ÁLGEBRA Y ECUACIONES DIFERENCIALES. Curso 2008/9.

Hoja 9: Sistemas de ecuaciones diferenciales.

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$$

donde la matriz **A** es la siguiente:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d)} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(e)} \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{(f)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(g)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(h)} \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{(i)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Resolver los siguientes problemas de condiciones iniciales:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = -x \\ x(0) = y(0) = 1. \end{array} \right. \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -4(x+y) \\ x' + 4y' = -4y \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0. \end{array} \right. \quad \text{(c)} \left\{ \begin{array}{l} x' = 3x + 8y \\ y' = -3y - x \\ x(0) = 6,\ y(0) = -2. \end{array} \right.$$

$$\text{(d)} \left\{ \begin{array}{l} x' = x - z \\ y' = 2y \\ z' = x + z \\ x(0) = -2,\ y(0) = 2,\ z(0) = -1. \end{array} \right. \quad \text{(e)} \left\{ \begin{array}{l} x' = y + z \\ y' = -x + z \\ z' = -x - y \\ x(0) = y(0) = z(0) = -1. \end{array} \right.$$

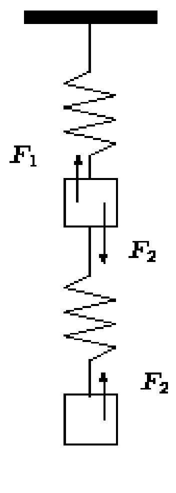
3. Resolver los siguientes sistemas y problemas de condiciones iniciales

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x' = y + te^{2t} \\ y' = -2x + 3y + e^{2t} \\ x(0) = 1,\ y(0) = -1. \end{array} \right. \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} x' = 4x + 3y + 5z + e^t \sin 2t \\ y' = -y - 4z \\ z' = 2y + 3z \end{array} \right.$$

$$\text{(c)}\ \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(d)} \left\{ \begin{array}{l} x' = 2x + y - z \\ y' = -3x - y + z + t \\ z' = 9x + 3y - 4z \\ x(0) = z(0) = 0,\ y(0) = 3. \end{array} \right.$$

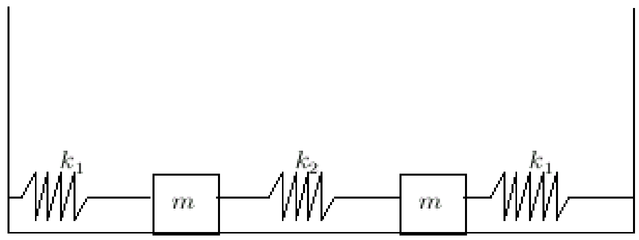
$$\text{(e)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -2x - 5y + t \\ y' = x + 2y + t^2 \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0. \end{array} \right. \quad \text{(f)} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix} \\ x(0) = -1,\ y(0) = 0. \end{array} \right.$$

4. Dos sólidos están atados a unos resortes como indica la figura.



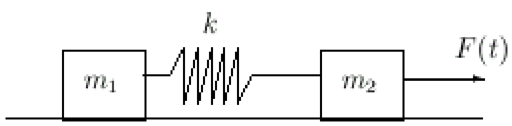
Si están en equilibrio, determinar las ecuaciones del movimiento para ambos sólidos cuando se separan de su posición de equilibrio. Aplicarlo al caso en que las masas de los son iguales a $1K_g$. los resortes tienen una constante recuperadora de 2 y 1 N/m, respectivamente y los cuerpos se separan 1 y 0.5 m.

5. Dado el sistema en equilibrio determinado por la figura

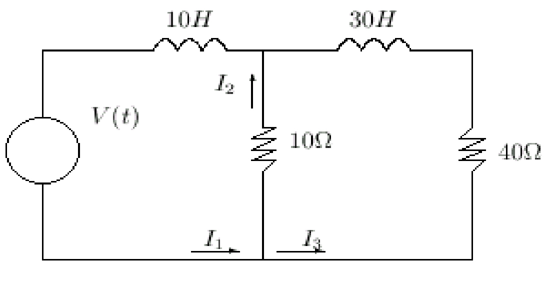


determinar las ecuaciones de movimiento que se producen al desplazar la masa de la izquierda $75\,mm$ hacia la izquierda para luego soltarla. Se supone que no hay resistencia con el suelo y que $m = 1\,kg$, $k_1 = 2\,N/mm$ y $k_2 = 1\,N/mm$. Determinar las posiciones de los cuerpos a los 5 segundos de soltar el cuerpo.

6. Determinar las ecuaciones de movimiento para el siguiente sistema suponiendo nulos los efectos del rozamiento de los cuerpos con el suelo, teniendo en cuenta que $m_1 = 2m_2 = 2$, $k = 2$ y $F(t) = t$ y que inicialmente ambos cuerpos estaban parados.

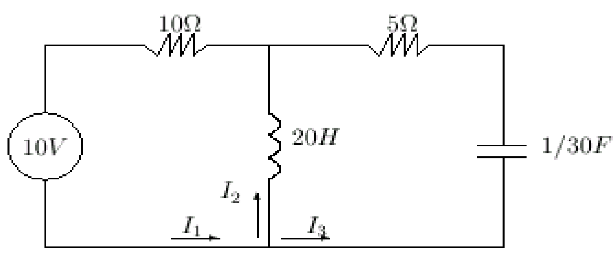


7. Determinar las intensidades que circulan por el siguiente circuito, inicialmente descargado (condiciones iniciales nulas), en los siguientes casos:

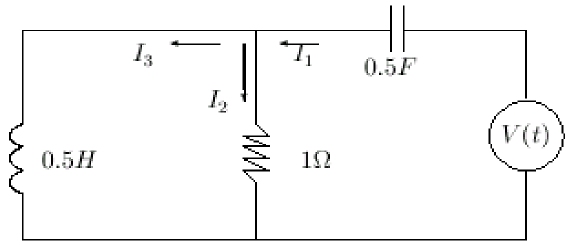


   (a) $V(t) = 20\,V$.
   (b) $V(t) = \cos t\,V$.
   (c) $V(t) = 10tV$.

8. Suponiendo condiciones iniciales nulas, calcular las intensidades del siguiente circuito

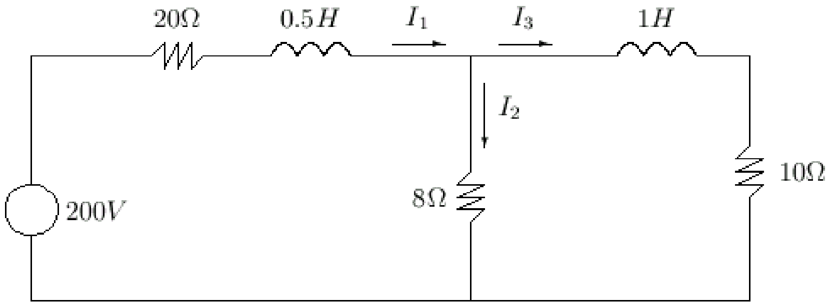


9. Suponiendo condiciones iniciales nulas, calcular las intensidades del siguiente circuito



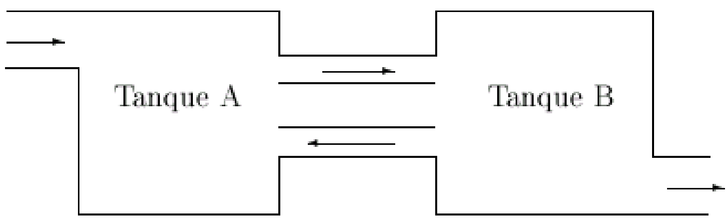
donde $V(t) = \cos(3t)$.

10. Dado el circuito de la figura, obtener la intensidad que circula por cada una de los cables sabiendo que inicialmente estaba descargado.



11. Resolver el ejercicio anterior suponiendo que el voltaje es de $\sin(2\pi t)$ voltios.

12. Dos tanques que contienen cada uno 50 litros de líquido se ecuentran interconectados por medio de dos tubos. El líquido fluye del tanque A hacia el tanque B a razón de 4 litros por minuto y del tanque B al tanque A a 1 litro por minuto. El líquido contenido en cada tanque se mantiene prefectamente agitado. Hacia el tanque A entra del exterior agua a razón de 3 litros por minuto y la solución fluye hacia el exterior por el tanque B a la misma velocidad. Si inicialmente el tanque A contiene 25 kilos de sal y el tanque B no contiene nada de sal, determinar la cantidad de sal en cada instante de tiempo.



13. Dos grandes tanques, cada uno de 50 litros se encuentran interconectados por un tubo. El líquido fluye del tanque A hacia el B a razón de 5 litros por minuto. El líquido contenido en el interior de cada tanque se mantiene bien agitado. Una salmuera con concentración de 3 kilos por litro fluye del exterior hacia el tanque A a razón de 5 litros por minuto, saliendo hacia el exterior a la misma velocidad por un tubo situado en el tanque B. Si el tanque A contiene inicialmente 50 kilos de sal y el tanque B contiene 100 kilos, determinar la cantidad de sal en cada instante.