Prácticas de Algebra con Mathematica II (Ingeniería Industrial).

Jose Salvador Cánovas Peña.
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística.

Índice General

Capítulo 1

PRACTICAS CON MATHEMATICA

1.1 Introducción

Vamos a iniciar la segunda parte de las prácticas de álgebra lineal con el programa Mathematica. Para ello es necesario que domineis y tengáis presentes los contenidos de la práctica anterior. Es recomendable entonces que tengáis a mano el primer manual de prácticas.

En esta segunda práctica vamos a centrarnos en los contenidos relacionados con espacios vectoriales de dimensión finita, utilizando par hacer los ejercicios matrices y las operaciones aprendidas sobre éstas en la primera parte de las prácticas.

1.2 Algebra lineal con Mathematica II

1.2.1 Vectores

Para escribir vectores de $\mathbb{K}^n$ debemos de introducir cada una de las componentes del mismo entre llaves, separándolas por comas. Así, el vector $\mathbf{v} = (1, 2, -1, 5)$ de $\mathbb{R}^4$ se tecleará

$$\begin{aligned} \mathrm{In}[23] &:= \mathbf{v} = \{1, 2, -1, 5\} \\ \mathrm{Out}[23] &= \{1, 2, -1, 5\}. \end{aligned}$$

Operaciones con vectores.

Dados dos vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ y un número real λ, se definen con Mathematica las siguientes operaciones:

$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$	suma de vectores
$\lambda * \mathbf{v}_1$ o $\lambda \mathbf{v}_1$	multiplicación del vector $\mathbf{v}_1$ por λ
$\mathrm{Dot}[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$	producto escalar de $\mathbf{v}_1$ por $\mathbf{v}_2$

Por ejemplo, si introducimos los vectores de $\mathbb{R}^3$ $\mathbf{v} = (1, 2, 1)$ y $\mathbf{u} = (0, 1, 0)$ podemos calcular la suma de ambos, $2\mathbf{v}$ y el producto escalar de ambos vectores del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{In}[26] &:= \mathbf{v} = \{1, 2, 1\}; \mathbf{u} = \{0, 1, 0\}; \\
\mathrm{In}[27] &:= \mathbf{u} + \mathbf{v} \\
\mathrm{Out}[28] &= \{1, 3, 1\} \\
\mathrm{In}[29] &:= 2\mathbf{v} \\
\mathrm{Out}[29] &= \{2, 4, 2\} \\
\mathrm{In}[30] &:= \mathrm{Dot}[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \\
\mathrm{Out}[30] &= 2.
\end{aligned}$$

Actividad 1 *Dados los vectores* $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{u} = (3, -1, 0, 2)$ *y* $\mathbf{w} = (2, 0, 0, 1)$ *calcular:*

(a) $< \mathbf{w}, \mathbf{v} > \mathbf{u}$ *(b)* $\mathbf{u} - 2\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$ *(c)* $< 2\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} >$

(d) $\|\mathbf{w}\|$ *(e)* $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ *(f)* $\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w}$

Actividad 2 *Decir si los siguientes vectores de* $\mathbb{R}^4$ *son linealmente independientes:*

(a) $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$.

(b) $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$.

(c) $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (2, 0, 0, 0)\}$.

Actividad 3 *¿Alguno de los conjuntos de la actividad 2 son una base de* $\mathbb{R}^4$*?.*

1.2.2 Aplicaciones lineales

El estudio de las aplicaciones lineales también puede hacerse a través de Mathematica empleando la matriz asociada a la aplicación lineal respecto de las bases canónicas. Pongamos un ejemplo. Consideremos la aplicación lineal $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{f}(x, y) = (x + y, 2x + 2y, 3x + 3y).$$

Como sabemos, la matriz asociada a $\mathbf{f}$ en la bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (que denotaremos por $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ respectivamente) es

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}_3\mathcal{C}_2}(\mathbf{f}) = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si queremos calcular el núcleo de la aplicación lineal, tendremos que resolver el sistema lineal

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que como sabemos de la práctica anterior, se obtiene con la sentencia *NullSpace*. Así, si introducimos la matriz

$$\text{In}[1] := \mathbf{A} = \{\{1, 1\}, \{2, 2\}, \{3, 3\}\};$$

$$\begin{array}{rcl} \text{In}[2] & := & \text{NullSpace}[\mathbf{A}] \\ \text{Out}[2] & = & \{\{-1, 1\}\} \end{array}$$

donde $(-1, 1)$ será una base del núcleo de $\mathbf{f}$. Así el núcleo de $\mathbf{f}$ será

$$\text{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -y\}.$$

Si lo que queremos es calcular la imagen, tenemos que tener en cuenta que las columnas linealmente independientes de $\mathbf{A}$ son una base de la imagen. Es fácil ver en este caso que la imagen está generada por el vector $(1, 2, 3)$ con lo que la imagen tendrá ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = \lambda, \\ y = 2\lambda, \\ z = 3\lambda. \end{cases}$$

Eliminando el parámetro λ en las ecuaciones anteriores igualando a cero los determinantes de las matrices $\begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} x & 1 \\ z & 3 \end{pmatrix}$ (cosa que se puede hacer con Mathematica) se obtiene

$$\operatorname{Im} \mathbf{f} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x,\ z = 3x\}.$$

Además, multiplicando por apropiadas matrices de cambio de base podemos expresar la matriz asociada a $\mathbf{f}$ en otras bases. Por ejemplo, si queremos expresar la matriz asociada a $\mathbf{f}$ en las bases $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ tendremos que multiplicar

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{C}_3}(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{C}_3\mathcal{C}_2}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{C}_2\mathcal{B}}(\mathbf{i}).$$

Como sabemos

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}_2\mathcal{B}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}_3\mathcal{B}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

por lo que con las operaciones con matrices estudiadas en las prácticas anteriores podemos calcular la matriz que queremos.

Actividad 4 *Se considera la aplicación lineal* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida respecto a esta base por la relación:*

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_2 - x_1).$$

Se pide:

(a) Calcular la matriz de $\mathbf{f}$ *respecto a la base canónica.*

(b) Calcular el núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$*.*

(c) Determinar una base de $\operatorname{Ker}(\mathbf{f})$ *y la ampliar a una base de* $\mathbb{R}^3$*.*

(c) Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ *respecto a esta nueva base.*

Actividad 5 *Sea* $\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *una aplicación lineal dada por:*

$\mathbf{g}(-1,1,3) = (6,-4,16);\ \mathbf{g}(-2,1,1) = (-2,-5,1);\ \mathbf{g}(3,2,-1) = (1,14,-12).$

Se pide hallar la matriz de $\mathbf{g}$ *respecto a la base canónica de* $\mathbb{R}^3$*, las ecuaciones del núcleo y la imagen de* $\mathbf{g}$ *y una base de ambos subespacios.*

Actividad 6 *Sea* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *una aplicación lineal definida por:*

$$\begin{array}{ll} \mathbf{f}(1,1,1,1) = (0,0,1) & \mathbf{f}(1,0,1,0) = (1,1,-1) \\ \mathbf{f}(1,1,1,0) = (0,0,-1) & \mathbf{f}(-1,-2,0,0) = (1,1,1) \end{array}$$

Se pide calcular:

(a) *La matriz de* $\mathbf{f}$ *respecto a las bases canónicas.*

(b) *La dimensión y ecuaciones de* $\mathrm{Ker}(\mathbf{f})$ *e* $\mathrm{Im}(\mathbf{f})$.

(c) *La matriz de* $\mathbf{f}$ *respecto de la base canónica de* $\mathbb{R}^4$ *y la base de* $\mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1),\ (1,0,1),\ (1,1,0)\}$$

así como las ecuaciones de la imagen de $\mathbf{f}$ *en esta última base.*

(d) *La matriz de* $\mathbf{f}$ *respecto de las bases*

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,1,1,0),\ (1,1,0,0),\ (1,0,0,0),\ (1,1,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^4$ *y* $\mathcal{B}_2 = \{(1,1,1),\ (0,1,1),\ (0,0,1)\}$ *de* $\mathbb{R}^3$*, así como las ecuaciones del núcleo y la imagen de* $\mathbf{f}$ *en estas bases.*

Actividad 7 *Sean* $\mathbf{g}$ *y* $\mathbf{f}$ *las aplicaciones lineales de los ejercicios 5 y 6. Calcula la matriz de la aplicación compuesta* $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ *respecto de las bases canónicas de* $\mathbb{R}^4$ *y* $\mathbb{R}^3$*. Calcula además el núcleo, la imagen y el espacio invariante de dicha aplicación.*

1.2.3 Diagonalización de matrices cuadradas

Dada una matriz cuadrada $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es posible a veces encontrar una matriz diagonal $\mathbf{D} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ de manera que existe una matriz invertible $\mathbf{P} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ de forma que

$$\mathbf{D} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

Los elementos de la matriz diagonal $\mathbf{D}$ se llaman valores propios de $\mathbf{A}$, y las matrices $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}^{-1}$ son matrices de cambio de base que nos pasan de la matriz $\mathbf{A}$ a la $\mathbf{D}$. Hemos de remarcar que no siempre existe la forma diagonal de una matriz.

Mathematica dispone de sentencias que permiten calcular rápidamente la forma diagonal de la matriz, en caso de que ésta exista, proporcionando además una base de vectores propios. También dispone de una sentencia para calcular la forma diagonal, y en caso de que ésta no exista, una forma canónica lo más parecido posible a la forma diagonal. Consideremos una matriz cuadrada arbitraria $\mathbf{A}$. Las sentencias que vamos a usar son las siguientes:

Eigenvalues[**A**]	valores propios de **A**
Eigenvectors[**A**]	base de vectores propios
JordanDecomposition[**A**]	forma diagonal de **A**

Por ejemplo, si consideramos la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ podemos calcular

$$\begin{array}{rcl}
\text{In[38]} & := & \mathbf{A} = \{\{3,-1,-1\},\{-1,4,1\},\{1,2,5\}\}; \\
\text{In[39]} & := & \text{Eigenvalues}[\mathbf{A}] \\
\text{Out[39]} & = & \{2,4,6\} \\
\text{In[40]} & := & \text{Eigenvectors}[\mathbf{A}] \\
\text{Out[40]} & = & \{\{-1,-1,1\},\{1,-1,1\},\{-1,1,1\}\} \\
\text{In[41]} & := & \text{JordanDecomposition}[\mathbf{A}] \\
\text{Out[41]} & = & \{\{\{-1,1,-1\},\{-1,-1,1\},\{1,1,1\}\}, \\
 & & \{\{2,0,0\},\{0,4,0\},\{0,0,6\}\}\}
\end{array}$$

donde la fila superior de la salida 41 son los vectores propios y la fila inferior es la matriz diagonal.

Actividad 8 *Hallar la forma diagonal, cuando sea posible, de las siguientes matrices, así como la matriz del cambio de base:*

$$
(a)\ \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (b)\ \begin{pmatrix} 5 & 7 & 5 \\ -6 & -5 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (c)\ \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 \\ -18 & 0 & 3 \\ -21 & 4 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
(d)\ \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (e)\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (f)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
$$

Actividad 9 *Si* $\mathbf{A}$ *es diagonalizable, entonces existen* $\mathbf{D}$*, matriz diagonal y* $\mathbf{P}$ *invertible, tal que*

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} \textit{ es decir } \mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

Observa que entonces, si n *es un número natural,*

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

Aplica este método para calcular la potencia n-ésima de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Actividad 10 *Sea la aplicación lineal* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ *definida por*

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}(x, y, z, s, r) \;=\; & (-3r - 3s + x + 5y + z, -3r - 3s + 5x + y + z, \\
& -4r - 4s + 4x + 4y, -5r - s + 3x + 3y - z, -r - 5s + 3x + 3y - z).
\end{aligned}
$$

Calcular:

(a) La matriz $\mathbf{A}$ asociada a $\mathbf{f}$ respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^5$.

(b) El núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$.

(c) Todos los vectores de $\mathbb{R}^5$ tales que $\mathbf{f}(x, y, z, s, r) = (1, 1, 1, 1, 0)$.

(d) Calcular la matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1,1,1),(1,1,1,1,0),(1,1,1,0,0),(1,1,0,0,0),(1,0,0,0,0)\}.$$

(e) Decir si es o no diagonalizable la matriz obtenida en el primer apartado. En caso de serlo obtener la matriz diagonal y las matrices de canmbio de base.

(f) Para todo $n \geq 0$ obtener $\mathbf{A}^n$.

Bibliografía

[1] Stephen Wolfram, *"The Mathematica Book"*, Wolfram Media, Cambridge University Press.

[2] E. Castillo y otros, *Mathematica*, Ed. Paraninfo.