Cálculo 2 (GCID). 16–12–2024

- Nombre y apellidos:
- DNI:

1. Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones:

   (a) (**1 punto**) Sea

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \geq -1\}$$

y consideramos $D^* = D \setminus \{(0, -1)\}$. Además de representar gráficamente dicha región, indicar razonadamente si D^* es abierto, cerrado, o ninguna de las dos cosas, y encontrar su frontera.

Solución. D^* no es abierto porque la bola de centro $(0, 2)$ y cualquier radio nunca está contenida en D^*. El complementario $\mathbb{R}^2 \setminus D^*$ es

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 4\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < -1\} \cup \{(0, -1)\}.$$

No es abierto porque la bola de centro $(0, -1)$ y cualquier radio nunca está contenida en $\mathbb{R}^2 \setminus D^*$. Así, D^* no es ni abierto, ni cerrado. Por otro lado, la frontera será

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 = x^2 + y^2\}, \\ A_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 = x^2 + y^2, \quad y \geq -1\}, \\ A_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1 \text{ y } x^2 + y^2 \leq 4\}. \end{aligned}$$

   (b) (**1 punto**) Encontrar el área del recinto D haciendo uso de la integración.

Solución. Calculamos

$$A = \int\int_D dxdy.$$

La intersección

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = -1, \end{cases}$$

tiene lugar cuando $x = \pm\sqrt{3}$. Si parametrizamos la circunferencia como

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t, \\ y(t) = 2\sin t, \end{cases}, t \in [0, 2\pi],$$

entonces

$$\begin{cases} \sqrt{3} = 2\cos t_1, \\ -1 = 2\sin t_1, \end{cases}$$

ocurre cunado $t_1 = \frac{7\pi}{6}$ y

$$\begin{cases} -\sqrt{3} = 2\cos t_2, \\ -1 = 2\sin t_2, \end{cases}$$

cuando $t_2 = \frac{11\pi}{6}$. Utilizando el Teorema de Green, el área de la porción de semicírculo inferior es

$$\int_\gamma x dy$$

donde $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, donde γ_1 es la porción de circunferencia comprendida entre ambos ángulos y γ_2 es el segmento de la recta $y = -1$ comprendido entre ambos puntos, orientada positivamente. Como $y' = 0$ en la recta $y = -1$, tenemos que $\int_{\gamma_2} x dy = 0$. Entonces

$$\int_\gamma x dy = \int_{\gamma_1} x dy = \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} 4\cos^2 t dt = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$

Entonces el área de D será el área del círculo de radio 2 menos el área del círculo de radio 1 menos el área de la sección circular, es decir,

$$A = 4\pi - \pi - \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}.$$

2. (**1 punto**) Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Solución. Tomando límites direccionales en la dirección $y = mx$ tenemos que

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{2m^2x^3}{(x^2+m^4x^4)\sqrt{x^2+m^2x^2}} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{2m^2}{(1+m^4x^2)\sqrt{1+m^2}} = \frac{2m^2}{\sqrt{1+m^2}},$$

por lo tanto no existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$$

y por tanto f no puede ser continua en dicho punto. Como consecuencia, tampoco será diferenciable en él. Si $(x,y) \neq (0,0)$ nuestra función es un cociente de funciones continuas y diferenciables, por lo que será continua y diferenciable.

3. (**2 puntos**) Probar que la ecuación

$$z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} + x + y^2 - \cos(x-y+z) = 0$$

define, en un entorno de $(0,0,0)$, una función implícita $z = f(x,y)$ diferenciable en un cierto entorno de $(0,0)$. Calcular el polinomio de Taylor de orden dos de tal función f alrededor del punto $(0,0)$.

Solución. Dada la función

$$F(x,y,z) = z^3 + 2z + e^{z-x-y^2} + x + y^2 - \cos(x-y+z),$$

se tiene que $F(0,0,0) = 0$ y

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 + 2 + e^{z-x-y^2} + \sin(x-y+z)$$

por lo que

$$\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0) = 3 \neq 0.$$

Así, existe un entorno de $(0,0)$ de forma que la función $z(x,y)$ está definida, se puede derivar infinitas veces y $z(0,0)=0$. Tomamos

$$z(x,y)^3 + 2z(x,y) + e^{z(x,y)-x-y^2} + x + y^2 - \cos(x-y+z(x,y)) = 0$$

y derivamos implícitimente

$$\begin{aligned} 0 &= 3z(x,y)^2\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + 2\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + \left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) - 1\right) e^{z(x,y)-x-y^2} \\ &\quad +1 + \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right) \sin(x-y+z(x,y)), \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} 0 &= 3z(0,0)^2\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) + 2\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) + \left(\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) - 1\right) e^{z(0,0)} \\ &\quad +1 + \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}(0,0)\right) \sin(z(0,0)) \\ &= 3\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) \end{aligned}$$

y por lo tanto $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = 0$. Similarmente

$$\begin{aligned} 0 &= 3z(x,y)^2\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) + 2\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) - 2y\right) e^{z(x,y)-x-y^2} \\ &\quad +2y + \left(\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) - 1\right) \sin(x-y+z(x,y)), \end{aligned}$$

de donde

$$0 = 3\frac{\partial z}{\partial y}(0,0).$$

Procedemos con la derivada segunda

$$\begin{aligned} 0 &= 6z(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)^2 + 3z(x,y)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)e^{z(x,y)-x-y^2} \\ &\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) - 1\right)^2 e^{z(x,y)-x-y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)\sin(x-y+z(x,y)) \\ &\quad + \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right)^2 \cos(x-y+z(x,y)), \end{aligned}$$

de donde

$$0 = 3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) + 2,$$

y así $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = -\frac{2}{3}$. Similarmente

$$\begin{aligned} 0 &= 6z(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + 3z(x,y)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y) + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y)e^{z(x,y)-x-y^2} \\ &\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) - 1\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) - 2y\right) e^{z(x,y)-x-y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y)\sin(x-y+z(x,y)) \\ &\quad + \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) - 1\right) \cos(x-y+z(x,y)), \end{aligned}$$

de donde

$$0 = 3\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,0) - 1$$

y entonces $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{1}{3}$. Finalmente

$$\begin{aligned} 0 &= 6z(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)^2 + 3z(x,y)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) - 2\right) e^{z(x,y)-x-y^2} \\ &\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) - 2y\right)^2 e^{z(x,y)-x-y^2} + 2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)\sin(x-y+z(x,y)) \\ &\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) - 1\right)^2 \cos(x-y+z(x,y)) \end{aligned}$$

de donde

$$0 = 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) + 1,$$

y así $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) = -\frac{1}{3}$. El polinomio de Taylor será

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,0)xy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0)y^2\right) \\ &= -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}xy - \frac{1}{6}y^2. \end{aligned}$$

4. (**2 puntos**) Consideramos el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = (3xy^2 + y + 1, 3x^2y + ye^{y^2})$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Calcular la integral de línea $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde γ es el arco de la circunferenerencia de radio 4 centrada en $(0,0)$ que lleva el punto $(4,0)$ hasta $(-4,0)$ con $y \geq 0$.

Solución. Tomamos σ el segmento que une $(-4,0)$ con $(4,0)$ y tomamos la curva $\gamma \cup \sigma$, que será C^1 a trozos y de Jordan orientada positivamente. Por el Teorema de Green

$$\int_{\gamma\cup\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\int_{I(\gamma\cup\sigma)} dxdy = \int_0^4 \int_0^\pi r d\theta dr = 8\pi.$$

Por otro lado

$$\int_{\gamma\cup\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_\sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Calculamos aparte

$$\begin{aligned} \int_\sigma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \langle \mathbf{F}(x(t),y(t)), (x'(t),y'(t)) \rangle \, dt \\ &= \int_0^1 8dt = 8. \end{aligned}$$

Así

$$8\pi = \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + 8,$$

de donde

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 8\,(\pi - 1)\,.$$

5. (**1 punto**) Calcular el volumen de $\mathbb{R}^3$ delimitado por las superficies $y^2 = 1 - z, x = 0, x = 4, z = 0$.

   Solución. La parábola $z = 1 - y^2$ corta con la recta $z = 0$ en los puntos ± 1. Entonces

$$V = \int_0^4 \int_{-1}^1 \int_0^{1-y^2} dzdydx = \int_0^4 \int_{-1}^1 (1 - y^2)dydx = \frac{16}{3}.$$

6. (**Ejercicio para recuperar las prácticas**) Calcular la integral haciendo uso del Teorema de Green

$$\int_\gamma xdy$$

   donde γ es la frontera del recinto acotado dada por las curvas $y = 0$, $y = 2x$, $x^2 + y^2 = 8x$ y $x^2 + y^2 = 16x$, orientado de manera positiva. ¿Qué representa dicha integral?

   Solución. La integral representa el área del recinto. Calculamos los puntos de corte de la recta $y = 2x$ con ambas circunferencias resolviendo

$$\begin{cases} y = 2x, \\ x^2 + y^2 = 8x, \end{cases}$$

   con solución positiva $x = \frac{8}{5}$, y

$$\begin{cases} y = 2x, \\ x^2 + y^2 = 16x, \end{cases}$$

   con solución positiva $x = \frac{16}{5}$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_\gamma xdy &= \int\int_{I(\gamma)} dxdy \\ &= \int_{\frac{8}{5}}^{2\sqrt{2}} \int_{\sqrt{8x-x^2}}^{2x} dydx + \int_{2\sqrt{2}}^{\frac{16}{5}} \int_0^{2x} dydx + \int_{\frac{16}{5}}^{4} \int_0^{\sqrt{16x-x^2}} dydx \\ &= 8.651. \end{aligned}$$