Cálculo 2 (GCID). 15–5–2026

- Nombre y apellidos:
- DNI:

1. Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones:

   (a) (**0.75 puntos**) Demostrar que si $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tiene transformada de Laplace y h_a es la función de Heaviside para $a > 0$, entonces $\mathcal{L}[h_a(t)f(t-a)](z) = e^{-az}\mathcal{L}[f](z)$.

   (b) (**0.75 puntos**) Aplicar la fórmula anterior para encontrar la transformada de Laplace inversa de la función
$$F(z) = e^{-z}\frac{(z+1)}{z^2+4}.$$

   Solución. (a) Teoría. (b). Escribimos
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z+1}{z^2+4}\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z^2+4}\right](t) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{z^2+4}\right](t)\\ &= \cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t).\end{aligned}$$

   Entonces
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-z}\frac{z+1}{z^2+4}\right](t) &= h_1(t)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z+1}{z^2+4}\right](t-1)\\ &= h_1(t)\left(\cos(2(t-1)) + \frac{1}{2}\sin(2(t-1))\right)\\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } t < 1,\\ \cos(2(t-1)) + \frac{1}{2}\sin(2(t-1)) \quad \text{si } t \geq 1.\end{cases}\end{aligned}$$

2. (**1 punto**) Dada la función
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} & si \quad (x,y) \neq (0,0),\\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0).\end{cases}$$

   Estudiar la diferenciabilidad de f. ¿Es la función f de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$?

   Solución. Si $(x,y) \neq (0,0)$ se trata de un cociente de polinomios cuyo denominador no se anula. Se trata de una función de clase C^1, y por tanto diferenciable. Si $(x,y) = (0,0)$, calculamos
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0,$$
   y
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0.$$
   Por lo tanto, si la diferencial existe debe cumplir que
$$df(0,0)(h_1,h_2) = (0,0)\begin{pmatrix} h_1\\ h_2\end{pmatrix} = 0.$$

Para comprobar que f es diferenciable en $(0,0)$ tenemos que comprobar que el siguiente límite da cero:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f(h_1,h_2) - f(0,0) - df(0,0)(h_1,h_2)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2 h_2^2\,|h_2|}{(h_1^4+h_2^4)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$

Tomando $h_2 = mh_1$, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{h_1\to 0} \frac{h_1^2 (mh_1)^2\,|mh_1|}{(h_1^4+(mh_1)^4)\sqrt{h_1^2+(mh_1)^2}} &= \lim_{h_1\to 0} \frac{h_1^4 m^2\,|m||h_1|}{h_1^4(1+m^4)|h_1|\sqrt{(1+m^2}} \\ &= \frac{m^2|m|}{(1+m^4)\sqrt{(1+m^2}},\end{aligned}$$

y como depende de m, no existe el límite por lo que f no es diferenciable en $(0,0)$. Consecuentemente, no puede ser C^1 en $\mathbb{R}^2$, pero sí en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

3. (**2 puntos**) La función de transferencia de un sistema es

$$T(z) = \frac{1}{z^2+4z+5}.$$

Probar que es asintóticamente estable y encontrar las respuestas en el régimen estacionario en los siguientes casos:

(a) La entrada viene dada por la función $f(t) = 10$.

(b) La entrada viene dada por la función $f(t) = 2\sin(2t+1)$.

(c) La entrada viene dada por la función $f(t) = e^t$.

Solución. Las soluciones de $z^2+4z+5=0$ son $-2\pm i$, por lo que el sistema es asintóticamente estable. Para el apartado (a) tenemos la solución

$$y(t) = 10T(0) = 2.$$

Para (b), será

$$y(t) = 2|T(2i)|\sin(2t+1+\arg(T(2i))).$$

Calculamos

$$T(2i) = \frac{1}{1+8i} = \frac{1}{65} - \frac{8}{65}i,$$

cuyo módulo es

$$|T(2i)| = \frac{\sqrt{65}}{65}$$

y argumento

$$\arg(T(2i)) = -\arctan 8$$

al estar en el cuarto cuadrante. Por tanto

$$y(t) = 2\frac{\sqrt{65}}{65}\sin(2t+1-\arctan 8).$$

Para (c), obtenemos

$$\mathcal{L}[e^t](z) = \frac{1}{z-1},$$

y por tanto, la transformada de la solución es

$$F(z) = \frac{1}{(z^2 + 4z + 5)(z - 1)},$$

que descomponemos en fracciones simples

$$\frac{1}{(z^2 + 4z + 5)(z - 1)} = \frac{A}{z - 1} + \frac{Bz + C}{z^2 + 4z + 5},$$

de donde sacamos $A = 1/10$, y así

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1/10}{z - 1}](t) = \frac{1}{10}e^t.$$

1. (**2 puntos**) Calcular $a \in \mathbb{R}$ para que la ecuación

$$e^{x+z} + \sin(y + z) + z^2 - x = a$$

defina, en un entorno de $(0, 0, 0)$, una función implícita $z = f(x, y)$ diferenciable en un cierto entorno de $(0, 0)$. Calcular el polinomio de Taylor de orden dos de tal función f alrededor del punto $(0, 0)$.

Solución. La función $F(x, y, z) = e^{x+z} + \sin(y + z) + z^2 - x - a$ está definida y es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^3$. Para que

$$F(0, 0, 0) = 0,$$

debe cumplirse que

$$a = 1.$$

Además

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = e^{x+y} + \cos(y + z) + 2z,$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 0) = 2 \neq 0.$$

Por el teorema de la función implícita, existe una función de clase C^∞ definida en una bola de centro $(0, 0)$ de manera que $z(0, 0) = 0$ y además

$$e^{x+z(x,y)} + \sin(y + z(x, y)) + z(x, y)^2 - x = a.$$

Derivando respecto de x obtenemos

$$\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)\right) e^{x+z(x,y)} + \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) \cos(y + z(x, y)) + 2\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)z(x, y) - 1 = 0,$$

y sustituyendo por $(0, 0)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

Análogamente para y tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)e^{x+z(x,y)} + \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)\right) \cos(y + z(x, y)) + 2\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)z(x, y) = 0,$$

y sustituyendo por $(0,0)$
$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = -\frac{1}{2}.$$
Volvemos a derivar y obtenemos que
$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)e^{x+z(x,y)} + \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right)^2 e^{x+z(x,y)} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)\cos(y+z(x,y)) \\ &\quad - \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)^2 \sin(y+z(x,y)) + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)z(x,y) + 2\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)^2, \end{aligned}$$
de donde
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = -\frac{1}{2},$$
$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y)e^{x+z(x,y)} + \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right) \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)e^{x+z(x,y)} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y)\cos(y+z(x,y)) \\ &\quad - \frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right)\sin(y+z(x,y)) + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y)z(x,y) + 2\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}(x,y), \end{aligned}$$
de donde
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,0) = 1/4,$$
y finalmente
$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)e^{x+z(x,y)} + \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)^2 e^{x+z(x,y)} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)\cos(y+z(x,y)) \\ &\quad - \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right)^2 \sin(y+z(x,y)) + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)z(x,y) + 2\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)^2 = 0 \end{aligned}$$
de donde
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) = -\frac{3}{8},$$
Por lo tanto, el polinomio de Taylor será
$$P(x,y) = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}xy - \frac{3}{16}y^2.$$

5. (**1.5 puntos**) Calcular mediante integración las dos cuestiones siguientes. Obtener el área de la región acotada limitada por la funciones $y = x^2 - 1$ e $y - 3x + 1 = 0$. A continuación, obtener el volumen del cuerpo cilíndrico con base la región anterior y altura $\sqrt{2}$.

   Solución. Para obtener el área calculamos los puntos de corte de las dos funciones mediante el sistema
$$\begin{cases} y = x^2 - 1, \\ y = 3x - 1, \end{cases}$$
de donde
$$x^2 - 1 = 3x - 1,$$
con soluciones $x = 0$ y $x = 3$. Describimos entonces el área como
$$A(\Omega) = \int\int_\Omega dxdy = \int_0^3 \left(\int_{x^2-1}^{3x-1} dy\right) dx = \int_0^3 (3x - x^2)dx = \frac{27}{6}.$$
Para obtener el volumen
$$\int\int\int_V dxdydz = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int\int_\Omega dxdy\right) dz = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{27}{6} dz = \frac{27}{6}\sqrt{2}.$$