CÁLCULO II
1º GRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE DATOS 27/06/2024

Nombre y DNI:

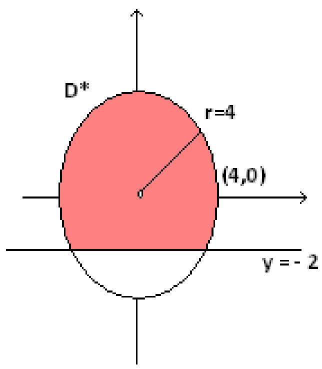
. . . .

1. (**1.5 puntos**) Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones:

   (a) Sea
   $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16, \quad y \geq -2\}$$
   y consideramos $D^* = D \setminus \{(0,0)\}$. Indicar si D^* es abierto, cerrado, o ninguna de las dos cosas, y encontrar su frontera.

   (b) Calcular el área de D mediante integración.

Solución:



(a) En la figura tenemos la descripción gráfica del conjunto D^*; el conjunto no es abierto (porque, por ejemplo, el punto $(4,0) \in D^*$ no cumple la propiedad de tener una bola abierta centrada en él que permanezca en D^*), ni tampoco es cerrado (porque su complementario no es abierto, pues en dicho complementario encontramos el punto $(0,0)$, que no cumple la condición de ser un punto interior).

Por otra parte, la frontera de D^* viene dada por

$$\mathrm{Fr}(D^*) = \left\{(x, -2) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-\sqrt{12}, \sqrt{12}]\right\} \bigcup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 16, y \in [-2, 4]\} \bigcup \{(0,0)\}.$$

(b) Mediante integración, el área A_D de D se puede calcular, por ejemplo, como

$$\begin{aligned}
A_D &= \int_{-2}^{4} \left(\int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} dx \right) dy = \int_{-2}^{4} 2\sqrt{16-y^2}dy = (\text{cambio}\, y = 4\text{sen}(t)) \\
&= 2\int_{-\pi/6}^{\pi/2} \sqrt{16-16\text{sen}^2 t} \cdot 4\cos t dt = 32 \int_{-\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 t dt = 32 \int_{-\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos(2t)}{2} \right) dt \\
&= 16 \left[t + \frac{1}{2}\text{sen}(2t) \right]_{-\pi/6}^{\pi/2} = 16 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) \right) \\
&= \frac{32}{3}\pi + 4\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

2. (**1.75 puntos**) Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(b) Calcular la derivada direccional $D_{\mathbf{v}}f(0,0)$, donde $\mathbf{v} = (a,b)$ es un vector arbitrario no nulo.

(c) Determinar si f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. En caso negativo, determinar el mayor subconjunto de $\mathbb{R}^2$ tal que f es diferenciable en dicho conjunto.

Solución:

(a) Por definición,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

(b) En cuanto a las derivadas direccionales respecto al vector no nulo $\mathbf{v} = (a,b)$, aplicamos la definición y discutimos casos:

(i) Si $a \neq 0, b \neq 0$, encontramos

$$D_{\mathbf{v}}f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+ha, 0+hb) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2a^2hb}{h^4a^4+h^2b^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^2b}{h^2a^4+b^2} = \frac{a^2}{b}.$$

(ii) Si $a = 0$, entonces

$$D_{\mathbf{v}}f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h\cdot 0, 0+hb) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2\cdot 0^2hb}{h^4\cdot 0^4+h^2b^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

(iii) Si $b = 0$, entonces

$$D_{\mathbf{v}}f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+ha, 0+h\cdot 0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2a^2h\cdot 0}{h^4a^4+h^2\cdot 0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

(c) Veamos si f es diferenciable en $(0,0)$; por el apartado (a), sabemos que la candidata a diferencial es la aplicación lineal cuya matriz asociada es

$$Jf(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, para que f sea diferenciable en $(0,0)$ ha de cumplirse que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(h,k) - f(0,0) - 0\cdot h - 0\cdot k|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Veamos si se cumple esa condición:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(h,k)-f(0,0)-0\cdot h-0\cdot k|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|\frac{h^2k}{h^4+k^2}-0\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|\frac{h^2k}{h^4+k^2}\right|}{\sqrt{h^2+k^2}},$$

y este límite no existe porque si tomamos, por ejemplo, las direcciones $k = Ch$, siendo $C > 0$ un número real positivo tomado arbitrariamente, se llega a

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left|\frac{h^2Ch}{h^4+C^2h^2}\right|}{\sqrt{h^2+C^2h^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{C|h|\frac{h^2}{h^4+C^2h^2}}{|h|\sqrt{1+C^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{C\frac{1}{h^2+C^2}}{\sqrt{1+C^2}} = \frac{1}{C\sqrt{1+C^2}},$$

y del hecho de que los límites direccionales son distintos se deduce que no existe el límite $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(h,k)-f(0,0)-0\cdot h-0\cdot k|}{\sqrt{h^2+k^2}}$.

[Nota: De hecho, hubiera bastado con tomar la dirección $k = h$ y haber demostrado que el límite direccional es $\frac{1}{\sqrt{2}}$, distinto de cero, para deducir que f no es diferenciable en $(0,0)$.]

[Nota: Otra posibilidad para ver que f es no diferenciable en $(0,0)$ consiste en demostrar que $f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$, lo que prueba la no diferenciabilidad, pues sabemos que si f es diferenciable en un punto, necesariamente ha de ser continua f en dicho punto.

En este caso, si tomamos las direcciones $y = Cx^2$, en $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ obtenemos límites direccionales distintos:

$$\lim_{x\to 0} f(x, Cx^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2Cx^2}{x^4+C^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{C}{1+C^2} = \frac{C}{1+C^2},$$

por tanto, tal límite no existe y f no es diferenciable en $(0,0)$.]

En cuanto a los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \neq (0,0)$, la función f sí será diferenciable en ellos, puesto que existen las derivadas parciales en tales puntos (compruébese el resultado)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xy \cdot \frac{x^4-y^2}{(x^4+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 \cdot \frac{x^4-y^2}{(x^4+y^2)^2},$$

y son funciones continuas en un entorno de dicho punto que no contenga al origen, por ser composición de funciones continuas.

En tal caso, si existen las derivadas parciales de f en $(x,y) \neq (0,0)$ y son continuas, la teoría comentada en clase nos permite concluir que f es diferenciable en tal punto. En resumen, el mayor subconjunto A de $\mathbb{R}^2$ tal que f es diferenciable viene dado por $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

3. (**1.5 puntos**) Consideramos el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (3y^2z + ye^x, 6xyz + e^x, 3xy^2)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calcular la integral de línea $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde γ es el camino que está compuesto por una hélice, que va desde $(1, 0, 0)$ a $(1, 0, 2\pi)$, y a continuación por una recta descendente que va de $(1, 0, 2\pi)$ hasta $(\ln 1000, 1, 0)$.

Solución:

La estrategia consiste en demostrar que $\mathbf{F}$ es un campo conservativo; en tal caso, si $\mathbf{F} = \nabla f$, se cumplirá que

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(\ln 1000, 1, 0) - f(1, 0, 0).$$

Para ver que el campo es conservativo, comprobamos que $\text{rot}(\mathbf{F}) = \vec{0}$:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{F}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y^2z + ye^x & 6xyz + e^x & 3xy^2 \end{vmatrix} \\ &= (6xy - 6xy)\vec{i} + (3y^2 - 3y^2)\vec{j} + (6yz + e^x - 6yz - e^x)\vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Para calcular su función potencial f, tal que $\nabla f = \mathbf{F}$, imponemos las condiciones

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = F_1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = F_2 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = F_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (1) : \frac{\partial f}{\partial x} = 3y^2z + ye^x \\ (2) : \frac{\partial f}{\partial y} = 6xyz + e^x \\ (3) : \frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2 \end{cases}$$

Integrando (3) con respecto a la variable z,

$$(4) : \ f(x, y, z) = 3xy^2z + \varphi(x, y),$$

donde $\phi(x, y)$ es una función arbitraria de clase C^1 respecto a las variables x, y; si, a su vez, derivamos (4) con respecto a y y comparamos con (2), obtenemos

$$6xyz + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 6xyz + e^x \rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = e^x.$$

Integrando esta última igualdad con respecto a y, se tiene $\varphi(x, y) = e^x y + \psi(x)$, donde ψ es una función arbitraria de clase C^1 en la variable x; por tanto, sustituyendo en (4) llegamos a

$$(5) : \ f(x, y, z) = 3xy^2z + e^x y + \psi(x).$$

Finalmente, derivando (5) con respecto a x y comparando con (1) obtendremos el valor de $psi(x)$:

$$3y^2z + e^x y + \psi'(x) = 3y^2z + ye^x \rightarrow \psi'(x) = 0 \rightarrow \psi(x) = C, \text{ con } C \text{ constante}.$$

Tomando, por ejemplo, $C = 0$, una función potencial es $f(x, y, z) = 3xy^2z + ye^x$. A partir de ella, resolvemos el ejercicio:

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(\ln 1000, 1, 0) - f(1, 0, 0) = (0 + 1000) - (0 + 0) = 1000.$$

4. (**1.75 puntos**) Se define $F(x,y) = x^2 f(x,y^2) + y^2 f(x^2,y)$, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^3.

   (a) Encontrar los valores de $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ y $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)$.

   (b) Sabiendo que $f(0,1) = 3$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -1$, determinar si la ecuación $F(x,y) = 3$ define implícitamente a y como función de x en un entorno de $(0,1)$; en caso afirmativo, calcular el polinomio de Taylor de grado 1 de tal función $y = y(x)$ en dicho entorno.

Solución:

(a) Aplicando la regla de la cadena para la derivación parcial de funciones compuestas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= \left(2xf(x,y^2) + x^2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y^2)\right) + y^2\frac{\partial f}{\partial x}(x^2,y)\cdot(2x) \\ &= 2xf(x,y^2) + x^2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y^2) + 2xy^2\frac{\partial f}{\partial x}(x^2,y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= x^2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y^2)\cdot(2y) + \left(2yf(x^2,y) + y^2\frac{\partial f}{\partial y}(x^2,y)\right) \\ &= 2yf(x^2,y) + y^2\frac{\partial f}{\partial y}(x^2,y) + 2yx^2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) &= (\text{teorema de derivadas cruzadas, Schwarz}) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) \\ &= 2y\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x^2,y)\cdot(2x)\right) + y^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x^2,y)\cdot(2x)\right) \\ &\quad +2y\left(2x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y^2) + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y^2)\right) \\ &= 4xy\frac{\partial f}{\partial y}(x,y^2) + 4xy\frac{\partial f}{\partial x}(x^2,y) + 2yx^2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y^2) + 2xy^2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x^2,y). \end{aligned}$$

(b) Consideramos la ecuación $F(x,y) = 3$ ó, equivalentemente, $H(x,y) = 0$, con $H(x,y) = F(x,y) - 3$. Se cumple:

- F, y por tanto H, es una función de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$, por serlo f y la composición de funciones de clase C^1.
- $F(0,1) = 0 + 1 \cdot f(0,1) = 3$, luego $H(0,1) = 0$.
- Por el apartado (a),

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,1) = 2f(0,1) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) + 0 = 6 - 1 = 5 \neq 0 \longrightarrow \frac{\partial H}{\partial y}(0,1) = -5 \neq 0.$$

Con estos ingredientes, el teorema de la función implícita establece la existencia de una única función $y = \varphi(x)$, definida en un entorno $\mathcal{U} = \mathcal{U}(x_0)$ de $x_0 = 0$, $\varphi\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

- $\varphi(x_0) = y_0$, esto es, $\varphi(0) = 1$.
- $\varphi(x)$ verifica $F(x, \varphi(x)) = 3$, o equivalentemente $H(x, \varphi(x)) = 0$, para todo $x \in \mathcal{U}$.
- φ es de clase $C^1(\mathcal{U})$ y se cumple que

$$\varphi'(x) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}, \text{ para } x \in \mathcal{U}.$$

El polinomio de Taylor de grado 1 de la función $y = \varphi(x)$, alrededor de $x_0 = 0$, viene dado por

$$P_1(x) = \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot (x - 0) \longrightarrow P_1(x) = 1 + (0) \cdot (x - 0) \longrightarrow P_1(x) = 1, \, x \in \mathcal{U},$$

en donde hemos empleado que $\varphi'(0) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(0,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)} = \frac{-0}{5} = 0$, junto con el hecho de que $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1) = 0$.

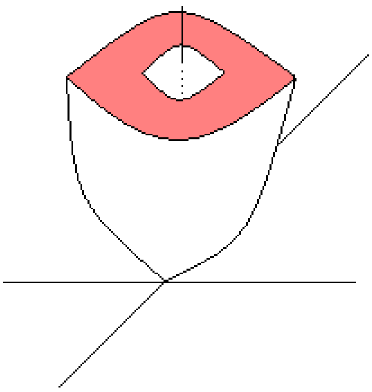
5. (**1.5 puntos**) Calcular mediante integración el volumen de la región Ω comprendida entre los paraboloides elípticos $z = x^2 + y^2$ y $z = 4x^2 + 4y^2$, y el plano $z = 1$.

Solución:

Si llamamos V_1 al volumen del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con tapa $z = 1$, y V_0 al volumen del paraboloide $z = 4x^2 + 4y^2$ con la misma tapa $z = 1$, entonces el volumen total V_T pedido es igual a

$$V_T = V_1 - V_0,$$

pues es sencillo comprobar gráficamente que el paraboloide $z = 4x^2 + 4y^2$, con $0 \leq z \leq 1$, está contenido en el interior del paraboloide $z = x^2 + y^2$. Una grÃ¡fica rudimentaria es la siguiente.



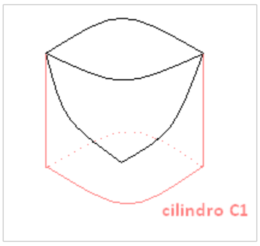
En ella, cuando $z = 1$, el paraboloide $z = x^2 + y^2$ se proyecta en el plano XY mediante $x^2 + y^2 = 1$, la ecuación del círculo D_1 de radio $r = 1$ y centro el origen, mientras que el paraboloide $z = 4x^2 + 4y^2$ se proyecta en el círculo D_0 de radio $1/2$ y centro el origen.

– Volumen V_1 del parabolide $z = x^2 + y^2$:

$$V_1 = V_{C_1} - \iint_{D_1} f(x, y) dx dy,$$

donde C_1 es el cilindro de altura $h = 1$ y con base el círculo de radio $r = 1$ y centro $(0, 0)$.

Por un lado, $V_{C_1} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi$.



Por otra parte, $\iint_{D_1} f(x,y)dxdy = \iint_{D_1}(x^2+y^2)dxdy$ se calcula con un cambio a coordenadas polares (no olvide multiplicar por el jacobiano del cambio, $|J| = \rho$):

$$\iint_{D_1} f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^2 \cdot \rho d\theta\right) d\rho = 2\pi \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2}.$$

En definitiva, $V_1 = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

– Volumen V_0 del parabolide $z = 4x^2 + 4y^2$:

$$V_0 = V_{C_0} - \iint_{D_0} f(x,y)dxdy,$$

donde C_0 es el cilindro de altura $h = 1$ y con base el círculo de radio $r = 1/2$ y centro $(0,0)$. Procediendo como en el cálculo del volumen anterior,

$$V_{C_0} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{\pi}{4},$$

$$\iint_{D_0} f(x,y)dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} 4\rho^2 \cdot \rho d\theta\right) d\rho = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} 4\rho^3 d\rho = 2\pi\frac{1}{16} = \frac{\pi}{8}.$$

Finalmente, $V_T = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$.

[Nota: Otro procedimiento consiste en emplear el principio de Cavalieri; por ejemplo, para el caso del paraboloide $z = x^2 + y^2$, el volumen pedido es $V_1 = \int_0^1 A(z)dz$, donde $A(z)$ es el área de la sección transversal que se origina, a una altura $z \in [0,1]$, al cortar la figura por un plano paralelo al plano $z = 0$; como la sección origina con el paraboloide un círculo de radio $r = \sqrt{z}$, se tiene que $A(z) = \pi \cdot r^2 = \pi(\sqrt{z})^2 = \pi z$. Por tanto, $V_1 = \int_0^1 A(z)dz = \int_0^1 (\pi z)dz = \frac{\pi}{2}$. Análogamente, el volumen V_0 del paraboloide de ecuación $z = 4x^2+4y^2$ se obtiene como $V_0 = \int_0^1 \widetilde{A}(z)dz = \int_0^1 \pi\left(\frac{1}{4}z\right)dz = \frac{\pi}{8}$. En definitiva, el volumen total es $V_T = V_1 - V_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$.]