Cálculo 2 (GCID). 17–1–2024

- Nombre y apellidos:
- DNI:

1. (**1.5 puntos**) Contestar razonadamente las siguientes preguntas:

   (a) Definir con precisión qué se entiende por el plano tangente de una función $z = f(x, y)$ en un punto (x_0, y_0) de su dominio. Como aplicación, obtener el valor de α de forma que la función $f(x, y) = \alpha x^2 + y^2 + 2x - 1$ tenga a $2x - 2y + z = 0$ como plano tangente en el punto $(1, 1)$.

   Solución. La primera parte es teoría. Para la aplicación, el plano tangente es de la forma

   $$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

   de donde

   $$z - a - 2 = (2a + 2)(x - 1) + 2(y - 1),$$

   y simplificando

   $$-(2a + 2)x - 2y + z + a + 2 = 0,$$

   e igualando con la ecuación de la recta dada en el enunciado, $a + 2 = 0$, con lo que $a = -2$. Notar que para este valor de a se tiene que $-(2a + 2) = 2$.

   (b) Determinar si el conjunto

   $$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 > 1\right\}$$

   es cerrado o abierto $\mathbb{R}^2$ con la norma euclídea y, al mismo tiempo, calcular el interior, la clausura, la frontera y los puntos de acumulación.

   Solución. El conjunto B puede expresarse como

   $$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y > 1\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y < -1\right\}.$$

   El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y > 1\}$ es abierto ya que si $(x_0, y_0) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y > 1\}$, entonces $B((x_0, y_0), (y_0 - 1)/2)$ está contenido en dicho conjunto. De forma análoga, se razona con $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y < -1\}$. Por lo tanto, B es abierto y coincide con su interior. Si añadimos las rectas $y = -1$ e $y = 1$ a dicho conjunto, se tendría que, razonando de forma análoga, su complemetario es

   $$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 < y < 1\right\}$$

   es abierto, y por tanto la clausura de B es $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 \geq 1\}$. La frontera será por tanto

   $$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 = 1\right\}.$$

   Los puntos de acumulación serán entonces

   $$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 \geq 1\right\}.$$

   (c) Demostrar que para cualquier función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 se cumple que $\mathrm{Rot}(\mathrm{grad}\, f) = \nabla \times (\nabla f) = 0$.

   Solución. Teoría.

2. (**1.5 puntos**) Consideramos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3+k(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \\ \sqrt{2}, \text{ si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

donde k un número real. Encontrar el valor de k de forma que $f(x,y)$ es una función continua.

Solución. Utilizando coordenadas polares, calculamos

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3\sin^3\theta + kr^2}{r^2} = \lim_{r\to 0} \left(r\sin^3\theta + k\right) = k.$$

Como

$$|\left(r\sin^3\theta + k\right) - k| \leq r,$$

y $\lim_{r\to 0} r = 0$, concluimos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3 + k(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = k.$$

Para que sea continua

$$\sqrt{2} = f(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3 + k(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = k,$$

de donde $k = \sqrt{2}$.

3. (**1.75 puntos**) Analizar si la ecuación $e^{y^2} + xy - 1 = 0$ define o no implícitamente a y como función de x en el punto $(1,0)$. En caso afirmativo obtener el polinomio de Taylor de grado tres centrado en $x = 1$ de dicha función $y(x)$.

Solución. La función $F(x,y) = e^{y^2} + xy - 1$ es derivable de cualquier con derivada continua. Se cumple que $F(1,0) = 0$ y

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x + 2ye^{y^2},$$

con lo que

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 1 \neq 0.$$

Por el Teorema de la función implícita existe un entorno de 1 y una única función continua y derivable $y(x)$, definida en dicho entorno, de forma que $y(1) = 0$, y

$$e^{y(x)^2} + xy(x) - 1 = 0.$$

Derivando

$$2y(x)y'(x)e^{y(x)^2} + y(x) + xy'(x) = 0,$$

y sustituyendo en $(1,0)$, con $y(1) = 0$,

$$y'(1) = 0.$$

Derivando otra vez,

$$\left(4y(x)^2y'(x)^2 + 2y'(x)^2 + 2y(x)y''(x)\right)e^{y(x)^2} + 2y'(x) + xy''(x) = 0,$$

y sustituyendo en $(1, 0)$,

$$y''(1) = 0.$$

Finalmente, derivando otro vez

$$\begin{aligned} 0 &= (8y(x)y'(x)^3 + 8y(x)^2y'(x)y''(x) + 4y'(x)y''(x) + 2y'(x)y''(x) + 2y(x)y^{3)}(x) \\ &\quad +2y(x)y'(x)\left(4y(x)^2y'(x)^2 + 2y'(x)^2 + 2y(x)y''(x)\right))e^{y(x)^2} + 3y''(x) + xy^{3)}(x), \end{aligned}$$

y sustituyendo en $(1, 0)$,

$$\begin{aligned} 0 &= (8y(x)y'(x)^3 + 8y(x)^2y'(x)y''(x) + 4y'(x)y''(x) + 2y'(x)y''(x) + 2y(x)y^{3)}(x) \\ &\quad +2y(x)y'(x)\left(4y(x)^2y'(x)^2 + 2y'(x)^2 + 2y(x)y''(x)\right))e^{y(x)^2} + 3y''(x) + xy^{3)}(x), \end{aligned}$$

$$y^{3)}(1) = 0,$$

y el polinomio de Taylor será

$$p(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y^{3)}(1)}{3!}(x-1)^3,$$

de donde

$$p(x) = 0.$$

4. (**1.75 puntos**) Haciendo uso de la fórmula de Green, calcular la integral de línea

$$\int_\gamma (e^x \mathrm{sen}(y) - y)dx + (e^x \cos(y) - 1)dy,$$

donde γ es la semicircunferencia inferior de radio 1 y centro $(1, 0)$ recorrida de $(2, 0)$ a $(0, 0)$.

Solución. Sea α el segmento uniendo $(0, 0)$ con $(2, 0)$ y $\Gamma = \gamma \cup \alpha$ la curva de Jordan que está orientada positivamente. Por el Teorema de Green

$$\begin{aligned} \int_\Gamma (e^x \mathrm{sen}(y) - y)dx + (e^x \cos(y) - 1)dy &= -\int\int_{I(\Gamma)} (e^x \cos(y) - e^x \cos(y) + 1)\, dxdy \\ &= -\int\int_{I(\Gamma)} dxdy = -\pi/2. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} -\pi/2 &= \int_\Gamma (e^x \mathrm{sen}(y) - y)dx + (e^x \cos(y) - 1)dy \\ &= \int_\gamma (e^x \mathrm{sen}(y) - y)dx + (e^x \cos(y) - 1)dy + \int_\alpha (e^x \mathrm{sen}(y) - y)dx + (e^x \cos(y) - 1)dy, \end{aligned}$$

de donde

$$\int_\gamma (e^x \mathrm{sen}(y) - y)dx + (e^x \cos(y) - 1)dy = -\frac{\pi}{2} - \int_\alpha (e^x \mathrm{sen}(y) - y)dx + (e^x \cos(y) - 1)dy.$$

Como $\alpha(t) = (1-t)(0, 0) + t(2, 0) = (2t, 0)$, $t \in [0, 1]$, calculamos

$$\int_\alpha (e^x \mathrm{sen}(y) - y)dx + (e^x \cos(y) - 1)dy = \int_0^1 0dx = 0,$$

de donde

$$\int_\gamma (e^x \mathrm{sen}(y) - y)dx + (e^x \cos(y) - 1)dy = -\pi/2.$$

5. (**1.5 puntos**) Calcular el volumen del cono de helado definido por el cono $x^2 + y^2 = 4z^2$, $0 \leq z \leq 1$, y el casquete superior de la esfera dado por $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$, $z \geq 1$.

Solución. El volumen $V = V_1 + V_2$, donde V_1 es el volumen del cono y V_2 el del casquete superior esférico. Para calcular V_1 hacemos

$$V_1 = \int_0^1 \int \int_{\Omega_1(z)} dxdydz,$$

donde

$$\Omega_1(z) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4z^2\},$$

y en coordenadas polares se tiene que

$$\int \int_{\Omega_1(z)} dxdydz = \int_0^{2z} \int_0^{2\pi} r d\theta dr = \int_0^{2z} 2\pi r dr = 4\pi z^2.$$

Entonces

$$V_1 = \int_0^1 4\pi z^2 dz = \frac{4}{3}\pi.$$

Para calcular V_2, pasamos a coordenadas esféricas, teniéndose

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr = \int_0^2 \int_0^{\pi/2} 2\pi r^2 \sin\theta d\theta dr \\ &= \int_0^2 2\pi r^2 dr = \frac{16}{3}\pi. \end{aligned}$$

Entonces

$$V = \frac{4}{3}\pi + \frac{16}{3}\pi = \frac{20}{3}\pi.$$