Prácticas de Ecuaciones Diferenciales con Mathematica

José Salvador Cánovas Peña
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística.
Universidad Politécnica de Cartagena.

18 de abril de 2007

Índice General

Capítulo 1

Ecuaciones diferenciales con Mathematica

1.1 Derivadas de funciones

Supongamos que tenemos una función de una variable real $f(x)$ o de varias variables reales $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ a la que queremos calcular su derivada o derivada parcial respecto de alguna de sus variables. El comando que realiza ese cálculo con Mathematica es

$$\mathrm{D}[f, x] \text{ ó } \mathrm{D}[f, x_i].$$

Por ejemplo si queremos calcular la derivada de $f(x) = \sin x$ escribiremos

$$\begin{aligned} \mathrm{In}[24] := & \quad \mathrm{D}[\mathrm{Sin}[x], x] \\ \mathrm{Out}[24] = & \quad \mathrm{Cos}[x], \end{aligned}$$

especificando tanto la función como la variable respecto de la cual vamos a derivar. Para calcular la derivada parcial con respecto a la variable y de la función $f(x,y) = \sin(x+y)$ debemos escribir

$$\begin{aligned} \mathrm{In}[25] := & \quad \mathrm{D}[\mathrm{Sin}[x+y], y] \\ \mathrm{Out}[25] = & \quad \mathrm{Cos}[x+y]. \end{aligned}$$

Para calcular la derivada n–ésima de $f(x)$, hemos de proceder con el comando

$$\mathrm{D}[f, \{x, n\}].$$

Así la segunda derivada de $f(x) = \sin x$ se calcula tecleando

$$\begin{aligned} \text{In}[26] &:= \text{D}[\text{Sin}[x], \{x, 2\}] \\ \text{Out}[26] &= -\text{Sin}[x] \end{aligned}$$

y $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ de la función $f(x, y) = \sin(x + y)$ sería

$$\begin{aligned} \text{In}[27] &:= \text{D}[\text{Sin}[x + y], \{y, 3\}] \\ \text{Out}[27] &= -\text{Cos}[x + y]. \end{aligned}$$

Si ahora queremos calcular derivadas parciales de funciones respecto de diferentes variables hemos de indicarlo del modo siguiente

$$\text{D}[f, x_1, x_2, ..., x_n].$$

Así por ejemplo $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ de la función $f(x, y) = \sin(x + y)$ se calcula escribiendo

$$\begin{aligned} \text{In}[28] &:= \text{D}[\text{Sin}[x + y], x, y] \\ \text{Out}[28] &= -\text{Sin}[x + y]. \end{aligned}$$

Ejercicio 1 *Calcula las derivadas de las siguientes funciones:*

(a) $f(x) = \log(\sin x)$. *(b)* $f(x) = \frac{\arcsin x}{e^x \log_4(x^2+10)}$. *(c)* $f(x) = 1 + \left(\frac{3x+e^x}{x^2+\tan\sqrt{x}}\right)$. *(d)* $f(x) = x^x$.

Ejercicio 2 *Demostrar que las funciones siguientes satisfacen la ecuación diferencial que aparece a su lado.*

(a) $y(x) = 2 - x + x^2$, *de la ecuación* $y' + y = x^2$.

(b) $y(x) = \frac{1}{2}(e^{-x^2} + 1)$, *de la ecuación* $y' + 2xy = x$.

(c) $y(x) = \sqrt{1 + x^2}$, *de la ecuación* $y'y = x$.

(d) $y(x) = \frac{1}{4}(e^x - 2xe^{-x} - e^{-x})$, *de la ecuación* $y'' + 2y' + y = e^x$.

1.2 Representación gráfica de funciones

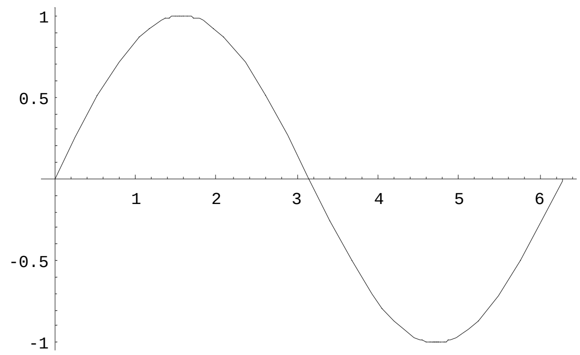
Mathematica permite hacer representaciones gráficas de funciones de una y varias variables. Para ello hemos de darle tanto la función, como el dominio de definición de ésta.

Para la representación gráfica de funciones reales de variable real, tenemos el comando

$$\mathrm{Plot}[f[x], \{x, x_0, x_1\}],$$

donde indicamos la función, la variable de la función, y un intervalo $[x_0, x_1]$ donde hacer la representación. Así, para representar la función $f(x) = \sin x$ en el dominio $[0, 2\pi]$ escribimos

$$\mathrm{In}[30] := \mathrm{Plot}[\mathrm{Sin}[x], \{x, 0, 2\mathrm{Pi}\}].$$

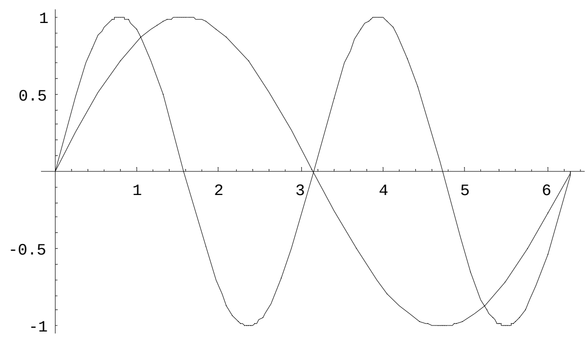


Para representar varias funciones a la vez hemos de escribir todas las funciones que deseemos representar entre llaves y separadas por comas, es decir

$$\mathrm{Plot}[\{f_1[x], f_2[x], ..., f_n[x]\}, \{x, x_0, x_1\}].$$

Si escribimos entonces

$$\mathrm{In}[31] := \mathrm{Plot}[\{\mathrm{Sin}[x], \mathrm{Sin}[2x]\}, \{x, 0, 2Pi\}]$$



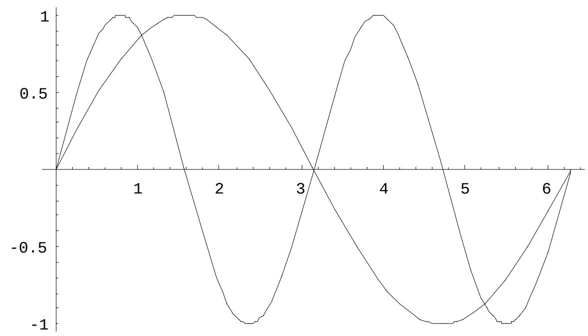
generaremos una representación gráfica simultánea de las funciones $\sin x$ y $\sin 2x$.

Para volver a representar gráfica una función ya representada previamente tenemos el comando

$$\text{Show}[\%n].$$

Así, si escribimos

$$\text{In}[33] := \text{Show}[\%31],$$



obtenemos una nueva representación gráfica simultánea de las funciones $\sin x$ y $\sin 2x$.

Ejercicio 3 *Representar gráficamente las siguientes funciones de una variable:*

(a) $f(x) = \frac{1+x}{1-x^2}$ *en el dominio* $[-2, 2]$.

(b) $f(x) = e^{x^2} \frac{1+x}{1-x^2}$ *en el dominio* $[-2, 2]$.

(c) $f(x) = \sin\left(\frac{1+x}{1-x^2}\right)$ *en el dominio* $[-2, 2]$.

(d) $f(x) = e^{x \cos x}$ *en el dominio* $[-5, 5]$.

(e) $f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$ *en el dominio* $[-\pi, \pi]$.

Ejercicio 4 *Representar conjuntamente las gráficas de los apartados (a), (b) y (c) del ejercicio anterior.*

1.3 Ecuaciones diferenciales de primer orden

Veamos cómo Mathematica es capaz de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Podemos resolver tanto ecuaciones diferenciales de la forma

$$y' = f(x, y)$$

como problemas de condiciones iniciales de la forma

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

En primer lugar, hemos de aprender a escribir ecuaciones diferenciales de manera que Mathematica las entienda. Esto se hace siguiendo la siguiente forma

$$y'[x] == f[x, y[x]].$$

Para calcular todas las soluciones de dicha ecuación diferencial tenemos la sentencia

$$\text{DSolve}[y'[x] == f[x, y[x]], y[x], x],$$

indicando la ecuación y las variables dependiente e independiente. Así para resolver la ecuación $y' = xy$ escribiremos

$$\begin{aligned} \text{In}[1] \quad &:= \quad \text{DSolve}[y'[x] == x * y[x], y[x], x] \\ \text{Out}[1] \quad &= \quad \{\{y[x] \to \text{E}^{\frac{x^2}{2}} C[1]\}\} \end{aligned}$$

y la solución de la ecuación diferencial es de la forma $y(x) = C[1]e^{x^2/2}$, donde $C[1]$ es la constante que proviene de la integración.

Para resolver problemas de condiciones tenemos que utilizar la sentencia anterior escribiendo la ecuación diferencial y la condición inicial entre llaves y separadas por comas. Así el problema

$$\begin{cases} y' = xy \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

se resuelve escribiendo

$$\begin{aligned} \text{In}[2] \quad &:= \quad \text{DSolve}[\{y'[x] == x * y[x], y[1] == 2\}, y[x], x] \\ \text{Out}[2] \quad &= \quad \{\{y[x] \to 2\text{E}^{-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2}}\}\} \end{aligned}$$

cuya solución es $y(x) = 2e^{-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2}}$.

Ejercicio 5 *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de orden uno:*

(a) $yy' = \cos t$, $y(\pi) = 3$.

(b) $y' = (1 + x)(1 + y)$.

(c) $\frac{y^2}{2} + 2ye^x + (y + e^x)y' = 0$.

(d) $2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0$.

(e) $y' = x - y$, $y(0) = 0$.

(f) $2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0$, $y(2) = 4$.

Ejercicio 6 *Hallar la familia de curvas que cumple que para todo punto (x, y) de la misma, la distancia entre (x, y) y el origen de coordenadas es igual a la longitud del segmento de la recta normal comprendido entre (x, y) y el punto de corte de la recta normal con el eje x.*

Ejercicio 7 *La población de medusas del Mar Menor varía de manera proporcional a la cantidad de medusas que hay en ese momento. Si inicialmente la población de medusas era de* 100.000 *individuos y al cabo de* 2 *años dicha población se triplicó, calcular la población al cabo de 10 años. Calcular la población de medusas para cada instante de tiempo t y calcula su límite cuando $t \to +\infty$. En virtud del resultado obtenido ¿te parece acertado el modelo? ¿qué pegas le encuentras?*

Ejercicio 8 *Un tanque contiene* 40 *l. de agua pura. Una solución salina con* 100 *gr. de sal por litro entra en el tanque a razón de* 1.6 *l/min. y sale del tanque a razón de 2.3 l/min. Se pide:*

(a) *Determinar la concentración de sal en el tanque en cualquier tiempo.*

(b) *Hallar la cantidad de agua en el tanque cuando la concentración de sal sea máxima.*

(c) *Calcular la mayor cantidad de sal que llega a haber en el tanque en un momento dado.*

(d) *Encontrar la concentración de sal en el tanque cuando éste tenga 25 l. de agua.*

Ejercicio 9 *La velocidad a la que se transmite un noticia en un grupo es directamente proporcional al número de individuos que aun no la conocen. Si inicialmente había 10 personas que sabían la noticia y a los 3 dias la conocían 100 personas, determinar cuanta gente lo sabrá al mes de producirse la noticia (tomar como población de España 40.000.000).*

1.4 Ecuaciones diferenciales lineales.

Finalizaremos estas prácticas indicando como resolver ecuaciones diferenciales lineales de orden mayor que uno, es decir, expresiones de la forma

$$y^{n)} + p_1(x)y^{n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \tag{1.1}$$

donde $f(x)$ y las funciones $p_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, son funciones continuas. En primer lugar, hemos de aprender a escribir la ecuación (1.1) de manera que el programa Mathematica la entienda. Esto se hace escribiendo:

$$y'\overset{n}{\cdots}'[x] + p_1[x]y'\overset{n-1}{\cdots}'[x] + ... + p_{n-1}[x]y'[x] + p_n[x]y[x] == f[x]. \tag{1.2}$$

Nuevamente, la sentencia que se utiliza para resolver ecuaciones de este tipo es DSolve. Así, para resolver la ecuación (1.1) hemos de escribirla de la forma presentada en (1.2) dentro de una sentencia DSolve indicando la variable dependiente en primer lugar y la independiente a continuación. Por ejemplo, para resolver la ecuación

$$y'' - y = x$$

hemos de escribir

$$\mathrm{In}[1] := \mathrm{DSolve}[y''[x] - y[x] == x, y[x], x]$$

que proporciona la siguiente respuesta

$$\mathrm{Out}[1] = \{\{y[x] \to -x + \mathrm{E}^{-x}C[1] + \mathrm{E}^{x}C[2]\}\},$$

de donde la solución general de la ecuación diferencial es $y(x) = -x + C[1]e^{-x} + C[2]e^{x}$, donde $C[1]$ y $C[2]$ son dos constantes que provienen de la integración. Podemos además resolver problemas de condiciones iniciales escribiendo éstas entre llaves. Por ejemplo, para resolver el problema anterior

$$\begin{cases} y'' - y = x \\ y(0) = 1; y'(0) = 0, \end{cases}$$

hemos de escribir lo siguiente:

$$\mathrm{In}[2] := \mathrm{DSolve}[\{y''[x] - y[x] == x, y[0] == 1, y'[0] == 0\}, y[x], x]$$

obteniendo

$$\mathrm{Out}[2] = \{\{y[x] \to (\mathrm{E}^{-x}x)(\mathrm{E}^{2x} - \mathrm{E}^{x}x)\}\}.$$

Notemos aquí que las condiciones iniciales $C[1]$ y $C[2]$ han desaparecido al aplicar las condiciones $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

Ejercicio 10 *Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes:*

(a) $2y'' + y' + y = x$.

(b) $y'' + 2y' + y = xe^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

(c) $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^x$.

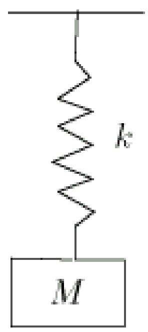
(d) $y'' + 5y' + 6y = x^3 \cos x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

(e) $2x^2y'' + xy' + y = 0$.

1.5 Aplicaciones de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes.

1.5.1 Movimiento armónico simple.

Como sabemos, el movimiento armónico simple es aquél producido al colocar una masa en muelle como muestra la siguiente figura



Entonces, si suponemos el cuerpo libre de rozamiento y lo desplazamos verticalmente respecto de su posición de equilibrio, dicho cuerpo comienza a moverse según la ecuación diferencial

$$my'' + ky = 0, \tag{1.3}$$

donde m es la masa del objeto y k es la constante de recuperación del muelle. Dado que la masa m y la constante k son positivas, puede comprobarse que para cualquier condición inicial, la solución de la ecuación (1.3) es de la forma

$$y(t) = c_1 \sin(\sqrt{k/m}t) + c_2 \cos(\sqrt{k/m}t),$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes reales que se calcularán una vez tengamos las condiciones iniciales $y(0)$ e $y'(0)$. Si expresamos c_1 y c_2 en coordenadas polares

$$\begin{cases} c_1 = A\cos\varphi, \\ c_2 = A\sin\varphi, \end{cases}$$

obtenemos la expresión

$$y(t) = A\sin(\omega t + \varphi), \tag{1.4}$$

donde A recibe el nombre de amplitud, $\omega = +\sqrt{k/m}$ se conoce como frecuencia y φ como fase inicial.

Ejercicio 11 *Supongamos que desplazamos el cuerpo de la posición de equilibrio* 1 *m. Se pide calcular las ecuaciones del movimiento para los siguientes valores de la masa y la constante de recuperación del muelle:*

(a) $m = 1$ *kg.* $k = 1$ *N/m. e* $y'(0) = 0$.

(b) $m = 2$ *kg.* $k = 0.5$ *N/m. e* $y'(0) = 1$.

(c) $m = 1$ *kg.* $k = 4$ *N/m. e* $y'(0) = 2$.

Dibujar las gráficas de las funciones obtenidas al resolver las ecuaciones anteriores en el intervalo $[0, 10\pi]$ *y comprobar que son periódicas, calculando el periodo de éstas. Obtener además la amplitud, frecuencia y fase inicial de los movimientos anteriores.*

1.5.2 Movimiento amortiguado.

Si suponemos que sobre el cuerpo colgado del muelle anterior se ejerce una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad con constante de proporcionalidad c, sabemos que la ecuación del movimiento se escribe de la forma

$$my'' + cy' + ky = 0. \tag{1.5}$$

En este caso se presentan tres situaciones perfectamente diferenciadas:

- Movimiento *sobreamortiguado.* $c^2 - 4mk > 0$.

- Movimiento *críticamente amortiguado.* $c^2 - 4mk = 0$.
- Movimiento *subamortiguado.* $c^2 - 4mk < 0$.

En esta sección, pedimos resolver el siguiente problema.

Ejercicio 12 *Desplazamos de nuevo el cuerpo de la posición de equilibrio* 1 *m. Calcular las ecuaciones del movimiento en los siguientes casos:*

(a) $m = 1$ *kg.*; $c = 1$ $N \cdot sg/m$ *y* $k = 4$ N/m.

(b) $m = 1$ *kg.*; $c = 2$ $N \cdot sg/m$ *y* $k = 1$ N/m.

(c) $m = 1$ *kg.*; $c = 3$ $N \cdot sg/m$ *y* $k = 1$ N/m.

(d) $m = 1$ *kg.*; $c = 4$ $N \cdot sg/m$ *y* $k = 4$ N/m.

(e) $m = 1$ *kg.*; $c = 3$ $N \cdot sg/m$ *y* $k = 5$ N/m.

Determinar qué tipo de movimiento se obtiene en cada caso y hacer sucesivas representaciones gráficas de las funciones anteriores en los intervalos $[0, 2\pi]$, $[0, 4\pi]$, $[0, 8\pi]$ *y* $[0, 20\pi]$. *¿Qué información puedes obtener de las gráficas de las funciones? Caracteriza cualitativamente el movimiento sobreamortiguado, críticamente amortiguado y subamortiguado.*

Ejercicio 13 *Hacer un estudio comparativo de los movimientos generados por los apartados de la Actividad 12 con el de un movimiento armónico simple tal que* m *y* k *tengan el valor que tenían en el apartado y* $c = 0$. *Representar a la vez las gráficas de las funciones obtenidas al resolver la ecuación amortiguada y la no amortiguada. Como orientación podeis tomar los intervalos dados en el ejercicio 12 para hacer las comparaciones.*

1.5.3 Movimiento forzado.

Supondremos ahora que el cuerpo que inicialmente considerábamos colgado de un muelle, además de estar sujeto a fuerzas de rozamiento, está afectado por una fuerza $F(t)$ que modifica y condiciona su movimiento. Hablaremos entonces de movimiento forzado, cuya ecuación de movimiento viene dada por la ecuación diferencial

$$my'' + cy' + ky = F(t). \tag{1.6}$$

Ejercicio 14 *Resolver el problema de condiciones iniciales*

$$\begin{cases} y'' + 4y = F(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

en los siguientes casos:

(a) $F(t) = 1$. *(b)* $F(t) = \cos t$. *(c)* $F(t) = \sin t$.

(d) $F(t) = \cos(2t)$. *(e)* $F(t) = \sin(2t)$. *(f)* $F(t) = e^t$.

(g) $F(t) = t$. *(h)* $F(t) = \sin(2.1t)$. *(i)* $F(t) = \cos(1.9t)$.

Hacer un estudio de las gráficas de las funciones resultantes en un intervalo de la forma $[0, T]$*, aumentando el valor de* T *progresivamente, como en el ejercicio 12. ¿Qué gráficas parecen acotadas? ¿Qué explicación le das para el caso en que las gráficas no estén acotadas?*

Ejercicio 15 *Resolver la ecuación diferencial correspondiente a un muelle donde* $m = 1$, $c = 2$ *y* $k = 2$

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Obtener a continuación para cada uno de los siguientes apartados la solución particular de la ecuación no homogénea correspondiente y la representación gráfica por separado y conjunta de la solución particular de la ecuación no homogénea y de la solución de los problemas de condiciones iniciales correspondientes en los intervalos $[0, 1]$, $[0, 2]$, $[0, 5]$ *y* $[0, 10]$.

(a) $y'' + 2y' + 2y = \cos t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

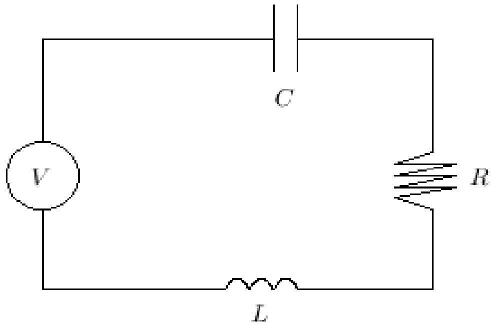
(b) $y'' + 2y' + 2y = e^{-t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

(c) $y'' + 2y' + 2y = t^2 + 1$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

¿Qué consecuencias puedes sacar a partir de las gráficas obtenidas?

1.6 Aplicación a los circuitos eléctricos

Consideremos un circuito eléctrico que lleve en serie una bobina de inductancia L, una resistencia R, un condensador de capacidad C y que es alimentado por una f.e.m. $V(t)$, según muestra la siguiente figura



Suponiendo que L, R y C son constantes, mediante física elemental se sabe que el voltaje generado $V(t)$ se consume en todos los elementos del circuito, es decir,

$$V(t) = V_C + V_R + V_L$$

donde V_C, V_R y V_L representan la diferencia de potencial entre el condensador, la resitencia y la bobina respectivamente. Sabiendo que

$$V_C = \frac{q(t)}{C},$$

donde $q(t)$ es la carga en cada instante de tiempo,

$$V_R = Rq'(t)$$

y

$$V_L = Lq''(t),$$

obtenemos la ecuación lineal de orden dos

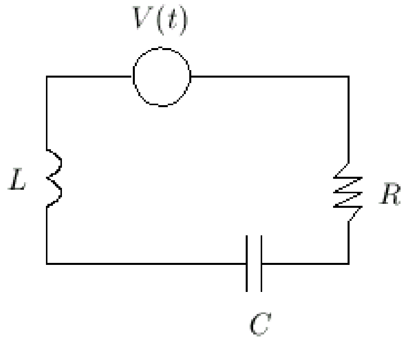
$$Lq''(t) + Rq'(t) + q(t)/C = V(t). \tag{1.7}$$

Teniendo en cuenta que la intensidad $i(t)$ se define como la derivada de la carga $q(t)$ obtenemos la ecuación en términos de la intensidad

$$Li''(t) + Ri'(t) + i(t)/C = V'(t) \tag{1.8}$$

Como puede apreciarse, las ecuaciones (1.7) y (1.8) son idénticas a la ecuación que proviene de la vibración de un muelle. Así, cabe el mismo análisis para circuitos que hicimos en el apartado anterior.

Ejercicio 16 *Consideremos el circuito eléctrico de la figura.*



Calcular la intensidad de corriente que pasa por los cables de dicho circuito en los siguientes casos, haciendo un estudio gráfico de la misma, suponiendo que el circuito está descargado ($i(0) = i'(0) = 0$)*:*

(a) $C = 1F$; $R = 1\Omega$; $L = 0H$; $V(t) = \sin t$.

(b) $C = 1F$; $R = 2\Omega$; $L = 0H$; $V(t) = e^t \cos(2t)$.

(c) $C = 2F$; $R = 3\Omega$; $L = 1H$; $V(t) = e^{3t}$.

(d) $C = 1F$; $L = 1H$; $V(t) = \sin t$.

(e) $C = 0.5F$; $R = 1\Omega$; $L = 1H$; $V(t) = t^2$.

(f) $C = 0.25F$; $R = 4\Omega$; $L = 2H$; $V(t) = -t \cos t$.

Bibliografía

[1] Stephen Wolfram, *"The Mathematica Book",* Wolfram Media, Cambridge University Press (1998).

[2] M.L. Abell y J.P. Braselton, *Differential Equations with Mathematica,* Ed. AP Proffessional.