

Ecuaciones Diferenciales y Transformada de Laplace

José Salvador Cánovas Peña

25 de febrero de 2025

Índice general

1. Ecuaciones Diferenciales y Transformada de Laplace	5
1.1. Introducción	5
1.2. Funciones continuas a trozos. Función de Heaviside	5
1.3. Definición de Transformada de Laplace	6
1.3.1. Definición y primeros ejemplos	6
1.4. Propiedades de la Transformada de Laplace	8
1.4.1. Linealidad	8
1.4.2. Transformada de la derivada	9
1.4.3. Primer Teorema de Traslación	10
1.4.4. Segundo Teorema de Traslación	11
1.4.5. Derivabilidad de la Transformada de Laplace	12
1.5. Transformada de Laplace inversa	12
1.5.1. Inyectividad de la Transformada de Laplace	12
1.5.2. Transformada de Laplace inversa	13
1.6. Ejercicios	15
2. Ecuaciones y sistemas lineales: generalidades	17
2.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales	19
2.2. Ecuaciones lineales de orden n	20
3. Resolviendo sistemas mediante la transformada de Laplace	21
3.1. Una primera aproximación	21
3.2. Sistemas lineales generales	21
3.3. Problemas con funciones discontinuas	23
3.4. Estabilidad	24
3.5. Estabilidad de sistemas lineales	26
3.6. ¿Por qué un sistema estable es útil en ingeniería?	30
3.7. Funciones de transferencia. Estabilidad y control de sistemas lineales	31
3.7.1. Respuesta a una señal constante	33
3.7.2. Respuesta a una señal sinusoidal	34
3.7.3. Respuesta a una señal periódica	37
3.8. Ejercicios	39
4. Un poco de Python	43
4.1. Transformada de Laplace	43
4.2. Transformada de Laplace inversa	44
4.3. Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.	45
4.4. Resolución de ecuaciones diferenciales con entradas periódicas	47

Capítulo 1

Ecuaciones Diferenciales y Transformada de Laplace

1.1. Introducción

Vamos a desarrollar un tema sobre la Transformada de Laplace y su aplicación a la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. La Transformada de Laplace es una herramienta que permite transformar los problemas anteriores en problemas algebraicos y, una vez resuelto este problema algebraico más fácil a priori de resolver, calcular a partir de la solución del problema algebraico la solución del problema de ecuaciones diferenciales.

A modo de introducción histórica, diremos que la expresión

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt} f(t)$$

fué acuñada en primer lugar por Pierre-Simon Laplace en 1782. Su utilización dentro de la técnica se debe en su forma rigurosa a Thomas Bromwich, el cual formalizó utilizando las funciones de variable compleja y la Transformada de Laplace un cálculo operacional inventado por Oliver Heaviside para la resolución de circuitos eléctricos.

1.2. Funciones continuas a trozos. Función de Heaviside

Previamente a introducir la Transformada de Laplace, hemos de concretar qué tipo de funciones vamos a considerar para nuestros problemas. Las funciones que van a ser de importancia dentro de la ingeniería son aquellas llamadas *continuas a trozos*, que a continuación definimos.

Dados los números reales $a < b$, se dice que la función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es *continua a trozos* si existe una partición de $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, de manera que f es continua en (t_i, t_{i+1}) , $0 \leq i < n$, y existen y son finitos los límites laterales de f en cada uno de los puntos t_i , $0 \leq i \leq n$. Una función $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es *continua a trozos* si para cada intervalo compacto $[a, b] \subset [0, +\infty)$ se verifica que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua a trozos.

Uno de los primeros ejemplos de función continua a trozos es

$$h_a : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C},$$

donde a es un número real mayor o igual que cero. Esta función está definida por

$$h_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ 1 & \text{si } t \geq a, \end{cases}$$

y se conoce en ingeniería con el nombre de *función de Heaviside*. La función de Heaviside realiza la función de interruptor, de manera que si $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua se tiene que $h_a \cdot f$ es la función

$$(h_a \cdot f)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ f(t) & \text{si } t \geq a, \end{cases}$$

lo que representa que la función h_a “enciende” a la función o señal f en el instante de tiempo $t = a$. Adicionalmente, si consideramos $0 \leq a < b$ y la función $h_a - h_b : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ésta tiene la forma

$$(h_a - h_b)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [a, b), \\ 1 & \text{si } t \in [a, b). \end{cases}$$

Así, si tomamos ahora la función $h_a \cdot f - h_b \cdot f = (h_a - h_b) \cdot f$, la función h_b tiene el efecto físico de “apagar” la función f , ya que

$$((h_a - h_b) \cdot f)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ f(t) & \text{si } a \leq t < b, \\ 0 & \text{si } b \leq t. \end{cases}$$

Además de estas interpretaciones físicas, la función de Heaviside es útil para describir funciones continuas a trozos que a su vez sean continuas por la derecha. Por ejemplo, la función

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ t - 1 & \text{si } 1 \leq t < 3, \\ \sin t & \text{si } 3 \leq t, \end{cases}$$

puede escribirse como

$$f(t) = t \cdot [h_0(t) - h_1(t)] + (t - 1) \cdot [h_1(t) - h_3(t)] + \sin t \cdot h_3(t).$$

Esta forma de describir funciones continuas a trozos será útil en los siguientes apartados del tema debido a las propiedades de la Transformada de Laplace que posteriormente estudiaremos. Por otra parte hemos de comentar que al venir la Transformada de Laplace definida como una integral, la condición de ser la función continua por la derecha es irrelevante y todas las funciones pueden tomarse de esta forma.

1.3. Definición de Transformada de Laplace

1.3.1. Definición y primeros ejemplos

Sea $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, esto es, existe la integral de Riemann de f en todo intervalo compacto $[0, a] \subset [0, +\infty)$. Se define la *Transformada de Laplace* de f en z como

$$\mathcal{L}[f](z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt, \quad (1.1)$$

siempre que tal integral impropia exista. Como el alumno debe conocer, la convergencia de la integral

$$\int_0^{+\infty} |e^{-zt} f(t)| dt$$

implica la convergencia de la integral (1.1). A continuación vamos a ver ejemplos de Transformadas de Laplace de algunas funciones elementales.

- **Función de Heaviside.** Sea $a \geq 0$ y consideremos la función de Heaviside h_a definida anteriormente. Entonces para todo $z > 0$ $\operatorname{Re} z > 0$ se verifica

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[h_a](z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt} h_a(t) dt = \int_a^{+\infty} e^{-zt} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x e^{-zt} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-za}}{z} - \frac{e^{-zx}}{z} \right) = \frac{e^{-za}}{z}. \end{aligned}$$

En particular, cuando $a = 0$ obtenemos

$$\mathcal{L}[h_0](z) = \frac{1}{z}.$$

- **Función exponencial.** Sea $\omega \in \mathbb{R}$ y consideremos la función exponencial $f(t) = e^{\omega t}$. Se verifica entonces para todo $z > \omega$ que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt} e^{\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(z-\omega)t} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-(z-\omega)t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{z-\omega} - \frac{e^{-(z-\omega)x}}{z-\omega} \right) = \frac{1}{z-\omega}. \end{aligned}$$

En particular, si $\omega = 0$ se verifica que $f(t) = 1$, con lo que nuevamente

$$\mathcal{L}[h_0](z) = \frac{1}{z}.$$

- **Potencias.** Sea n un número natural y consideremos la función $f_n(t) = t^n$. Vamos ver que la Transformada de Laplace de f_n viene dada por la expresión

$$\mathcal{L}[f_n](z) = \frac{n!}{z^{n+1}}.$$

Para ver esto procedemos por inducción calculando en primer lugar la Transformada de f_1 . Integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_1](z) &= \int_0^{+\infty} e^{-tz} t dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-tz} t dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x e^{-xz}}{z} + \frac{1 - e^{-xz}}{z^2} \right) = \frac{1}{z^2}, \end{aligned}$$

A continuación, por la hipótesis de inducción supongamos que $\mathcal{L}[f_n](z) = n!/z^{n+1}$ y calculemos la Transformada de f_{n+1} . Consideremos

$$\mathcal{L}[f_{n+1}](z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} t^{n+1} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-tz} t^{n+1} dt. \quad (1.2)$$

Tomando partes en la expresión anterior

$$\int_0^x e^{-tz} t^{n+1} dt = \frac{x^{n+1} e^{-xz}}{-z} + \frac{n+1}{z} \int_0^x e^{-tz} t^n dt. \quad (1.3)$$

Combinando (1.2) y (1.3) concluimos que

$$\mathcal{L}[f_{n+1}](z) = \frac{n+1}{z} \mathcal{L}[f_n](z) = \frac{(n+1)!}{z^{n+2}}.$$

1.4. Propiedades de la Transformada de Laplace

Una vez estudiada la definición de Transformada de Laplace y caracterizadas algunas condiciones para que una función f tenga Transformada de Laplace $\mathcal{L}[f]$ definida en un dominio $\mathcal{D}_f$, pasamos a estudiar algunas propiedades básicas de esta transformada integral. La primera propiedad que vamos a estudiar es la linealidad.

1.4.1. Linealidad

Esta propiedad será muy útil para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, a la vez que permitirá el cálculo de la transformada de algunas funciones.

Theorem 1 Sean $f, g \in \mathcal{E}$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces para todo $z \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ se verifica que

$$\mathcal{L}[af + bg](z) = a\mathcal{L}[f](z) + b\mathcal{L}[g](z).$$

Proof. La demostración se sigue inmediatamente de la linealidad de la integral. Consideremos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[af + bg](z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt} (af(t) + bg(t)) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-zt} (af(t) + bg(t)) dt \\ &= a \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-zt} f(t) dt + b \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-zt} g(t) dt \\ &= a\mathcal{L}[f](z) + b\mathcal{L}[g](z), \end{aligned}$$

lo que concluye la prueba. ■

A partir de la linealidad de la Transformada de Laplace podemos obtener nuevas Transformadas de funciones elementales, como muestran los siguientes ejemplos.

■ **Función seno.** Sea $\omega \in \mathbb{R}$ y consideremos la función

$$f(t) = \sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](z) &= \frac{1}{2i} (\mathcal{L}[e^{i\omega t}](z) - \mathcal{L}[e^{-i\omega t}](z)) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z - i\omega} - \frac{1}{z + i\omega} \right) = \frac{\omega}{z^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

siempre que $z > 0$. Nótese que aquí hemos calculado la transformada de las funciones $e^{i\omega t}$ y $e^{-i\omega t}$ que tienen exponentes complejos de forma análoga a cuando los tiene reales. Este detalle técnico es cierto, pero su demostración excede los contenidos de este curso.

- **Función coseno.** Sea $\omega \in \mathbb{R}$ y consideremos la función

$$f(t) = \cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}.$$

De forma análoga a la anterior se obtiene que

$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{z}{z^2 + \omega^2}$$

siempre que $z > 0$.

- **Función seno hiperbólico.** Sea $\omega \in \mathbb{R}$ y consideremos la función

$$f(t) = \sinh(\omega t) = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](z) &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}[e^{\omega t}](z) - \mathcal{L}[e^{-\omega t}](z)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - \omega} - \frac{1}{z + \omega} \right) = \frac{\omega}{z^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

si $z > |\omega|$.

- **Función coseno hiperbólico.** Sea $\omega \in \mathbb{R}$ y consideremos la función

$$f(t) = \cosh(\omega t) = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}.$$

De forma análoga a la anterior se obtiene que

$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{z}{z^2 - \omega^2}$$

siempre que $z > |\omega|$.

1.4.2. Transformada de la derivada

Se dice que la función $f \in \mathcal{E}$ es derivable a trozos si es continua, existen las derivadas laterales de f en cada punto de $[0, +\infty)$ y en cada subintervalo $[a, b] \subset [0, +\infty)$ existen a lo sumo una cantidad finita de puntos donde f no es derivable. Si f es derivable a trozos, definimos $f' : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como $f'(x) = f'_+(x)$ para todo $x \in [0, +\infty)$. Es claro entonces que f' es una función continua a trozos, que coincidirá en casi todos los puntos con la derivada ordinaria. Se tiene entonces el siguiente resultado.

Theorem 2 *Bajo las condiciones anteriores se verifica para todo $z \in \mathcal{D}_f$*

$$\mathcal{L}[f'](z) = z\mathcal{L}[f](z) - f(0). \quad (1.4)$$

Proof. Sean $z \in \mathcal{D}_f$ y $x > 0$ y consideremos

$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x$$

los puntos de discontinuidad de f' en el intervalo $(0, x)$ y fijemos $x_0 = 0$ y $x_n = x$. Entonces, dividiendo el intervalo de integración y utilizando la fórmula de integración por partes

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{-zt} f'(t) dt &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-zt} f'(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^n [e^{-zx_i} f(x_i) - e^{-zx_{i-1}} f(x_{i-1})] + z \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{-zt} f(t) dt \\ &= e^{-zx} f(x) - f(0) + z \int_0^x e^{-zt} f(t) dt.\end{aligned}$$

Tomando límites cuando $x \rightarrow +\infty$, y teniendo en cuenta que $z \in \mathcal{D}_f$ y que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-zx} f(x) = 0,$$

y obtenemos inmediatamente (1.4). ■

Procediendo por inducción a partir de la fórmula (1.4) se prueba una fórmula general para la derivada k -ésima de la función f en el caso de que $f^{(k-1)}$ sea derivable a trozos para $k \in \mathbb{N}$. Esta fórmula viene dada para todo $z \in \mathcal{D}_f$ por

$$\mathcal{L}[f^{(k)}](z) = z^k \mathcal{L}[f](z) - z^{k-1} f(0) - z^{k-2} f'(0) - \dots - z f^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0), \quad (1.5)$$

donde las derivadas sucesivas de f en 0 se entienden como derivadas por la derecha.

Las fórmulas 1.4 y 1.5 serán claves para resolver ecuaciones y sistemas diferenciales lineales con coeficientes constantes, como veremos en el apartado de aplicaciones de este tema.

1.4.3. Primer Teorema de Traslación

Fijemos un número real a y consideremos $f \in \mathcal{E}$. El primer teorema de desplazamiento hace referencia a la transformada de la función $e^{at} f(t)$ y afirma lo siguiente.

Theorem 3 *Bajo las condiciones anteriores*

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)](z) = \mathcal{L}[f](z - a) \quad (1.6)$$

para todo $z \in \mathcal{D}_f + a := \{\omega + a : \omega \in \mathcal{D}_f\}$.

Proof. Sea

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} e^{at} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-(z-a)t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(z-a)t} f(t) dt,$$

de donde se deduce inmediatamente (1.6). ■

A partir de este resultado podemos obtener las Transformadas de las funciones siguientes:

- $f(t) = e^{at} \sin(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$, cuya Transformada de Laplace para todo número complejo z tal que $z > a$ es

$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{\omega}{(z - a)^2 + \omega^2}.$$

- $f(t) = e^{at} \cos(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$, cuya Transformada de Laplace para todo número complejo z tal que $z > a$ es

$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{z - a}{(z - a)^2 + \omega^2}.$$

- $f(t) = e^{at} \sinh(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$. Si $\operatorname{Re} z > |\omega| + a$, entonces

$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{\omega}{(z - a)^2 - \omega^2}.$$

- $f(t) = e^{at} \cosh(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$. Si $\operatorname{Re} z > |\omega| + a$, entonces

$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{z - a}{(z - a)^2 - \omega^2}.$$

- $f(t) = e^{at} t^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{n!}{(z - a)^{n+1}}$$

siempre que $z > a$.

1.4.4. Segundo Teorema de Traslación

Sea ahora $a > 0$ un número real y supongamos que $f \in \mathcal{E}$ está definida por $f(t) = 0$ para todo $t < 0$. Recordemos que h_a es la función de Heaviside. Entonces tenemos el siguiente resultado.

Theorem 4 *Bajo las anteriores condiciones se verifica para todo $z \in \mathcal{D}_f$*

$$\mathcal{L}[h_a(t)f(t-a)](z) = e^{-az} \mathcal{L}[f](z). \quad (1.7)$$

Proof. Tomamos

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-zt} h_a(t) f(t-a) dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-zt} h_a(t) f(t-a) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x e^{-zt} f(t-a) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{x-a} e^{-z(s+a)} f(s) ds \\ &= e^{-za} \int_0^{+\infty} e^{-zs} f(s) ds, \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $s = t - a$. De aquí se obtiene inmediatamente (1.7). ■

Este resultado es útil para obtener la Transformada de Laplace de funciones continuas a trozos. Por ejemplo consideremos la función

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 0 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Esta función puede describirse como

$$f(t) = t[h_0(t) - h_1(t)].$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](z) &= \mathcal{L}[h_0(t)t](z) - \mathcal{L}[h_1(t)t](z) = \mathcal{L}[t](z) - e^{-z}\mathcal{L}[t+1](z) \\ &= \frac{1}{z^2} - e^{-z}\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2} - e^{-z}\frac{z+1}{z^2},\end{aligned}$$

para todo $z > 0$.

1.4.5. Derivabilidad de la Transformada de Laplace

Consideremos una función $f \in \mathcal{E}$ y su Transformada de Laplace $\mathcal{L}[f]$.

Theorem 5 *Bajo la notación anterior, la función $\mathcal{L}[f]$ es derivable para todo z de su dominio y además se verifica*

$$\frac{d}{dz}\mathcal{L}[f](z) = -\int_0^{+\infty} te^{-zt}f(t)dt.$$

En las condiciones del resultado anterior, obtenemos por inducción la fórmula para la derivada n -ésima de la Transformada de Laplace

$$\frac{d^n}{dz^n}\mathcal{L}[f](z) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-zt}f(t)dt.$$

Claramente la demostración de este resultado no es apropiada para hacerla en clase, pues presupone muchos contenidos que no hemos explicado en la misma. Nos centraremos en que el alumno entienda el resultado y sepa aplicarlo. Por ejemplo, calculando las Transformadas de las siguientes funciones.

- $f(t) = t^n \sin(at)$, $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$. Se tiene siempre que $z > 0$ la relación

$$\mathcal{L}[f](z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} \mathcal{L}[\sin(at)](z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{a}{z^2 + a^2} \right).$$

- $f(t) = t^n \cos(at)$, $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$. Se tiene análogamente siempre que $z > 0$

$$\mathcal{L}[f](z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} \mathcal{L}[\cos(at)](z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{z}{z^2 + a^2} \right).$$

De forma similar se obtienen fórmulas equivalentes para el coseno y seno hiperbólicos.

1.5. Transformada de Laplace inversa

1.5.1. Inyectividad de la Transformada de Laplace

Al intervenir en la definición de Transformada de Laplace la integración, está claro que puede haber infinitas funciones en $\mathcal{E}$ teniendo la misma Transformada, por lo que la ésta no será inyectiva. Sin embargo este problema puede paliarse en parte para así poder hablar de la Transformada inversa de una función holomorfa definida en un semiplano complejo. Como veremos en las aplicaciones del tema, este punto será de vital importancia.

Consideremos $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ una función localmente integrable. Diremos que f es *nula* o *nula casi por todas partes* si para todo $x \in (0, +\infty)$ se verifica que

$$\int_0^x |f(t)| dt = 0.$$

Dos funciones $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ localmente integrables se dirán *iguales casi por todas partes* si $f - g$ es nula. Se tiene entonces el siguiente resultado.

Proposition 6 Sean $f, g \in \mathcal{E}$ iguales casi por todas partes. Entonces $\mathcal{L}[f](z) = \mathcal{L}[g](z)$ para todo $z \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.

Proof. Sea $x > 0$ y $z \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. Por el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral existe $\rho \in (0, x)$ tal que

$$\int_0^x |e^{-zt} f(t) - e^{-zt} g(t)| dt = e^{-\rho z} \int_0^x |f(t) - g(t)| dt = 0.$$

Así

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}[f](z) - \mathcal{L}[g](z)| &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \int_0^x e^{-zt} f(t) dt - \int_0^x e^{-zt} g(t) dt \right| \\ &\leq \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\rho z} \int_0^x |f(t) - g(t)| dt = 0, \end{aligned}$$

lo que termina la demostración. ■

El siguiente resultado establece una especie de recíproco para el resultado anterior.

Theorem 7 (Lerch) Sean $f, g \in \mathcal{E}$ tales que $\mathcal{L}[f](z) = \mathcal{L}[g](z)$ para todo $z \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. Entonces f y g son iguales salvo a lo mejor en los puntos de discontinuidad de ambas, con lo que además $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$.

La demostración de este resultado no la haremos en clase y no lo hemos incluido en la lección ya que no puede obtenerse de forma autocontenida con las técnicas que tenemos a nuestra disposición.

1.5.2. Transformada de Laplace inversa

Consideremos la función

$$\mathcal{L} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{E}).$$

El Teorema 7 permite definir clases de equivalencia en $\mathcal{E}$ del siguiente modo. Dadas $f, g \in \mathcal{E}$ se dirá que ambas están relacionadas, $f \sim g$ si y sólo si son iguales salvo a lo sumo en los puntos de discontinuidad de ambas. Podemos definir entonces la Transformada de Laplace inversa

$$\mathcal{L}^{-1} : \mathcal{L}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E} / \sim$$

para $F \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ como $\mathcal{L}^{-1}[F] = [f]$ donde $[f]$ denota la clase de $f \in \mathcal{E}$ de manera que $\mathcal{L}[f] = F$. En general con nuestros alumnos tenderemos a identificar clases con funciones que normalmente podrán ser calculadas. Así diremos que dada $F \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ su Transformada inversa es una función $\mathcal{L}^{-1}[F](t) = f(t)$ de forma que $\mathcal{L}[f] = F$, aunque está perfectamente claro que tal f no es única.

En este contexto, destacamos las siguiente propiedades de Transformada inversa que serán especialmente interesantes a la hora de las aplicaciones.

- **Linealidad.** Dadas $F, G \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se verifica

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha F + \beta G](t) = \alpha \mathcal{L}^{-1}[F](t) + \beta \mathcal{L}^{-1}[G](t).$$

- **Traslación.** Dada $F \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ y $a > 0$ se cumple la relación

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-az}F(z)](t) = h_a(t)\mathcal{L}^{-1}[F](t-a).$$

Estas propiedades son particularmente interesantes a la hora de obtener Transformadas inversas de Laplace una vez conocidas las Transformadas directas. Tenemos los siguientes ejemplos.

Dada la función $F(z) = \frac{1}{z-2}$, tenemos de forma inmediata que

$$\mathcal{L}^{-1}[F](t) = e^{2t}.$$

Si la función es $F(z) = \frac{1}{z^4}$, tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^4}\right](t) = \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{z^4}\right](t) = \frac{t^3}{6}.$$

Si ahora $G(z) = \frac{1}{(z-2)^4}$ razonamos como sigue. Nos damos cuenta de que $G(z) = F(z-2)$ donde F es la función del ejemplo anterior. Entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z-2)^4}\right](t) = \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{(z-2)^4}\right](t) = \frac{t^3 e^{2t}}{6}.$$

Tomamos ahora la función $F(z) = \frac{z+2}{z^2+9}$ y procedemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z+2}{z^2+9}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{z^2+9}\right](t) + \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{z^2+9}\right](t) = \cos(3t) + \frac{2}{3}\sin(3t).$$

mientras que si $G(z) = \frac{z+2}{(z-1)^2+9}$ tomamos ideas del ejemplo anterior y calculamos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z+2}{(z-1)^2+9}\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z-1+3}{(z-1)^2+9}\right](t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z-1}{(z-1)^2+9}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(z-1)^2+9}\right](t) \\ &= e^t \cos(3t) + e^t \sin(3t).\end{aligned}$$

No siempre las funciones permiten obtener la transformada de forma tan inmediata. Por ejemplo, si $F(z) = \frac{1}{z^2(z^2+2z+2)}$ calculamos los ceros del denominador resolviendo

$$z^2(z^2+2z+2) = 0,$$

con soluciones $z = 0$ (doble) y $-1 \pm i$. Descomponemos en fracciones simples reales

$$\frac{1}{z^2(z^2+2z+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{2}\frac{z+1}{(z+1)^2+1},$$

y por linealidad

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z+2}{(z+1)^2+9}\right](t) &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z+1}{(z+1)^2+1}\right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}e^{-t}\cos t.\end{aligned}$$

Las fracciones simples también se pueden tomar complejas, es decir

$$\frac{1}{z^2(z^2+2z+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{z+1-i} + \frac{1}{4}\frac{1}{z+1+i}$$

y

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z+2}{(z+1)^2+9}\right](t) &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z+1-i}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z+1+i}\right] \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4}e^{(-1+i)t} + \frac{1}{4}e^{(-1-i)t} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{e^{-t}e^{it} + e^{-t}e^{-it}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}e^{-t}\cos t.\end{aligned}$$

Por último, si tenemos funciones de la forma $F(z) = \frac{e^{-4z}}{z^3}$ usamos el segundo teorema de la traslación para escribir

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-4z}}{z^3}\right](t) = h_4(t)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^3}\right](t-4),$$

y como

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^3}\right](t) = \frac{t^2}{2},$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-4z}}{z^3}\right](t) &= h_4(t)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^3}\right](t-4) \\ &= h_4(t)\frac{(t-4)^2}{2},\end{aligned}$$

y como sabemos

$$h_4(t)\frac{(t-4)^2}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 4, \\ \frac{(t-4)^2}{2} & \text{si } t \geq 4. \end{cases}$$

1.6. Ejercicios

1. Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones

$$(a) f(t) = \sin(3t) \quad (b) f(t) = e^{5t} \quad (c) f(t) = e^{5t}\cos 3t \quad (d) f(t) = te^t$$

$$(e) f(t) = t^3 - t \quad (f) f(t) = \sinh t \quad (g) f(t) = \cos t \sin t \quad (h) f(t) = e^t \cos t \sin(2t)$$

2. Dada la función $f(t)$, definimos la función $g(t) = f(at)$, que puede verse como un cambio de escala en t . Comprobar que

$$\mathcal{L}[g](z) = \mathcal{L}[f(at)](z) = \frac{1}{a} \mathcal{L}[f](z/a).$$

Utilizar dicha fórmula para calcular la transformada de la función $\sin(at)$ a partir de

$$\mathcal{L}[\sin t](z) = \frac{1}{1 + z^2}.$$

3. Calcular la transformada de Laplace de la función,

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

4. Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones.

$$(a) f(t) = |\sin t| \quad (b) g(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ t, & \text{si } t > 1 \end{cases} \quad (c) h(t) = \begin{cases} t^2 - 1, & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 2, & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

5. Calcular la transformada inversa de Laplace de las funciones siguientes

$$(a) F(z) = \frac{z^2}{1 + z^3} \quad (b) F(z) = \frac{1}{(z - 1)(z^2 - 2)} \quad (c) F(z) = \frac{z + 7}{z^2 + 2z + 5}$$

$$(d) F(z) = \frac{1}{(z + 1)(z + 2)(z^2 + 2z + 10)}$$

6. Calcular la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

$$(a) F(z) = \frac{ze^{-\pi z}}{z^2 + 2z + 5} \quad (b) F(z) = \frac{(z - 1)e^{-z}}{z^3 + 2} \quad (c) F(z) = \frac{z + 1}{e^z z^2 (z^2 + 9)} \quad (d) F(z) = \frac{z + 1}{z^4}$$

7. Calcular las transformadas inversas de Laplace de las funciones:

$$(a) F(z) = \frac{e^{-az}}{1 + z^2}, \quad (a > 0) \quad (b) F(z) = \frac{z}{(z - 1)(z + 2)^2} \quad (c) F(z) = \frac{e^{-z}}{z} + \frac{z - 1}{z^2 + 2}$$

$$(d) F(z) = \frac{z^2}{(z - 2)(z^3 - 1)}$$

Capítulo 2

Ecuaciones y sistemas lineales: generalidades

Para nosotros, un sistema de ecuaciones diferenciales es una expresión de la forma

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \dots, y_m, y'_m) = 0; \\ F_2(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \dots, y_m, y'_m) = 0; \\ \vdots \\ F_m(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \dots, y_m, y'_m) = 0; \end{cases}$$

donde $y_1, y_2, \dots, y_m$ son funciones reales a determinar que dependen de x y $F_i : A \subseteq \mathbb{R}^{1+2m} \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, son funciones reales de varias variables. Se suele suponer que hay igual número de ecuaciones que de incógnitas de manera que todas las ecuaciones son independientes, es decir, ninguna puede deducirse de las demás. Estamos interesados en aquellos sistemas de ecuaciones diferenciales en los que podemos despejar la primera derivada de cada una de las funciones incógnita, es decir, sistemas de la forma

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m); \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m); \\ \vdots \\ y'_m = f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m); \end{cases}$$

donde $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^{1+m} \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, son funciones reales. Ejemplos de estos sistemas son

$$\begin{cases} y'_1 = xy_1 + y_2^2; \\ y'_2 = x + y_1 + y_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'_1 = xy_1 + y_2^2 - y_3; \\ y'_2 = x + y_1 + y_2y_3; \\ y'_3 = y_1y_2y_3; \end{cases}$$

En general la resolución de estos sistemas no es posible, salvo en casos excepcionales. Sólo para el caso de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, que veremos un poco más tarde existen algoritmos que permiten el cálculo explícito de las soluciones. Sin embargo, es relativamente sencillo saber cuándo un sistema tiene solución, o más precisamente cuándo un problema de condiciones iniciales asociado tiene solución.

Primero claro está, debemos definir qué entendemos por un problema de condiciones iniciales para sistemas de ecuaciones diferenciales. Dicho problema es un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m); \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m); \\ \vdots \\ y'_m = f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m); \\ y_1(x_0) = y_1, y_2(x_0) = y_2, \dots, y_m(x_0) = y_m \end{cases}$$

junto con las condiciones $y_i(x_0) = y_i$, donde $x_0, y_1, y_2, \dots, y_m$ son números reales. Por ejemplo

$$\begin{cases} y'_1 = xy_1 + y_2^2 - y_3; \\ y'_2 = x + y_1 + y_2y_3; \\ y'_3 = y_1y_2y_3; \\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1, \end{cases}$$

es un problema de condiciones iniciales. Nótese que todas las condiciones iniciales implican el conocimiento de la función en 0, es decir, lo siguiente

$$\begin{cases} y'_1 = xy_1 + y_2^2 - y_3; \\ y'_2 = x + y_1 + y_2y_3; \\ y'_3 = y_1y_2y_3; \\ y_1(0) = 2, y_2(1) = 0, y_3(0) = 1, \end{cases}$$

no sería un problema de condiciones iniciales, ya que conocemos y_2 en 1 e y_1 e y_3 en 0.

Para el caso de los problemas de condiciones iniciales para sistemas de ecuaciones diferenciales tenemos el siguiente resultado análogo al de ecuaciones diferenciales de orden uno.

Theorem 8 *Sea el problema de condiciones iniciales*

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m); \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m); \\ \vdots \\ y'_m = f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m); \\ y_1(x_0) = y_1, y_2(x_0) = y_2, \dots, y_m(x_0) = y_m \end{cases}$$

donde $(x_0, y_1, \dots, y_m) \in A$, $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^{1+m} \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, son funciones reales continuas en el abierto A . Supongamos además que las funciones $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ existen y son continuas en A . Entonces existe una solución del problema de condiciones iniciales anterior $y_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, definido en un intervalo abierto I de la recta real.

Este resultado es fácil de aplicar. Por ejemplo el problema que consideramos anteriormente

$$\begin{cases} y'_1 = xy_1 + y_2^2 - y_3; \\ y'_2 = x + y_1 + y_2y_3; \\ y'_3 = y_1y_2y_3; \\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 0, y_3(0) = 1, \end{cases}$$

es tal que $f_1(x, y_1, y_2, y_3) = xy_1 + y_2^2 - y_3$, $f_2(x, y_1, y_2, y_3) = x + y_1 + y_2y_3$ y $f_3(x, y_1, y_2, y_3) = y_1y_2y_3$ son funciones definidas en $\mathbb{R}^4$, continuas y las derivadas parciales de cada función respecto de y_1, y_2 e y_3 son continuas. Entonces este problema de condiciones iniciales tiene

2.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

[illegible]
$$\mathbf{A}(x) = (a_{ij}(x))_{1 \leq i \leq n}^{1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{b}(x) = (b_1(x), b_2(x), \dots, b_n(x))^t = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \dots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{b}(x), \quad (2.1)$$
$$\mathbf{y}' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n)^t = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}.$$
$$\begin{cases} y_1' = xy_1 + e^x y_2 + 1 - x^2, \\ y_2' = y_1 - y_2 + e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'_1 = y_1 + x^2 y_2 + y_3 + 1 - x^2, \\ y'_2 = x y_1 - x^2 y_2 + e^{-x}, \\ y'_3 = y_1 + (1 - x) y_2 + y_3 \end{cases}$$

son lineales. Un sistema se dirá *homogéneo* si $\mathbf{b}(x) = (0, 0, \dots, 0)^t$, es decir, el sistema

$$\begin{cases} y'_1 = y_1 + x^2 y_2 + y_3, \\ y'_2 = x y_1 - x^2 y_2, \\ y'_3 = y_1 + (1 - x) y_2 + y_3 \end{cases}$$

es homogéneo. Se dirá *no homogéneo* en caso contrario. Nosotros le prestaremos una gran atención a los sistemas lineales con coeficientes constantes. Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales se dirá de *coeficientes constantes* si la matriz $\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}$ es constante. Ejemplos de tales sistemas, tanto homogéneos como no homogéneos son

$$\begin{cases} y'_1 = 2y_1 + y_2 + 1 - x^2, \\ y'_2 = y_1 - y_2 + e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'_1 = 2y_1 - y_2 + y_3, \\ y'_2 = y_1 - y_2 + 7y_3, \\ y'_3 = -4y_1 + y_2 + y_3. \end{cases}$$

Veremos en los sucesivos temas cómo resolver estos últimos sistemas, dando un algoritmo que permitirá el cálculo de la solución general del mismo.

2.2. Ecuaciones lineales de orden n

Una ecuación diferencial de orden $n > 1$ es una expresión de la forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (2.2)$$

donde $f : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$. Esta ecuación puede transformarse en un sistema de ecuaciones diferenciales de orden uno de la manera siguiente. Introducimos las variables dependientes $y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', \dots, y_n = y^{(n-1)}$ y entonces la ecuación (2.2) puede escribirse como el sistema

$$\begin{cases} y'_1 = y_2, \\ y'_2 = y_3, \\ \dots \\ y'_{n-1} = y_n, \\ y'_n = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

Por ejemplo, la ecuación de orden tres

$$y^{(3)} = x + y y' - y'',$$

puede escribirse como el sistema

$$\begin{cases} y'_1 = y_2, \\ y'_2 = y_3, \\ y'_3 = x + y_1 y_2 - y_3. \end{cases}$$

De aquí se ve que para tener un problema de condiciones para la ecuación, necesitamos n condiciones iniciales $y_1(x_0) = y(x_0) = y_0, y_2(x_0) = y'(x_0) = y'_0, \dots, y_n(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, es decir, necesitamos conocer el valor de la función y de las sucesivas derivadas hasta la $n-1$ en un punto x_0 .

Capítulo 3

Resolviendo sistemas mediante la transformada de Laplace

3.1. Una primera aproximación

La Transformada de Laplace es una herramienta útil para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Como comentamos en la introducción del tema, estas ecuaciones aparecen de forma natural en la teoría de circuitos eléctricos. Para ilustrar el método, consideremos el siguiente ejemplo: la ecuación

$$y'' + y = \cos t \quad (3.1)$$

junto con las condiciones iniciales

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = 1. \quad (3.2)$$

Básicamente se trata de aplicar la Transformada de Laplace y sus propiedades a (3.1) de manera que teniendo en cuenta (3.2), nuestro problema se convierte en el problema algebraico

$$z^2 \mathcal{L}[y](z) - zy(0) - y'(0) + \mathcal{L}[y](z) = \frac{z}{z^2 + 1},$$

de donde

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{z^2 + z + 1}{(z^2 + 1)^2}.$$

Una vez obtenida $\mathcal{L}[y]$, hemos de usar la Transformada inversa para volver atrás y recuperar la solución del problema y . En este caso, $\mathcal{L}[y]$ satisface las condiciones del Teorema ??, por lo que

$$y(t) = (1 + t/2) \sin t,$$

una vez realizados los cálculos.

3.2. Sistemas lineales generales

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}(t) + \mathbf{f}(t) \quad (3.3)$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de n filas por n columnas con coeficientes reales, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^t$ donde f_i son funciones dadas e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$ es la función vectorial incógnita. Supongamos además las condiciones iniciales

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \quad (3.4)$$

donde $\mathbf{y}_0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)^t$ con y_i^0 números reales para $1 \leq i \leq n$. Sea

$$\mathcal{L}[\mathbf{y}](z) = (\mathcal{L}[y_1](z), \mathcal{L}[y_2](z), \dots, \mathcal{L}[y_n](z))^t.$$

Entonces, tomando la Transformada de Laplace en (3.3) y teniendo en cuenta (3.4) obtenemos que

$$z\mathcal{L}[\mathbf{y}](z) - \mathbf{y}_0 = \mathbf{A} \cdot \mathcal{L}[\mathbf{y}](z) + \mathcal{L}[\mathbf{f}](z),$$

de donde, si $\mathbf{I}_n$ denota la matriz identidad,

$$(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \cdot \mathcal{L}[\mathbf{y}](z) = \mathbf{y}_0 + \mathcal{L}[\mathbf{f}](z),$$

y de aquí

$$\mathcal{L}[\mathbf{y}](z) = (z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{y}_0 + \mathcal{L}[\mathbf{f}](z)). \quad (3.5)$$

Una vez calculada de este modo $\mathcal{L}[\mathbf{y}](z)$ obtendremos $\mathbf{y}$ tomando la Transformada inversa.

Por ejemplo consideremos el sistema

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

junto con las condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De (3.5)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathcal{L}[y_1](z) \\ \mathcal{L}[y_2](z) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} z-2 & 3 \\ -3 & z-2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{z} \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{z^2 - 4z + 13} \begin{pmatrix} z-2 & -3 \\ 3 & z-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2z+1}{z} \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2z^2-2}{z(z^2-4z+13)} \\ \frac{-z^2+8z+3}{z(z^2-4z+13)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces la solución del problema viene dada por

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2z^2-2}{z(z^2-4z+13)}\right](t) \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-z^2+8z+3}{z(z^2-4z+13)}\right](t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 28e^{2t} \cos(3t) + 16e^{2t} \sin(3t) - 2 \\ 28e^{2t} \sin(3t) - 16e^{2t} \cos(3t) + 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.3. Problemas con funciones discontinuas

Supongamos que el problema

$$\begin{cases} y'' + y = f(t); \\ y(0) = 0, y'(0) = 1; \end{cases}$$

viene dada ahora con la función discontinua

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < \pi, \\ \cos(2t) & \text{si } t \geq \pi. \end{cases}$$

Podemos escribir ahora

$$(z^2 + 1)\mathcal{L}[y](z) = 1 + \mathcal{L}[f](z).$$

Por otra parte

$$f(t) = t(h_0(t) - h_\pi(t)) + h_\pi(t) \cos(2t),$$

con lo que

$$\mathcal{L}[f](z) = \mathcal{L}[th_0(t)](z) + \mathcal{L}[th_\pi(t)](z) + \mathcal{L}[h_\pi(t) \cos(2t)](z).$$

Desarrollando cada sumando por separado, obtenemos

$$\mathcal{L}[th_0(t)](z) = 1/z^2.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[th_\pi(t)](z) &= \mathcal{L}[(t - \pi)h_\pi(t)](z) + \pi\mathcal{L}[h_\pi(t)](z) \\ &= \frac{e^{-\pi z}}{z^2} + \pi \frac{e^{-\pi z}}{z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[h_\pi(t) \cos(2t)](z) &= \mathcal{L}[h_\pi(t) \cos(2(t - \pi))](z) \\ &= e^{-\pi z} \frac{z}{z^2 + 4}. \end{aligned}$$

Combinando estas expresiones tenemos

$$(z^2 + 1)\mathcal{L}[f](z) + 1 = \frac{z^2 + 1}{z^2} + e^{-\pi z} \left(\frac{1}{z^2} + \frac{\pi}{z} + \frac{z}{z^2 + 4} \right).$$

Entonces

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{z^2 + 1}{z^2(z^2 + 1)} + e^{-\pi z} \left(\frac{1}{z^2(z^2 + 1)} + \frac{\pi}{z(z^2 + 1)} + \frac{z}{(z^2 + 4)(z^2 + 1)} \right),$$

y así

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{z^2} \right] (t) + \mathcal{L}^{-1} \left[e^{-\pi z} \frac{1}{z^2(z^2 + 1)} \right] (t) + \pi \mathcal{L}^{-1} \left[e^{-\pi z} \frac{1}{z(z^2 + 1)} \right] (t) \\ &\quad + \mathcal{L}^{-1} \left[e^{-\pi z} \frac{z}{(z^2 + 4)(z^2 + 1)} \right] (t) \\ &= t + f_1(t - \pi)h_\pi(t) + \pi f_2(t - \pi)h_\pi(t) + f_3(t - \pi)h_\pi(t), \end{aligned}$$

donde las funciones f_1 , f_2 y f_3 se determinan de la siguiente manera.

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{z^2(z^2 + 1)} \right] (t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{z^2} \right] (t) - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{z^2 + 1} \right] (t) = t - \sin t.$$

$$f_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{z(z^2 + 1)} \right] (t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{z} \right] (t) - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{z}{z^2 + 1} \right] (t) = 1 - \cos t.$$

$$\begin{aligned} f_3(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{z}{(z^2 + 4)(z^2 + 1)} \right] (t) \\ &= \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{z}{z^2 + 1} \right] (t) - \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{z}{z^2 + 4} \right] (t) = \frac{1}{3} \cos t - \frac{1}{3} \cos(2t). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= t + h_\pi(t)[(t - \pi) - \sin(t - \pi) + \pi - \pi \cos(t - \pi) + \frac{1}{3} \cos(t - \pi) - \frac{1}{3} \cos(2t - 2\pi)] \\ &= (1 - h_\pi(t))t + h_\pi(t)[2t + \sin t + (3\pi - 1)/3 \cos t - \cos(2t)/3], \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$y(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < \pi, \\ 2t + \sin t - (3\pi - 1)/3 \cos t - \cos(2t)/3 & \text{si } t \geq \pi. \end{cases}$$

3.4. Estabilidad

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$$

donde $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función con regularidad suficiente para satisfacer la unicidad de soluciones para un problema de condiciones iniciales o de Cauchy. Si la variable independiente t no aparece explícitamente en las ecuaciones del sistema, es decir, el sistema es de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$$

donde $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, se dice que el sistema de ecuaciones es autónomo. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x' = y - x + t, \\ y' = xy, \end{cases}$$

es no autónomo mientras que

$$\begin{cases} x' = y - x, \\ y' = xy, \end{cases} \quad (3.6)$$

o

$$y' = 4y(1 - y) \quad (3.7)$$

son autónomos. Veamos qué se entiende por estabilidad.

Definition 9 Sea el sistema autónomo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \quad (3.8)$$

donde $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ y $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función con funciones coordenadas $f_1, f_2, \dots, f_n$. Una solución $\mathbf{y}(t)$ de (3.8) definida para todo $t \geq 0$ se dice estable si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\mathbf{z}(t)$ es otra solución que cumple la condición $\|\mathbf{y}(0) - \mathbf{z}(0)\| < \delta$

entonces $\mathbf{z}(t)$ está definida para todo $t \geq 0$ y se verifica que $\|\mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$. Si además se verifica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)\| = 0$$

la solución $\mathbf{y}(t)$ se dirá asintóticamente estable. La solución $\mathbf{y}(t)$ se dirá inestable si no es estable.

Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$y' = y,$$

cuyas soluciones son de la forma

$$y(t) = y_0 e^{t-t_0}$$

para condiciones iniciales $y(t_0) = y_0$. Claramente, para dos soluciones $y_1(t)$ e $y_2(t)$ se verifica que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} |y_2(t) - y_1(t)| &= \lim_{t \rightarrow +\infty} |y_2(t_0)e^{t-t_0} - y_1(t_0)e^{t-t_0}| \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} |y_2(t_0) - y_1(t_0)|e^{t-t_0} = +\infty, \end{aligned}$$

si $y_2(t_0) \neq y_1(t_0)$, por lo que todas las soluciones de dicha ecuación son inestables. Nótese además de que las dos soluciones distintas se separan de forma exponencial.

Lo contrario ocurre con la ecuación

$$y' = -y.$$

Si de nuevo $y_1(t)$ e $y_2(t)$ son dos soluciones distintas se verifica que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} |y_2(t) - y_1(t)| &= \lim_{t \rightarrow +\infty} |y_2(t_0)e^{-t+t_0} - y_1(t_0)e^{-t+t_0}| \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} |y_2(t_0) - y_1(t_0)|e^{-t+t_0} = 0, \end{aligned}$$

y por tanto toda solución del sistema es asintóticamente estable.

No es posible dar un ejemplo de ecuación estable y no asintóticamente estable, por lo que para dar un ejemplo de este hecho hemos de partir de un sistema plano. En particular, consideramos

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x, \end{cases}$$

y veamos que sus soluciones son circunferencias concéntricas con centro $(0, 0)$. Si fijamos una condición inicial $x(0) = x_0$ y $y(0) = y_0$ y resolvemos el sistema tenemos que

$$\begin{cases} \mathcal{L}[x'](z) = \mathcal{L}[y](z), \\ \mathcal{L}[y'](z) = -\mathcal{L}[x](z), \end{cases}$$

de donde

$$\begin{cases} z\mathcal{L}[x](z) - x_0 = \mathcal{L}[y](z), \\ z\mathcal{L}[y](z) - y_0 = -\mathcal{L}[x](z). \end{cases}$$

Sustituyendo $\mathcal{L}[y](z)$ en la segunda ecuación y simplificando obtenemos

$$(z^2 + 1)\mathcal{L}[x](z) = zx_0 + y_0$$

de donde

$$\mathcal{L}[x](z) = \frac{zx_0 + y_0}{z^2 + 1},$$

y calculado la transformada de Laplace inversa

$$x(t) = x_0 \cos t + y_0 \sin t,$$

y por lo tanto

$$y(t) = -x_0 \sin t + y_0 \cos t.$$

Calculando

$$x(t)^2 + y(t)^2 = (x_0 \cos t + y_0 \sin t)^2 + (-x_0 \sin t + y_0 \cos t)^2 = x_0^2 + y_0^2,$$

por lo que efectivamente las soluciones son circunferencias concéntricas. Además, si ponemos (x_0, y_0) en coordenadas polares

$$\begin{cases} x_0 = r_0 \cos \theta_0, \\ y_0 = r_0 \sin \theta_0, \end{cases}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos t + y_0 \sin t \\ &= r_0 \cos \theta_0 \cos t + r_0 \sin \theta_0 \sin t \\ &= r_0 \cos(t - \theta_0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y(t) &= -x_0 \sin t + y_0 \cos t \\ &= -r_0 \cos \theta_0 \sin t + r_0 \sin \theta_0 \cos t \\ &= r_0 \sin(t - \theta_0) \end{aligned}$$

por lo que todas las soluciones se recorren a la misma velocidad dependiente de t . Por lo tanto, dadas dos soluciones distintas $(x_1(t), y_1(t))$ y $(x_2(t), y_2(t))$ se verifica que

$$\|(x_1(t), y_1(t)) - (x_2(t), y_2(t))\| = \sqrt{(x_2(0) - x_1(0))^2 + (y_2(0) - y_1(0))^2}.$$

Entonces la distancia entre dos soluciones permanece constante y todas las soluciones son estables, aunque no pueden ser asintóticamente estables.

3.5. Estabilidad de sistemas lineales

Consideremos ahora un sistema lineal $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$ donde la matriz $\mathbf{A}$ tiene n filas y columnas. Aunque en este caso no disponemos de la representación de los diagramas de fases del mismo, sí que es posible determinar la estabilidad del mismo, con un resultado análogo al anterior. Para establecer el mismo, dada la matriz $\mathbf{A}$, denotaremos por $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ los valores propios de $\mathbf{A}$ con multiplicidades $m_1, \dots, m_k$. Asimismo, denotaremos por $d_1, \dots, d_k$ las dimensiones sobre $\mathbb{C}$ de los subespacios propios $\text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}_n), \dots, \text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I}_n)$.

Theorem 10 Sea el sistema lineal plano $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$, $\mathbf{A} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ no nula. Entonces

(a) El sistema es asintóticamente estable si $\text{Re } \lambda_i < 0$ para todo $i = 1, \dots, k$.

- (b) El sistema es estable si $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$, $1 \leq i \leq k$, y además si λ_i verifica que $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$, entonces $d_i = m_i$.
- (c) El sistema es inestable si o bien existe λ_i tal que $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ y $m_i > d_i$, o bien existe λ_i tal que $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$.

Vamos a ver cómo obtener una justificación de este resultado, que al menos en cuanto a los valores propios con parte real no nula es completa. Del sistema homogéneo tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\mathbf{y}](z) &= -(\mathbf{A} - z \cdot \mathbf{I}_n)^{-1} \cdot \mathbf{y}(0) \\ &= \frac{-1}{p(z)}(\mathbf{A} - z \cdot \mathbf{I}_n)^t \cdot \mathbf{y}(0),\end{aligned}$$

donde

$$p(z) = |\mathbf{A} - z \cdot \mathbf{I}_n|$$

es el polinomio característico de A . Por construcción

$$(\operatorname{adj}(\mathbf{A} - z \cdot \mathbf{I}_n))^t = (p_{ij}(z)),$$

donde $p_{ij}(z)$ es un polinomio con grado a lo sumo $n - 1$. Por tanto

$$\mathcal{L}[\mathbf{y}](z) = \left(\frac{p_i(z)}{p(z)} \right)$$

y por tanto si $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^t$, se tiene que

$$y_i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{p_i(z)}{p(z)} \right] (t) = \sum_{j=1}^k \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{p_{ij}(z)}{(z - \lambda_j)^{m_j}} \right] (t)$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$ con multiplicidades $m_1, \dots, m_k$ y $p_{ij}(z)$ son polinomios con coeficientes complejos de grado a lo sumo $m_j - 1$. Existirán naturales $l_j \leq m_j$ tales que

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{p_{ij}(z)}{(z - \lambda_j)^{m_j}} \right] (t) = q_j(t) e^{\lambda_j t},$$

donde $q_j(t)$ es un polinomio de grado a lo sumo l_j . Como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_j(t) e^{\lambda_j t} = 0$$

si $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$, se prueba el apartado (a). Como $q_j(t) e^{\lambda_j t}$ es no acotado si $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$, la existencia de un valor propio con parte real positiva implica inestabilidad. En el caso de tener valores propios con parte real nula, el polinomio $q_j(t)$ tendrá grado cero, es decir, será una constante si y solo si $m_j = d_j$ (la prueba de este hecho requiere conocimientos de álgebra lineal que el alumno no posee). En ese caso $|e^{\lambda_j t}| = 1$ y por tanto el sistema será estable, mientras que si el grado de $q_j(t)$ es mayor que cero, $q_j(t) e^{\lambda_j t}$ será no acotado, implicando inestabilidad.

Example 11 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -3x + 2y + 2z, \\ y' = -2x + y + 2z, \\ z' = -2x + 2y + z. \end{cases}$$

Es fácil ver que 1 y -1 son los valores propios de la matriz asociada al sistema, por lo que en virtud del Teorema 10 (c), éste es inestable. ■

Example 12 Sea ahora el sistema

$$\begin{cases} x' = -2x + y - z, \\ y' = x - 2y - z, \\ z' = -x + y - 2z. \end{cases}$$

Podemos ver ahora que los valores propios de la matriz asociada son -1 , -2 y -3 , por lo que por el Teorema 10 (b), el sistema es asintóticamente estable. ■

Example 13 Sea el sistema

$$\begin{cases} x' = -4x + y + 3z, \\ y' = 2z, \\ z' = -2y. \end{cases}$$

Puede comprobarse que $\pm 2i$ y -4 son los valores propios de la matriz del sistema. Cómo las dimensiones de los subespacios propios de los valores propios $\pm i$ son 1 y coincide con la multiplicidad de éstos, por el Teorema 10 (a) y (b) el sistema será estable, aunque no será asintóticamente estable. ■

La aplicación del Teorema 10 tiene a priori un punto flaco puesto de manifiesto por el siguiente ejemplo. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -2x + y - 2z, \\ y' = 3x - 9y, \\ z' = 4x + y + z. \end{cases}$$

Este sistema coincide con el del apartado (d) del ejercicio anterior en todos los coeficientes de la matriz asociada excepto el primero. El polinomio característico es $p(\lambda) = -\lambda^3 - 10\lambda^2 - 12\lambda - 63$, pero resolver la ecuación $p(\lambda) = 0$ no resulta sencillo, y quizás ni siquiera factible para los conocimientos de los que se disponen. Ahora bien, para aplicar el Teorema 10 en la mayoría de los casos sólo necesitamos conocer los signos de las partes reales de los valores propios de la matriz asociada. Para este objetivo podemos usar el siguiente criterio de Routh-Hurwitz que, aunque no siempre es aplicable, supone una gran ayuda para determinar al menos si el sistema es asintóticamente estable.

Proposition 14 Sea $p(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n)$ el polinomio característico de la matriz $\mathbf{A} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Las raíces de $p(\lambda)$ tienen parte real negativa si y sólo son estrictamente positivos los menores principales de la matriz

$$\mathbf{H}_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Example 15 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -3x + y + z, \\ y' = x - 4y + z, \\ z' = -2y - 3z. \end{cases}$$

El polinomio característico de la matriz asociada es $p(\lambda) = -41 - 34\lambda - 10\lambda^2 - \lambda^3$ y la matriz $\mathbf{H}_A$

$$\begin{pmatrix} 10 & 41 & 0 \\ 1 & 34 & 0 \\ 0 & 10 & 41 \end{pmatrix}$$

cuyos menores principales son 10, 299 y 12259. Está claro entonces que todos los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$ tienen parte real negativa, por lo que el sistema será asintóticamente estable. ■

Además puede ser de utilidad el siguiente resultado que denominaremos *Teorema de círculo de Gershgorin*.

Theorem 16 Sea $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ con valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Entonces todos los valores propios están en el conjunto del plano de la forma

$$\{x + iy \in \mathbb{C} : \sqrt{(x - a_{11})^2 + y^2} < r_1\} \cup \dots \cup \{x + iy \in \mathbb{C} : \sqrt{(x - a_{nn})^2 + y^2} < r_n\},$$

donde $r_k = \sum_{j=1}^n |a_{kj}| - |a_{kk}|$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Demostración. Si λ es valor propio de $\mathbf{A}$ con vector propio $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ y $s = \max\{|v_i| : i = 1, \dots, n\}$. Definimos

$$\mathbf{u} = \frac{1}{s} \cdot \mathbf{v} = (u_1, \dots, u_n),$$

que también es vector propio de λ tal que $\max\{|u_i| : i = 1, \dots, n\} = |u_{i_0}| = 1$. Entonces

$$\sum_{j=1}^n a_{i_0 j} u_j = \lambda u_{i_0},$$

con lo que

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n a_{i_0 j} u_j = (\lambda - a_{i_0 i_0}) u_{i_0}.$$

Así

$$|\lambda - a_{i_0 i_0}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n a_{i_0 j} u_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0 j}| |u_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0 j}| = r_{i_0},$$

con lo que el resultado queda probado. ■

Vemos cómo se aplica este resultado en el siguiente ejemplo.

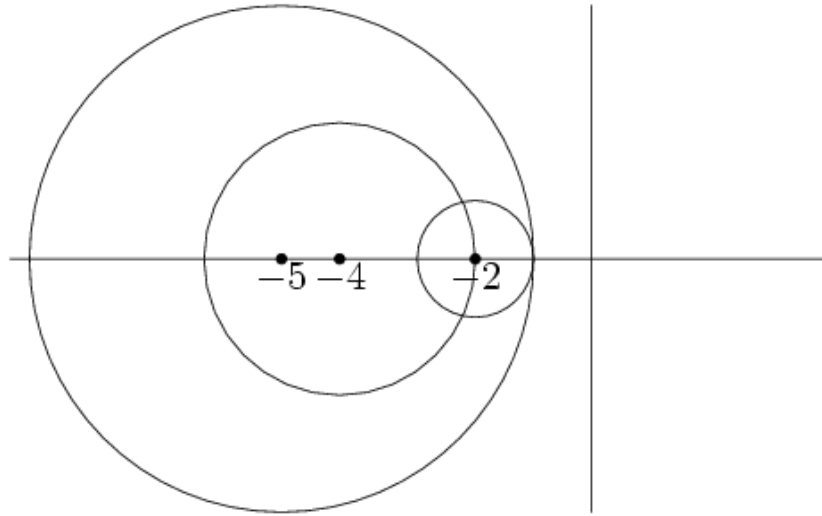
Example 17 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -4x + y + z, \\ y' = -2y + z, \\ z' = 4y - 5z. \end{cases}$$

El conjunto a que hace referencia el resultado anterior es

$$\{(x, y) : \sqrt{(x+4)^2 + y^2} < 2\} \cup \{(x, y) : \sqrt{(x+2)^2 + y^2} < 1\} \cup \{(x, y) : \sqrt{(x+5)^2 + y^2} < 4\},$$

que gráficamente representamos por



por lo que todos los valores propios tienen parte real negativa y el sistema es por tanto asintóticamente estable. ■

Exercise 3.5.1 Determinar si es posible la estabilidad asintótica de los siguientes sistemas

$$(a) \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x, \\ y' = \frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2}z, \\ z' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - z. \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x' = -3x - y + z, \\ y' = x - 5y - z, \\ z' = 2x - 2y - 4z. \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x' = -\frac{5}{12}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z, \\ y' = \frac{5}{12}x - \frac{13}{12}y - \frac{5}{12}z, \\ z' = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{5}{6}z. \end{cases}$$

3.6. ¿Por qué un sistema estable es útil en ingeniería?

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales lineales no autónomo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{f}(t),$$

donde $\mathbf{A} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ y supongamos que el sistema autónomo asociado

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$$

es asintóticamente estable. Entonces toda solución del sistema autónomo $\mathbf{y}_h(t)$ verifica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}_h(t) = \mathbf{0}.$$

Ahora bien, transformando el sistema tenemos que

$$\mathcal{L}[\mathbf{y}](z) = (z\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{y}_0 + \mathcal{L}[\mathbf{f}](z)) = \left(\frac{p_1(z)}{p(z)q_1(z)}, \frac{p_2(z)}{p(z)q_2(z)}, \dots, \frac{p_n(z)}{p(z)q_n(z)} \right)^t.$$

Para calcular las soluciones debemos calcular los ceros de $p(z)q_i(z)$, $i = 1, \dots, n$. Los de $p(z)$ son los valores propios que tienen parte real negativa, cuyas transformadas inversas tienden a cero cuando t tiende a infinito. Así, la solución del sistema no autónomo es de la forma

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_h(t) + \mathbf{y}_p(t) \quad (3.9)$$

donde $\mathbf{y}_p(t)$ es una solución particular del sistema no homogéneo. Si tomamos límites cuando t tiende a infinito, tenemos que

$$\mathbf{y}(t) \simeq \mathbf{y}_p(t),$$

es decir, para tiempos grandes (aquí lo de grande depende de cada sistema) la solución del sistema no autónomo es básicamente la solución particular del mismo y la parte de la solución correspondiente al sistema homogéneo se va reduciendo con el tiempo. En ingeniería a la función $\mathbf{f}(t)$ se le llama entrada del sistema e $\mathbf{y}_p(t)$ es la salida del mismo. Si el sistema es estable, al variar la entrada, varía la salida sin que la parte homogénea intervenga en el proceso. Esto es lo que ocurre en la mayoría de los sistemas lineales utilizados en las ciencias experimentales, como en circuitos eléctricos o vibraciones mecánicas.

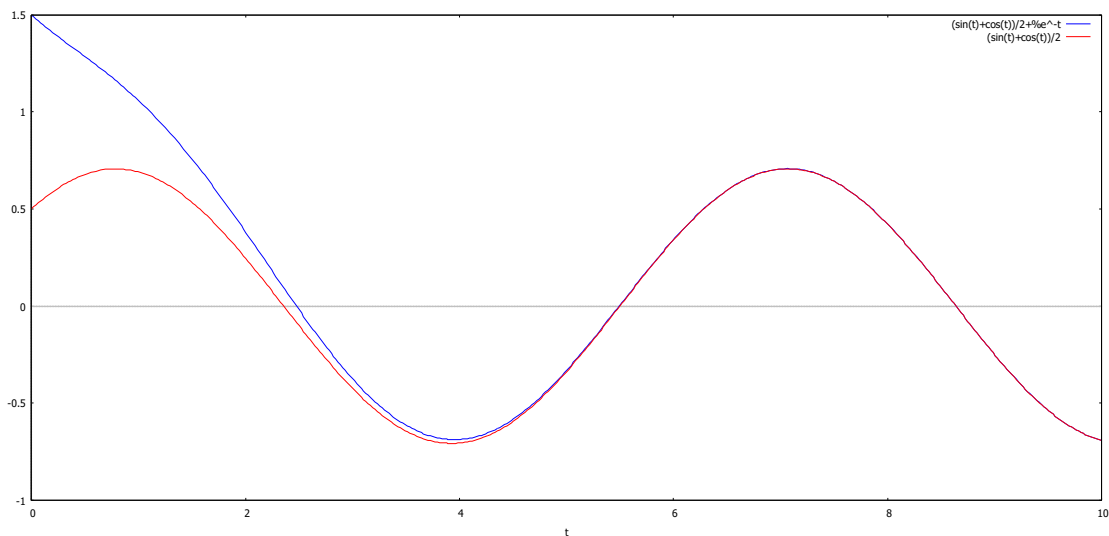
Por ejemplo, el problema

$$\begin{cases} y' = -y + \cos t \\ \mathbf{y}(0) = 3/2, \end{cases}$$

verifica que $y' = -y$ es asintóticamente estable y tiene por solución

$$y(t) = e^{-t} + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t).$$

Como puede verse en la figura, donde se han representado conjuntamente $y(t)$ e $y_p(t) = \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$, ambas soluciones convergen cuando el tiempo es suficientemente grande.



3.7. Funciones de transferencia. Estabilidad y control de sistemas lineales

Supongamos un sistema dado por la ecuación

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(t), \quad (3.10)$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ para $0 \leq i \leq n$. f es una señal entrada del sistema e y es la respuesta que produce en sistema a la excitación que f representa. El cambio de variable

$$y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_{n-1} = y^{(n-2)}, y_n = y^{(n-1)}$$

transforma la ecuación en el sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \dots\dots\dots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(t) - a_0 y_1 - a_1 y_2 - \dots - a_{n-2} y_{n-1} - a_{n-1} y_n, \end{cases}$$

que en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico es

$$\begin{aligned} P(t) &= \begin{vmatrix} -t & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -t & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - t \end{vmatrix} \\ &= -a_0(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -t & 1 \end{vmatrix} - t \begin{vmatrix} -t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -t & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - t \end{vmatrix} \\ &= a_0(-1)^n - t \left(-a_1(-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -t & 1 \end{vmatrix} - t \begin{vmatrix} -t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -t & 1 \\ -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - t \end{vmatrix} \right) \\ &= (-1)^n (a_0 + a_1 t) + t^2 \begin{vmatrix} -t & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -t & 1 \\ -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - t \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Repitiendo el proceso y teniendo en cuenta que $(-1)^n = (-1)^{n-2} = (-1)^{n-4} = \dots$ tenemos que

$$\begin{aligned} P(t) &= (-1)^n (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-3} t^{n-3}) + (-1)^{n-2} t^{n-2} \begin{vmatrix} -t & 1 \\ -a_{n-2} & -a_{n-1} - t \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-3} t^{n-3}) + (-1)^{n-2} t^{n-2} (t^2 + a_{n-1} t + a_{n-2}) \\ &= (-1)^n (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-3} t^{n-3} + a_{n-2} t^{n-2} + a_{n-1} t^{n-1} + t^n). \end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores propios de $\mathbf{A}$ son las soluciones de la ecuación característica

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_{n-3} t^{n-3} + a_{n-2} t^{n-2} + a_{n-1} t^{n-1} + t^n = 0.$$

Además, si λ es solución, su subespacio propio se calcula a partir de la matriz

$$\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}$$

que tiene las $n - 1$ primeras filas linealmente independientes. Por tanto su rango es $n - 1$ y el subespacio propio asociado $\text{Ker}(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_n)$ tiene dimensión 1 y por tanto el teorema de estabilidad para este tipo de sistemas es de la siguiente forma.

Theorem 18 Sea $p(z) = (-1)^n \prod_{i=1}^r (z - \lambda_i)^{n_i}$, $\sum_{i=1}^r n_i = n$. Entonces el sistema (3.10) es

- (a) Asintóticamente estable si $\text{Re } \lambda_i < 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, r$.
- (b) Estable si $\text{Re } \lambda_i \leq 0$ y $\text{Re } \lambda_i = 0$ implica que la multiplicidad de λ_i es 1.
- (c) Inestable si no se cumplen algunas de las condiciones (a) o (b) anteriores.

Aplicando formalmente la transformada de Laplace a (3.10) con todas las condiciones iniciales nulas obtenemos

$$p(z)\mathcal{L}[y](z) = \mathcal{L}[f](z),$$

donde $p(z)$ es un polinomio de grado n . La función de transferencia del sistema, se define como

$$T(z) = \frac{\mathcal{L}[y](z)}{\mathcal{L}[f](z)} = \frac{1}{p(z)}.$$

La estabilidad del sistema puede entonces estudiarse a partir de los polos de la función de transferencia.

3.7.1. Respuesta a una señal constante

Supongamos un sistema asintóticamente estable con función de transferencia $T(z)$ de manera que es estimulado por una función constante de la forma

$$f(t) = K.$$

Como sabemos la transformada de Laplace de dicha señal será de la forma

$$F(z) = \frac{K}{z}$$

y la respuesta a largo tiempo del sistema $y(t)$ vendrá dada por la expresión

$$Y(z) = T(z)F(z) = \frac{K}{zp(z)}.$$

Descomponiendo

$$\frac{K}{zp(z)} = \frac{A}{z} + \frac{q(z)}{p(z)},$$

y entonces

$$K = Ap(z) + zq(z),$$

y sustituyendo en $z = 0$ tenemos que

$$K = Ap(0),$$

de donde

$$A = \frac{K}{p(0)} = KT(0).$$

Nótese que $p(0) \neq 0$ ya que el sistema es asintóticamente estable. Ahora bien, dicha respuesta se calculará como

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[T(z)F(z)](t).$$

En el cálculo de la transformada inversa, los polos de la función de transferencia dan lugar a términos que aparecen multiplicados por factores de la forma e^{-ta} , con $a > 0$, y que tienden a cero muy rápidamente cuando $t \rightarrow +\infty$. Por ello, al calcular la transformada inversa para tiempo suficientemente grande basta con tomar el polo 0, es decir, podemos asumir que

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[T(z)F(z)](t) = T(0)K.$$

3.7.2. Respuesta a una señal sinusoidal

Supongamos un sistema asintóticamente estable con función de transferencia $T(z)$ de manera que es estimulado por una función de tipo seno de la forma

$$f(t) = A \sin(\omega t + \phi),$$

donde $A > 0$ es la amplitud, ω es la frecuencia y ϕ es la fase inicial. Como sabemos, el seno es una función 2π periódica, por lo que

$$\sin(\omega t + \phi) = \sin(\omega t + \phi + 2\pi) = \sin(\omega(t + 2\pi/\omega) + \phi),$$

por lo que $T = 2\pi/\omega$ se llama periodo de la señal, es decir la frecuencia $\omega = 2\pi/T$. Como sabemos, si la fase inicial $\phi = 0$, la transformada de Laplace de dicha señal será de la forma

$$F(z) = \frac{A\omega}{z^2 + \omega^2},$$

y la respuesta a largo tiempo del sistema $y(t)$ vendrá dada por la expresión

$$Y(z) = T(z)F(z).$$

Descomponiendo

$$\frac{A\omega}{(z^2 + \omega^2)p(z)} = \frac{A_1}{z - i\omega} + \frac{A_2}{z + i\omega} + \frac{q(z)}{p(z)},$$

de donde

$$A\omega = A_1(z + i\omega)p(z) + A_2(z - i\omega)p(z) + q(z)(z^2 + \omega^2).$$

Sustituyendo $z = \omega i$ tenemos que

$$A\omega = 2A_1 i\omega p(i\omega),$$

de donde

$$A_1 = \frac{A\omega}{2i\omega p(i\omega)}.$$

Similarmente, al sustituir $z = -\omega i$ obtenemos que

$$A_1 = \frac{-A\omega}{2i\omega p(-i\omega)} = \frac{-A\omega}{2i\omega \overline{p(i\omega)}},$$

ya que

$$p(-i\omega) = p(\overline{i\omega}) = \overline{p(i\omega)}.$$

Ahora bien, dicha respuesta se calculará como

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[T(z)F(z)](t),$$

y dado que el sistema era asintóticamente estable, se tiene que los polos de la función de transferencia tienen parte real negativa, por lo que ninguno de ellos coincidirá con los polos de $Y(z)$ que son $\pm i\omega$. En el cálculo de la transformada inversa, los polos de la función de transferencia dan lugar a términos que aparecen multiplicados por factores de la forma e^{-ta} , con $a > 0$, y que tienden a cero muy rápidamente cuando $t \rightarrow +\infty$. Por ello, al calcular la transformada inversa para tiempo suficientemente grande basta con tomar los polos $\pm i\omega$, es decir, podemos asumir que

$$\begin{aligned} y(t) &= A_1 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{z - i\omega} \right] + A_2 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{z + i\omega} \right] \\ &= \frac{Ae^{i\omega t}}{2ip(i\omega)} - \frac{Ae^{-i\omega t}}{2i\overline{p(i\omega)}} \\ &= T(i\omega) \frac{Ae^{ti\omega}}{2i} - \overline{T(i\omega)} \frac{Ae^{-ti\omega}}{2i}. \end{aligned}$$

Tomando la forma polar de $T(i\omega)$ y $T(-i\omega)$, y teniendo en cuenta que los coeficientes del sistema son reales obtenemos que

$$T(i\omega) = |T(i\omega)|e^{i\arg T(i\omega)} = |T(i\omega)|(\cos(\arg T(i\omega)) + i\sin(\arg T(i\omega))),$$

y

$$T(-i\omega) = |T(-i\omega)|e^{i\arg T(-i\omega)} = |T(i\omega)|e^{-i\arg T(i\omega)} = |T(i\omega)|(\cos(\arg T(i\omega)) - i\sin(\arg T(i\omega))).$$

Sustituyendo en la relación anterior

$$\begin{aligned} y(t) &= T(i\omega) \frac{Ae^{ti\omega}}{2i} - T(-i\omega) \frac{Ae^{-ti\omega}}{2i} \\ &= |T(i\omega)|e^{i\arg T(i\omega)} \frac{Ae^{ti\omega}}{2i} - |T(i\omega)|e^{-i\arg T(i\omega)} \frac{Ae^{-ti\omega}}{2i} \\ &= A|T(i\omega)| \frac{e^{i(t\omega + \arg T(i\omega))} - e^{-i(t\omega + \arg T(i\omega))}}{2i} \\ &= A|T(i\omega)| \sin(t\omega + \arg T(i\omega)). \end{aligned}$$

El término $|T(i\omega)|$ mide si la respuesta amplifica o atenúa la señal, mientras que $\arg T(i\omega)$ representa una variación de la fase respecto de la inicial. Asimismo, $T(i\omega)$ puede ser determinado experimentalmente introduciendo una señal sinusoidal.

Veamos el siguiente ejemplo.

Example 19 *Dado el sistema*

$$\begin{cases} y''' + 7y'' + 19y' + 13y = f(t), \\ y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1, \end{cases}$$

se pide:

- (a) *Demostrar que es asintóticamente estable.*
- (b) *Obtener la solución cuando el tiempo es suficientemente grande (régimen estacionario) cuando $f(t) = 10$.*
- (c) *Obtener la solución cuando el tiempo es suficientemente grande (régimen estacionario) cuando $f(t) = 10 \sin(4t)$.*
- (d) *Obtener la solución $y(t)$ cuando $f(t) = h_2(t)$, la función de Heaviside, y calcular $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.*

Si aplicamos la transformada de Laplace obtenemos

$$(z^3 + 7z^2 + 19z + 13)\mathcal{L}[y](z) - 1 = \mathcal{L}[f](z),$$

de donde

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{1}{z^3 + 7z^2 + 19z + 13} + \frac{\mathcal{L}[f](z)}{z^3 + 7z^2 + 19z + 13}$$

con lo que la función de transferencia es

$$T(z) = \frac{1}{z^3 + 7z^2 + 19z + 13},$$

cuyos polos son -1 , $-3 \pm 2i$, que tienen todos parte real negativa, por lo que es sistema es asintóticamente estable y resolvemos (a).

(b) *En este caso*

$$\mathcal{L}[f](z) = \frac{10}{z}$$

y la solución es

$$y(t) \simeq 10T(0) = \frac{10}{13}.$$

(c) *En este caso, tenemos que*

$$\begin{aligned} y(t) &\simeq 10|T(4i)| \sin(4t + \arg(T(4i))) \\ &= \frac{10}{3\sqrt{1105}} \sin\left(4t + \arctan\left(\frac{4}{33}\right) - \pi\right) \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned} T(4i) &= -\frac{11}{1105} - \frac{4}{3315}i, \\ |T(4i)| &= \frac{1}{3\sqrt{1105}}, \\ \arg(T(4i)) &= \arctan\left(\frac{4}{33}\right) - \pi. \end{aligned}$$

(d) Finalmente, dado que

$$\mathcal{L}[h_2](z) = \frac{e^{-2z}}{z},$$

se tiene que

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{1}{z^3 + 7z^2 + 19z + 13} + \frac{e^{-2z}}{(z^3 + 7z^2 + 19z + 13)z},$$

por lo que

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^3 + 7z^2 + 19z + 13}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2z}}{(z^3 + 7z^2 + 19z + 13)z}\right](t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^3 + 7z^2 + 19z + 13}\right](t) + h_2(t)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z^3 + 7z^2 + 19z + 13)z}\right](t-2). \end{aligned}$$

Calculamos aparte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^3 + 7z^2 + 19z + 13}\right](t) &= \frac{e^{-t}}{8} - \frac{e^{-3t}}{8}(\cos(2t) + \sin(2t)). \\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z^3 + 5z^2 + 11z + 15)z}\right](t) &= \frac{1}{13} - \frac{e^{-t}}{8} + \frac{e^{-3t}}{104}(\cos(2t) + 5\sin(2t)). \end{aligned}$$

Así

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{8} - \frac{e^{-3t}}{8}(\cos(2t) + \sin(2t)) + h_2(t)\left(\frac{1}{13} - \frac{e^{-t+2}}{8} + \frac{e^{-3t+6}}{104}(\cos(2t-4) + 5\sin(2t-4))\right)$$

3.7.3. Respuesta a una señal periódica

Supongamos una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes con función de transferencia $T(z)$. Supongamos que el sistema es asintóticamente estable, de tal manera que si $f(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ es la entrada del sistema, se verifica que su salida para tiempos suficientemente grandes viene dada por

$$x(t) = A|T(i\omega)|\sin(\omega t + \phi + \arg T(i\omega)).$$

Supongamos ahora que la señal es periódica de periodo $2L$. Dicha función puede expresarse en su serie de Fourier

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)), \end{aligned}$$

donde $\omega = \pi/L$. Por otra parte, si escribimos (b_n, a_n) en coordenadas polares mediante la expresión

$$\begin{cases} b_n = A_n \cos \phi_n, \\ a_n = A_n \sin \phi_n, \end{cases}$$

podemos reescribir la expresión anterior como

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \phi_n \cos(n\omega t) + A_n \cos \phi_n \sin(n\omega t)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \phi_n). \end{aligned}$$

Si ahora $f(t)$ es la entrada al sistema anterior, entonces su salida para tiempos suficientemente grandes vendrá dada por

$$x(t) = \frac{a_0}{2} T(0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n |T(in\omega)| \sin(n\omega t + \phi_n + \arg T(in\omega)).$$

Dado que para casos prácticos $\lim_{t \rightarrow \infty} |T(it)| = 0$, por lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} |T(in\omega)| = 0$, como consecuencia la series de Fourier de $x(t)$ converge a cero más rápidamente que la serie de Fourier de la señal inicial $f(t)$.

Veamos el siguiente ejemplo.

Example 20 *Dado el sistema*

$$\begin{cases} y''' + 7y'' + 19y' + 13y = f(t), \\ y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1. \end{cases}$$

Demostrar que es asintóticamente estable y calcular su solución para tiempos suficientemente grandes cuando $f(t)$ es la función 2-periódica definida en $[-1, 1]$ como

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-1, 0), \\ t & \text{si } t \in [0, 1). \end{cases}$$

Como sabemos del ejemplo 19 el sistema es asintóticamente estable. El desarrollo en serie de Fourier de $f(t)$ es

$$\begin{aligned} Sf(t) &= \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi t) - \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi t) \right) \\ &= \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2 \pi^2} + \frac{(1 - (-1)^n)^2}{n^4 \pi^4}} \sin \left(n\pi t + \arctan \frac{(-1)^n - 1}{n\pi} \right). \end{aligned}$$

La función de transferencia es

$$T(z) = \frac{1}{z^3 + 7z^2 + 19z + 13}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{4}T(0) + \sum_{n=1}^{\infty} |T(in\pi)| \sqrt{\frac{1}{n^2\pi^2} + \frac{(1-(-1)^n)^2}{n^4\pi^4}} \sin\left(n\pi t + \arctan \frac{(-1)^n - 1}{n\pi}\right) \\ &= \frac{1}{52} + \sum_{n=1}^{\infty} |T(in\pi)| \sqrt{\frac{1}{n^2\pi^2} + \frac{(1-(-1)^n)^2}{n^4\pi^4}} \sin\left(n\pi t + \arctan \frac{(-1)^n - 1}{n\pi}\right) \end{aligned}$$

donde

$$|T(in\pi)| = \frac{1}{\sqrt{(19n\pi - n^3\pi^3)^2 + (13 - 7n^2\pi^2)^2}}.$$

3.8. Ejercicios

1. Utilizar la transformada de Laplace para resolver los siguientes problemas de Cauchy asociados a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} y'''(t) + 5y''(t) + 17y'(t) + 13y(t) &= 1 \\ y(0) = y'(0) &= 1, \quad y''(0) = 0 \end{aligned} \right\} & \quad \left. \begin{aligned} y'(t) + 3y(t) &= e^{-2t} \\ y(0) &= 2 \end{aligned} \right\} \\ \left. \begin{aligned} y''(t) + y'(t) - 2y(t) &= 5h_4(t) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) &= 0 \end{aligned} \right\} & \quad \left. \begin{aligned} y''(t) + y(t) &= t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) &= -2 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

2. Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

$$\left. \begin{aligned} y''(t) + y'(t) &= \phi(t), \text{ con } \phi(t) = \begin{cases} t, & t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) &= 2 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} y''(t) + y(t) &= \sin t, \\ y(0) = y'(0) &= -1 \end{aligned} \right\}$$

3. En el caso de un circuito LCR en el que no se tiene ninguna resistencia, la ecuación diferencial que describe la carga del condensador en función del tiempo es de la forma,

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2}(t) + \frac{Q(t)}{C} = E(t)$$

y se denomina *oscilador armónico*. Resolver la ecuación anterior en los siguientes casos:

- a) La fuerza electromotriz E es constante y la carga e intensidad de corriente en el momento inicial son ambas nulas.
 - b) La fuerza electromotriz es de la forma $\sin(\omega t + \sigma)$, con $\omega, \sigma \in \mathbb{R}$, mientras que $Q(0) = 1$ al conectar el circuito.
4. Usar la transformada de Laplace para resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales:

$$\left. \begin{aligned} 2y_1''(t) - y_2''(t) - y_1'(t) - y_2'(t) + 9y_1(t) - 3y_2(t) &= 0 \\ 2y_1''(t) - y_2''(t) + y_1'(t) + y_2'(t) + 7y_1(t) - 5y_2(t) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

con las condiciones iniciales:

$$y_1(0) = y_1'(0) = 1, \quad y_2(0) = y_2'(0) = 0$$

5. Encuentra la solución del siguiente problema de Cauchy,

$$\left. \begin{aligned} y''(t) + y(t) &= \sin(\omega t) \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = 1 \end{aligned} \right\}$$

con $\omega > 1$.

6. Resuelve el siguiente problema de Cauchy:

$$\left. \begin{aligned} y''(t) + \beta y(t) &= \cos(\omega t) \\ y(0) &= -1, \quad y'(0) = 0 \end{aligned} \right\}$$

distinguiendo los casos en que $0 < \beta$ y $0 > \beta$.

7. Obtener la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\left. \begin{aligned} 3y_1'(t) + y_2'(t) - 2y_1(t) &= 3 \sin t + 5 \cos t \\ 2y_1'(t) + y_2'(t) + y_2(t) &= \sin t + \cos t \end{aligned} \right\}$$

para las condiciones iniciales, $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = -1$.

8. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$$

donde la matriz $\mathbf{A}$ es la siguiente:

$$(a) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (e) \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \quad (f) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(g) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (h) \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix} \quad (i) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Resolver los siguientes problemas de condiciones iniciales:

$$(a) \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x' = -4(x + y) \\ x' + 4y' = -4y \\ x(0) = 1, y(0) = 0. \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x' = 3x + 8y \\ y' = -3y - x \\ x(0) = 6, y(0) = -2. \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x' = x - z \\ y' = 2y \\ z' = x + z \\ x(0) = -2, y(0) = 2, z(0) = -1. \end{cases} \quad (e) \begin{cases} x' = y + z \\ y' = -x + z \\ z' = -x - y \\ x(0) = y(0) = z(0) = -1. \end{cases}$$

10. Resolver los siguientes sistemas y problemas de condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \begin{cases} x' = y + te^{2t} \\ y' = -2x + 3y + e^{2t} \\ x(0) = 1, y(0) = -1. \end{cases} & \text{(b)} \begin{cases} x' = 4x + 3y + 5z + e^t \sin 2t \\ y' = -y - 4z \\ z' = 2y + 3z \end{cases} \\
 & \text{(c)} \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{(d)} \begin{cases} x' = 2x + y - z \\ y' = -3x - y + z + t \\ z' = 9x + 3y - 4z \\ x(0) = z(0) = 0, y(0) = 3. \end{cases} \\
 & \text{(e)} \begin{cases} x' = -2x - 5y + t \\ y' = x + 2y + t^2 \\ x(0) = 1, y(0) = 0. \end{cases} & \text{(f)} \begin{cases} \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix} \\ x(0) = -1, y(0) = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

11. Dados los siguientes sistemas lineales, decidir si son estables o no.

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \begin{cases} x' = x - 5y + 5z, \\ y' = -2x - 2y + 2z, \\ z' = 3x - 3y + 3z. \end{cases} & \text{(b)} \begin{cases} x' = -5x + y - z, \\ y' = -2x - 2y + 2z, \\ z' = -3x + 3y - 3z. \end{cases} & \text{(c)} \begin{cases} x' = -x - 2z, \\ y' = 3x - 2y, \\ z' = 4x + z. \end{cases} \\
 & \text{(d)} \begin{cases} x' = -9x + y - 2z, \\ y' = 3x - 9y, \\ z' = 4x + y + z. \end{cases} & \text{(e)} \begin{cases} x' = -5x + y - z, \\ y' = -3x - y + 3z, \\ z' = -4x + 4y - 2z. \end{cases} & \text{(f)} \begin{cases} x' = -2x - 2y + 2z, \\ y' = -2x - 2y + 2z, \\ z' = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

12. Obtener la respuesta en régimen estacionario de los siguientes sistemas, probando previamente su estabilidad.

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \begin{cases} x' = -2x - y, \\ y' = x - 2y + \cos(3t) \end{cases} & \text{(b)} 2y'' + 3y' + y = 16. & \text{(c)} \begin{cases} x' = -2x - z + 1, \\ y' = x - 2y, \\ z' = 2x - 4z = 2. \end{cases} \\
 & \text{(d)} y''' + 4y'' + 5y' + 2y = \sin t. & \text{(e)} \begin{cases} x' = -5x + y = 2, \\ y' = -x - 3y = \sin(2t). \end{cases} & \text{(f)} y'' - 2y' + 5y = t^2. \\
 & \text{(g)} \begin{cases} x' = -9x + y + 1, \\ y' = 3x - 9y - 1. \end{cases} & \text{(h)} y''' - y'' + 3y' + 5y = e^t. & \text{(i)} \begin{cases} x' = -5x + y - z, \\ y' = -x - 3y, \\ z' = 0, z(0) = 2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

13. Obtener la solución en el régimen transitorio de los sistemas del ejercicio anterior suponiendo que las condiciones iniciales son nulas.

Capítulo 4

Un poco de Python

4.1. Transformada de Laplace

En el módulo `sympy` de python hay implementada una sentencia para obtener la transformada de Laplace de la mayoría de las funciones que conocemos. Si queremos calcular la transformada de Laplace de una función $f(t)$ tenemos la sentencia `laplace_transform`, cuya sintaxis es

```
laplace_transform(f(t),t,z)
```

donde t es la variable de la que depende la función $f(t)$ y z es la variable independiente de la transformada de $f(t)$. Por ejemplo, si tecleamos

```
from sympy import symbols, laplace_transform
t,z=symbols('t z ')
laplace_transform(t**2+t+1,t,z)
```

obtenemos la salida

```
((z**2+z+2)/z**3,0,True)
```

donde

$$\frac{z^2 + z + 2}{z^3}$$

es la transformada de Laplace de la función $f(t) = t^2 + t + 1$, mientras que los otros dos términos hacen referencia a su convergencia. Si tecleamos

```
laplace_transform(t**2+t+1,t,z,noconds=True)
```

solo obtendremos como salida

```
(z**2+z+2)/z**3.
```

También es capaz de trabajar con funciones de Heaviside, siendo $h_0(t)$ llamada como *Heaviside*, por lo que tecleando

```
from sympy import symbols, laplace_transform
t,z=symbols('t z ')
laplace_transform(Heaviside(t),t,z,noconds=True)
```

obtenemos la salida

$$\frac{1}{z}.$$

Si queremos teclear la función de Heaviside $h_a(t)$ para $a > 0$, basta darse cuenta que esta no es otra que $h_0(t - a)$. Por ejemplo, si tecleamos

```
laplace_transform(Heaviside(t-2),t,z,noconds=True)
```

obtenemos

$$\frac{e^{-2z}}{z}$$

que es su transformada de Laplace.

1. Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones

$$(a) f(t) = \sin(3t) \quad (b) f(t) = e^{5t} \quad (c) f(t) = e^{5t} \cos 3t \quad (d) f(t) = te^t$$

$$(e) f(t) = t^3 - t \quad (f) f(t) = \sinh t \quad (g) f(t) = \cos t \sin t \quad (h) f(t) = e^t \cos t \sin(2t)$$

2. Calcular la transformada de Laplace de la función,

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

3. Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones.

$$(a) f(t) = t \sin t \quad (b) g(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ t, & \text{si } t > 1 \end{cases} \quad (c) h(t) = \begin{cases} t^2 - 1, & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 2, & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

4.2. Transformada de Laplace inversa

Para calcular la transformada inversa tenemos la sentencia `inverse_laplace_transform`. Así, tecleando

```
from sympy import symbols, inverse_laplace_transform
t,z=symbols('t z ')
inverse_laplace_transform(1/(1+z**2),z,t)
```

donde t y z tienen el mismo rol que en el caso anterior, obtenemos la salida

$$\sin(t) * \text{Heaviside}(t)$$

y como $\text{Heaviside}(t)=1$ para todo $t \geq 0$, y el dominio de la función que importa para calcular la transformada de Laplace es éste, tenemos que simplemente se trata del $\sin t$, es decir,

$$\mathcal{L}^{-1}[1/(1+z^2)](t) = \sin t.$$

Si ahora tecleamos

```
from sympy import symbols, exp, inverse_laplace_transform
t,z=symbols('t z ')
inverse_laplace_transform(exp(-2*z)/(1+z**2),z,t)
```

obtenemos la solución

$$\sin(t - 2) * \text{Heaviside}(t - 2),$$

es decir

$$\sin(t - 2)h_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2, \\ \sin(t - 2) & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$$

4.3. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

1. Calcular la transformada inversa de Laplace de las funciones siguientes

$$(a) F(z) = \frac{z^2}{1+z^3} \quad (b) F(z) = \frac{1}{(z-3)(z^2-2)} \quad (c) F(z) = \frac{z+7}{z^2+2z+5}$$

$$(d) F(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)(z^2+2z+10)}$$

2. Calcular la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

$$(a) F(z) = \frac{ze^{-\pi z}}{z^2+2z+5} \quad (b) F(z) = \frac{(z-1)e^{-z}}{z^3+2} \quad (c) F(z) = \frac{z+1}{e^z z^2(z^2+9)} \quad (d) F(z) = \frac{z+1}{z^4}$$

4.3. Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Como sabemos, la transformada de Laplace se puede aplicar a la resolución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Supongamos la ecuación

$$\begin{cases} y'' + y = \sin t, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases}$$

Para calcular la solución la transformamos utilizando la transformada de Laplace, obteniendo

$$(z^2 + 1)\mathcal{L}[y](z) - zy(0) - y'(0) - y(0) = \mathcal{L}[\sin t](z) = \frac{1}{1+z^2},$$

y simplificando

$$(z^2 + 1)\mathcal{L}[y](z) = z + 1 + \frac{1}{1+z^2},$$

de donde

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{z+1}{(z^2+1)} + \frac{1}{(z^2+1)^2}.$$

Usando la sentencia para calcular la transformada inversa construimos la solución

$$y(t) = \frac{1}{2}(-t \cos t + \sin t) + \cos t.$$

Este problema lo podemos resolver también de la siguiente manera.

```
from sympy import *
t,z,l=symbols('t z l')
laplace_transform(sin(t),t,z,noconds=True)
1/(z**2 + 1)
eq=(z**2+1)*l-z-1-1/(z**2+1)
solve(eq,l)
[(z**3 + z**2 + z + 2)/(z**2 + 1)**2]
inverse_laplace_transform((z**3 + z**2 + z + 2)/(z**2 + 1)**2,z,t)
(-t*cos(t) + 3*sin(t) + 2*cos(t))*Heaviside(t)/2
```

donde las salidas del programa las hemos indicado en negrita. La solución es por tanto

$$\frac{1}{2}(-t \cos t + \sin t) + \cos t,$$

como sabíamos.

Recordemos la sentencia `solve` que se utiliza para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones polinómicas. Si tenemos una ecuación

$$eq(x) = 0,$$

con incógnita x , tecleando

$$\text{solve}(eq, x)$$

obtenemos su solución. Si es un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, $eq_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$, pondremos las ecuaciones y las incógnitas en una lista. Por ejemplo,

$$\text{solve}([t+z, t-z+1], [t, z])$$

proporciona la salida

$$\{t : -1/2, z : 1/2\},$$

que es la solución del sistema lineal

$$\begin{cases} t + z = 0, \\ t - z = -1. \end{cases}$$

1. Utilizar la transformada de Laplace para resolver los siguientes problemas de Cauchy asociados a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} y'''(t) + 5y''(t) + 17y'(t) + 13y(t) &= 1 \\ y(0) = y'(0) &= 1, \quad y''(0) = 0 \end{aligned} \right\} & \left. \begin{aligned} y'(t) + 3y(t) &= e^{-2t} \\ y(0) &= 2 \end{aligned} \right\} \\ \left. \begin{aligned} y''(t) + y'(t) - 2y(t) &= 5e^{-t} \sin t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) &= 0 \end{aligned} \right\} & \left. \begin{aligned} y''(t) + y(t) &= t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) &= -2 \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

2. Resolver los siguientes problemas de condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases} & \text{(b)} \quad \begin{cases} x' = -4(x + y) \\ x' + 4y' = -4y \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0. \end{cases} & \text{(c)} \quad \begin{cases} x' = 3x + 8y \\ y' = -3y - x \\ x(0) = 6, \quad y(0) = -2. \end{cases} \\ \text{(d)} \quad \begin{cases} x' = x - z \\ y' = 2y \\ z' = x + z \\ x(0) = -2, \quad y(0) = 2, \quad z(0) = -1. \end{cases} & \text{(e)} \quad \begin{cases} x' = y + z \\ y' = -x + z \\ z' = -x - y \\ x(0) = y(0) = z(0) = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

3. Obtener la respuesta en régimen estacionario de los siguientes sistemas, probando previamente su estabilidad.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \begin{cases} x' = -2x - y, \\ y' = x - 2y + \cos(3t) \end{cases} & \text{(b)} \quad 2y'' + 3y' + y = 16. & \text{(c)} \quad \begin{cases} x' = -2x - z + 1, \\ y' = x - 2y, \\ z' = 2x - 4z = 2. \end{cases} \\ \text{(d)} \quad y''' + 4y'' + 5y' + 2y = \sin t. & \text{(e)} \quad \begin{cases} x' = -5x + y = 2, \\ y' = -x - 3y = \sin(2t). \end{cases} & \text{(f)} \quad y'' - 2y' + 5y = t^2. \end{aligned}$$

4.4. Resolución de ecuaciones diferenciales con entradas periódicas

Cuando tenemos una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales con una entrada periódica, la solución en el régimen estacionario (cuando la ecuación o el sistema es asintóticamente estable) puede calcularse mediante las series de Fourier. Para fijar ideas, consideramos la ecuación

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_1y' + a_0y = f(t),$$

donde $f(t)$ es una función $2L$ -periódica, con $L > 0$. Supongamos que tenemos una función de transferencia $T(z)$ tal que todos sus polos tienen parte real negativa. Como sabemos, la función $f(t)$ puede aproximarse mediante su serie de Fourier

$$sf(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \right),$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt$$

y

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt.$$

Entonces, en el régimen estacionario la solución del sistema es

$$y(t) = \frac{a_0}{2}T(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left| T\left(\frac{n\pi}{L}i\right) \right| \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t + \arg T\left(\frac{n\pi}{L}i\right)\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t + \arg T\left(\frac{n\pi}{L}i\right)\right) \right).$$

Vamos a ver cómo podemos hacer estas operaciones con Python. A modo de ejemplo, consideramos la ecuación

$$y'' + 2y' + 2y = f(t),$$

donde $f(t)$ es la función 2π -periódica de forma que $f(t) = t$ si $t \in (-\pi, \pi)$. Usando la transformada de Laplace, esta ecuación se transforma en

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2} \mathcal{L}[f](z),$$

por lo que la función de transferencia es

$$T(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2},$$

con polos $-1 \pm i$, por lo que el sistema es asintóticamente estable. En python tecleamos

```
from sympy import *
t=symbols('t')
def T(x):
    return 1/(z**2+2*z+2)
```

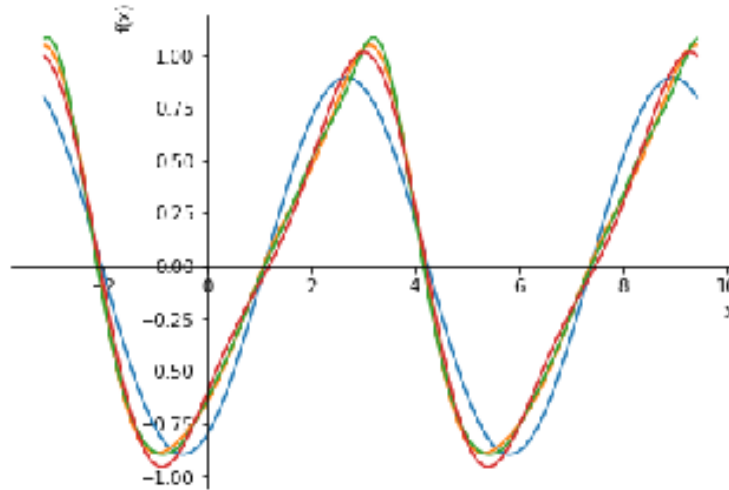


Figura 4.1: Gráficas de las aproximaciones de la solución de la ecuación diferencial.

donde hemos definido la variable t y la función de transferencia. A continuación tecleamos

```
s=fourier_series(t, (t, -pi, pi))
```

con lo que guardamos en s la serie de Fourier de nuestra función $f(t) = t$. Obviamente, no podemos trabajar con todos los coeficientes de la serie de Fourier, por lo que vamos a tomar una cantidad de términos de la serie. Por ejemplo $n = 3$, tecleando

```
s1 = sf.truncate(n=3)
s1
2*sin(t) - sin(2*t) + 2*sin(3*t)/3
```

La solución para esta serie truncada es

```
sol1 = 2 * abs(T(I)) * sin(t + arg(T(I)))
      -abs(T(2 * I) + arg(T(2 * I))) * sin(2 * t)
      +2 * abs(T(3 * I)) * sin(3 * t + arg(T(3 * I)))/3
sol1
2 * sqrt(5) * sin(t - atan(2))/5 + sqrt(5) * sin(2 * t + atan(2))/10
-2 * sqrt(85) * sin(3 * t + atan(6/7))/255
```

Nótese que la solución que hemos obtenido es una aproximación de la solución real. Si tomamos más términos de la serie de Fourier, la aproximación será mejor, es decir, estará más cerca de la solución real. Hemos repetido las operaciones anteriores para $n = 1, 2$ y 6 y hemos obtenido las soluciones aproximadas que llamamos $sol0$, $sol2$ y $sol3$. Tecleando

```
plot(sol0,sol1,sol2,sol3,(t,-pi,3*pi))
```

obtenemos la gráfica conjunta de las 4 aproximaciones que se muestra en la Figura 4.1

Como vemos, las aproximaciones obtenidas son periódicas siendo la azul, con $n = 1$, la menos precisa.

1. Obtener la respuesta en régimen estacionario de los siguientes sistemas, probando previamente su estabilidad.

$$(a) \ y'' - 2y' + 5y = f_1(t). \quad (b) \ y''' + 4y'' + 5y' + 2y = f_2(t). \quad (c) \ 2y'' + 3y' + y = f_3(t),$$

donde $f_1(t)$ es la función 2-periódica con valor $f_1(t) = t^2$, $t \in (-1, 1)$, $f_2(t)$ es la función 2π -periódica con valor $f_2(t) = t - 1$, $t \in (-\pi, \pi)$, y $f_3(t)$ es la función 6-periódica con valor $f_3(t) = t$, $t \in (-3, 3)$. En cada caso, obtener la aproximación con 1, 2, 5 y 10 términos de la serie fr Fourier y representarlas conjuntamente en el intervalo $(-3L, 3L)$ si la función es $2L$ -periódica.

Bibliografía

- [DeGr] W. R. Derrick y S. I. Grossman, *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*, Fondo Educativo Interamericano, 1984.
- [Jim] V. Jiménez López, *Apuntes de ecuaciones diferenciales*, Servicio de publicaciones, Universidad de Murcia, 2000.
- [NaSa] R. K. Nagle y E. B. Saff, *Fundamentos de ecuaciones diferenciales* (2ª edición), Addison Wesley Longman, 1992.
- [Sim] G. F. Simmons, *Ecuaciones diferenciales (con aplicaciones y notas históricas)*, 2ª Edición, McGraw-Hill, 1993.