aligned}$$

5. (**1.75 puntos**) Dado el campo

$$\mathbf{F}(x,y) = \big(\cos(x^2) + y(2x+1), y(x+2)\big),$$

obtener

$$\int_\gamma \mathbf{F} dl$$

donde γ es el arco de circunferencia que va desde $(0,4)$ hasta $(0,-4)$ en sentido horario.

Solución:
Como la ecuación de la circunferencia del ejercicio es $x^2+y^2=16$, el camino pedido se puede parametrizar, por ejemplo, como $\gamma(t) = (-4\cos t, 4\text{sen}t)$, con $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ (en sentido horario).

Una posible vía para realizar el ejecicio consiste en aplicar la definición de integral de línea y operar. De este modo, como $\gamma'(t) = (4\text{sen}t, 4\cos t)$, tenemos:

$$\int_\gamma \mathbf{F} dl = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[\big(\cos(16\cos^2 t) + 4\text{sen}(t)(-8\cos(t)+1)\big)\cdot(4\text{sen}t) + ((4\text{sen}t)(-4\cos(t)+2)\cdot(4\cos t))\right] dt.$$

Dada la envergadura de la integral, en este caso podemos apoyarnos en el teorema de Green para calcular la integral de línea pedida. Según el teorema de Green, se tiene que

$$\int_{r^+} \mathbf{F} dl = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy,$$

cuando F es de clase C^1 en un conjunto simplemente conexo y r es una curva cerrada simple orientada positivamente, en sentido antihorario. Puesto que γ no es cerrada, ni orientada positivamente, podemos recurrir al camino r formado por la unión de r_1 y r_2, donde r_1 es el camino cuya imagen viene dada por el segmento rectilíneo que une $(0,4)$ con $(0,-4)$, y r_2 es el camino con la misma imagen que γ pero recorrida en sentido antihorario. Por ejemplo:

$$r_1(t) = (0, 4-t), \text{ con } t \in [0,8]; \text{ por tanto } r_1'(t) = (0,-1);$$
$$r_2(t) = (-4\cos t, -4\text{sen}t), \text{ con } t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}].$$

– Por un lado,

$$\int_{r_1} \mathbf{F} dl = \int_0^8 \langle (1+y(t), 2y(t))), (0,-1)\rangle\, dt = \int_0^8 -2(4-t)dt = 0.$$

– Por otra parte,

$$\int_{r_2} \mathbf{F} dl = -\int_\gamma \mathbf{F} dl.$$

– Además,

$$\begin{aligned}
&\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (y-(2x+1))\, dxdy \\
&= \iint_D ydxdy - \iint_D (2x+1)dxdy = 0 - \iint_D 2xdxdy - \iint_D dxdy \\
&= -\int_{-4}^4 (\int_0^{\sqrt{16-y^2}} 2xdx)dy - \pi\frac{16}{2} = -\int_{-4}^4 \left[x^2\right]_0^{\sqrt{16-y^2}} dy - 8\pi \\
&= \left[16y - \frac{y^3}{3}\right]_{y=-4}^{y=4} - 8\pi = \frac{-256}{3} - 8\pi.
\end{aligned}$$

Nota: También se puede resolver la integral $\iint_D (y-(2x+1))\, dxdy$ mediante la técnica de coordenadas polares.

De los cálculos anteriores se infiere que

$$\begin{aligned}
&\frac{-256}{3} - 8\pi = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy \\
&= \int_{r^+} \mathbf{F} dl = \int_{r_1} \mathbf{F} dl + \int_{r_2} \mathbf{F} dl = 0 - \int_\gamma \mathbf{F} dl = -\int_\gamma \mathbf{F} dl,
\end{aligned}$$

de modo que la integral pedida es $\int_\gamma \mathbf{F} dl = \frac{256}{3} + 8\pi$.