Cálculo 2 (GCID). 12–5–2025

- Nombre y apellidos:
- DNI:

1. Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones:

   (a) (**1 punto**) Demostrar que si $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ es una función derivable, entonces se cumple que
   $$\mathcal{L}[f'](z) = z\mathcal{L}[f](z) - f(0).$$
   Solución. Teoría.

   (b) (**0.5 puntos**) Aplicar la fórmula anterior para encontrar la transformada de Laplace de la función $\sin(at)$ sabiendo que
   $$\mathcal{L}[\cos(at)](z) = \frac{z}{z^2+a^2}.$$
   Solución. Como la derivada de $\sin(at)$ es $a\cos(at)$, tenemos que
   $$\mathcal{L}[a\cos(at)](z) = z\mathcal{L}[\sin(at)](z) - \sin 0 = z\mathcal{L}[\sin(at)](z).$$
   Como
   $$\begin{aligned}\mathcal{L}[a\cos(at)](z) &= a\mathcal{L}[\cos(at)](z)\\ &= \frac{az}{z^2+a^2} = z\mathcal{L}[\sin(at)](z),\end{aligned}$$
   de donde
   $$\mathcal{L}[\sin(at)](z) = \frac{a}{z^2+a^2}.$$

2. (**1.5 puntos**) Dada la función
   $$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0),\\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0),\end{cases}$$
   demostrar que
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$
   ¿Es la función f de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$?

   Solución. Teoría. Como no se cumple el Teorema de Schwarz en $(0,0)$, la función f no puede ser de clase C^2 en $(0,0)$, y por tanto no lo es en $\mathbb{R}^2$.

3. (**1.5 puntos**) Resolver la ecuación diferencial
   $$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = e^t \cos t,\\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1.\end{cases}$$
   mediante la transformada de Laplace. ¿Es asintóticamente estable? En caso afirmativo, ¿cuál es su solución en el régimen estacionario?

Solución. Transformamos la ecuación mediante la transformada de Laplace en

$$(z^2+2z-3)\mathcal{L}[f](z)-1=\frac{z-1}{(z-1)^2+1},$$

de donde

$$\mathcal{L}[f](z)=\frac{1}{z^2+2z-3}\frac{z^2-z+1}{(z-1)^2+1}.$$

La función de transferencia es

$$T(z)=\frac{1}{z^2+2z-3},$$

y como $z^2+2z-3=0$ tiene soluciones 1 y -3, el sistema es inestable y no hay régimen estacionario. Para calcular la solución de la ecuación diferencial tomamos fracciones simples

$$\frac{z^2-z+1}{(z^2+2z-3)((z-1)^2+1)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+3}+\frac{Cz+D}{(z-1)^2+1},$$

de donde $A=1/4$, $B=-13/68$, $C=-1/17$ y $D=5/17$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z^2-z+1}{(z^2+2z-3)((z-1)^2+1)}\right](t) &= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z-1}\right](t)-\frac{13}{68}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z+3}\right](t)\\
&\quad -\frac{1}{17}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{(z-1)^2+1}\right](t)+\frac{5}{17}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z-1)^2+1}\right](t)\\
&= \frac{1}{4}e^t-\frac{13}{68}e^{-3t}-\frac{1}{17}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z-1+1}{(z-1)^2+1}\right](t)\\
&\quad +\frac{5}{17}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z-1)^2+1}\right](t)\\
&= \frac{1}{4}e^t-\frac{13}{68}e^{-3t}-\frac{1}{17}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z-1}{(z-1)^2+1}\right](t)\\
&\quad +\frac{4}{17}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z-1)^2+1}\right](t)\\
&= \frac{1}{4}e^t-\frac{13}{68}e^{-3t}-\frac{1}{17}e^t\cos t+\frac{4}{17}e^t\sin t.
\end{aligned}$$

1. (**2 puntos**) Calcular $a\in\mathbb{R}$ para que la ecuación

$$z^3+2z+x+y^2-\cos(x-y+z)=a$$

defina, en un entorno de $(0,0,0)$, una función implícita $z=f(x,y)$ diferenciable en un cierto entorno de $(0,0)$. Calcular el polinomio de Taylor de orden dos de tal función f alrededor del punto $(0,0)$.

Solución. Dada $F(x,y,z)=z^3+2z+x+y^2-\cos(x-y+z)$, se tiene que $F(0,0,0)=-1$ y para que sea solución de la ecuación $a=-1$. Por otra parte, F es de clase C^∞ en todo $\mathbb{R}^3$ y además

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=3z^2+2+\sin(x+y+z),$$

de donde

$$\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0)=2\neq 0.$$

Por lo tanto existe un entorno de $(0,0)$ y una función $z = f(x,y)$ definida en ese entorno, de clase C^∞ y tal que

$$f(x,y)^3 + 2f(x,y) + x + y^2 - \cos(x + y + f(x,y)) = -1$$

para todo punto (x,y) en el entorno. Además $f(0,0) = 0$. Ahora derivamos implícitamente

$$3f(x,y)^2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 1 + \sin(x + y + f(x,y))\left(1 + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = 0,$$

y

$$3f(x,y)^2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + 2y + \sin(x + y + f(x,y))\left(1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = 0.$$

Sustituyendo en $(0,0)$ tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Volvemos a derivar implícitamente

$$\begin{aligned} 0 &= 6f(x,y)\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + 3f(x,y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \\ &\quad + \cos(x + y + f(x,y))\left(1 + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \sin(x + y + f(x,y))\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 6f(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + 3f(x,y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) \\ &\quad + \cos(x + y + f(x,y))\left(1 + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\left(1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) + \sin(x + y + f(x,y))\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 6f(x,y)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2 + 3f(x,y)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + 2 \\ &\quad + \cos(x + y + f(x,y))\left(1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2 + \sin(x + y + f(x,y))\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y). \end{aligned}$$

De nuevo sustituyendo en $(0,0)$, tenemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -\frac{1}{8}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = -\frac{1}{4}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -\frac{3}{2}.$$

El polinomio de Taylor es

$$p_2(x,y) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{4}xy - \frac{3}{4}y^2.$$

5. (**1.5 puntos**) Calcular el volumen de $\mathbb{R}^3$ delimitado superiormente por la superficie $z = 6 - 2x^2 - y^2$ e inferiormente por $z = x^2 + y^2$.

Solución. La intersección de ambas superficies es

$$6 - 2x^2 - y^2 = x^2 + y^2,$$

es decir

$$1 = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3},$$

por lo que el volumen se puede calcular como

$$\begin{aligned} V &= \int\int_\Omega (6 - 2x^2 - y^2)dxdy - \int\int_\Omega (x^2 + y^2)dxdy \\ &= \int\int_\Omega (6 - 3x^2 - 2y^2)dxdy, \end{aligned}$$

donde $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \leq 1\}$, es decir, una elipse. Hacemos el cambio

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}u, \\ y = \sqrt{3}v, \end{cases}$$

con determinante del Jacobiano igual a $\sqrt{6}$. Haciendo este cambio de variable tenemos

$$V = \int\int_\Lambda 6(1 - u^2 - v^2)\sqrt{6}dudv,$$

donde $\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$, es decir, un círculo de radio 1. Tomando ahora coordenadas polares

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} 6\sqrt{6}(r - r^3)d\varphi \right) dr \\ &= \int_0^1 12\sqrt{6}\pi(r - r^3)dr = 3\sqrt{6}\pi. \end{aligned}$$