INGENIERÍA DE EDIFICACIÓN. MATEMÁTICAS BÁSICAS. Curso 2009/10.

Hoja 1: Inducción, combinatoria y binomio de Newton.

1. Demostrar por inducción las siguientes fórmulas:

   a) $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$.

   b) $1 + p + p^2 + ... + p^n = \dfrac{1 - p^{n+1}}{1 - p}$.

   c) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + ... + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

   d) $4^n \geq n^2$.

2. Se pide:

   a) Expresar las sumas de los apartados (a), (b) y (c) del ejercicio anterior en forma de sumatorio.

   b) Desarrollar $\sum_{i+j=3} i^3 j^3$.

   c) Teniendo en cuenta que $2k - 1 = k^2 - (k-1)^2$, calcular

   $$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1).$$

3. En los mundiales de atletismo, participan en la prueba de los 100 metros 16 corredores. Únicamente pueden correr 8 corredores a la vez, por lo que se hacen dos pruebas semifinales de las cuales pasan los cuatro primeros corredores a la final, que a su vez la disputan 8 corredores. Se reparten los trofeos de medalla de oro, plata y bronce al primer, segundo y tercer clasificado respectivamente. Se pide:

   a) Cuántos podiums se pueden formar con los corredores de la final.

   b) Una vez se ha disputado la primera semifinal, cuántas finales distintas podemos tener.

   c) Cuántas finales distintas podemos tener.

   d) Cuántas clasificaciones distintas podemos tener en la final (contando las posiciones de los 8 corredores).

   e) Cuántos podiums distintos se pueden formar a partir de los corredores de las dos semifinales (teniendo en cuenta los 16 corredores).

4. Probar por inducción que $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} a^i b^{n-i}$ y desarrollar $(a+b)^3$ y $(a-b)^4$.

   Calcular $\sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}$.