Exámenes de álgebra y ecuaciones diferenciales

Jose Salvador Cánovas Peña

1 de marzo de 2008

Índice General

Previo

Estos ejercicios no han sido corregidos convenientemente. Por ello, si encuentras algún error, escríbeme y dímelo para poder depurar los errores.

Capítulo 1

12–6–2000

Enunciado

1. Resolver las siguientes ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales:

   (a) $\dfrac{y^2}{2} + 2ye^x + (y + e^x)y' = 0.$ **(2 puntos)**

   (b) $\begin{cases} x^2y'' + 2xy' + y = x, \\ y(1) = y'(1) = 0. \end{cases}$ **(2 puntos)**

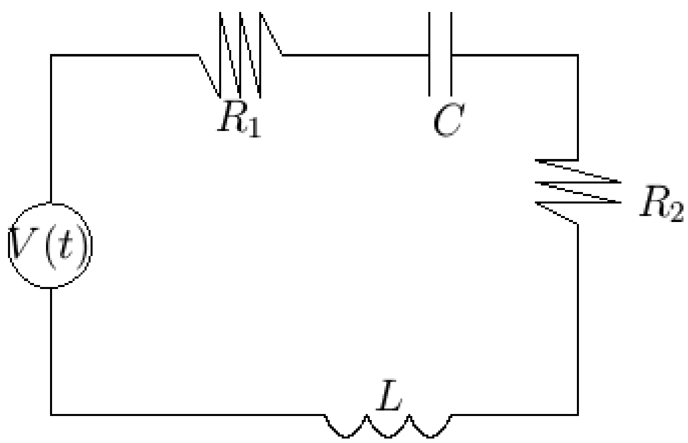
   (c) $x^2y' + xy + \sqrt{y} = 0$ **(2 puntos)**

   (d) $\begin{cases} x' = x + e^t \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = 3x + 2y + z. \end{cases}$ **(4 puntos)**

2. Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones:

   (a) Construir una ecuación diferencial lineal homogénea de orden dos y con coeficientes constantes que tenga por solución $y(x) = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$, donde c_1 y c_2 son constantes positivas. Determinar además el único problema de condiciones iniciales con $x = 0$ formado por la ecuación encontrada anteriormente que tiene por solución única $y(x) = xe^{3x}$. **(4 puntos)**

   (b) Dado el siguiente circuito



calcular la intensidad de corriente $i(t)$ para los valores $R_1 = R_2 = 2\Omega$, $C = 1F$, $L = 1H$, $V(t) = \sin t\ V$, suponiendo que inicialmente el circuito estaba descargado ($i(0) = i'(0) = 0$). **(6 puntos)**

3. Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones:

   (a) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Consideremos el problema de condiciones iniciales

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{array} \right. \tag{1.1}$$

   donde $(x_0, y_0) \in A$. Construir la ecuación integral asociada a dicho problema de condiciones iniciales y demostrar que toda solución continua de la ecuación integral es solución de (1.1). **(3 puntos)**

   (b) La población de medusas del Mar Menor varía de manera proporcional a la cantidad de medusas que hay en ese momento. Si inicialmente la población de medusas era de 100000 individuos y al cabo de 2 años dicha población se triplicó, calcular la población al cabo de 10 años. Calcular la población de medusas para cada instante de tiempo t y calcula su límite cuando $t \to +\infty$. En virtud del resultado obtenido ¿te parece acertado el modelo? ¿Qué pegas le encuentras? **(4 puntos)**

   (c) Definir solución estable, asintóticamente estable y función de Lyapunov. **(3 puntos)**

Examen resuelto

Resolver:
$$\frac{y^2}{2}+2ye^x+(y+e^x)y'=0.$$

Solución. Sean $P(x,y)=\dfrac{y^2}{2}+2ye^x$ y $Q(x,y)=y+e^x$. Vemos que
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=y+2e^x\neq e^x=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y),$$
por lo que la ecuación no es exacta y hemos de buscar un factor integrante. Para ello escribimos la ecuación
$$\mu(x,y)\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)+P(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y)=\mu(x,y)\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)+Q(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y)$$
que nos da
$$\mu(x,y)(y+2e^x)+\left(\frac{y^2}{2}+2ye^x\right)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y)=\mu(x,y)e^x+(y+e^x)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y)$$
que simplificando nos queda
$$\mu(x,y)(y+e^x)=(y+e^x)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y)-\left(\frac{y^2}{2}+2ye^x\right)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y),$$
y vemos que si μ sólo depende de x, tendríamos
$$\mu(x)=\mu'(x)$$
que nos da como posible solución $\mu(x)=e^x$. Así vemos que la ecuación
$$\frac{y^2e^x}{2}+2ye^{2x}+(e^xy+e^{2x})y'=0$$
es exacta y por lo tanto existe $f(x,y)$ tal que
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=\frac{y^2e^x}{2}+2ye^{2x},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=e^xy+e^{2x}.\end{aligned}$$
Integrando en la primera igualdad obtenemos
$$f(x,y)=\int\left(\frac{y^2e^x}{2}+2ye^{2x}\right)dx=\frac{y^2e^x}{2}+ye^{2x}+g(y)$$
y utilizando la segunda igualdad
$$e^xy+e^{2x}=ye^x+e^{2x}+g'(y),$$

de donde $g'(y) = 0$ y por tanto $g(y)$ es constante y la función $f(x,y) = \dfrac{y^2e^x}{2} + ye^{2x}$ nos proporciona la solución general de la ecuación

$$\frac{y^2e^x}{2} + ye^{2x} = k.$$

Resolver:

$$\begin{cases} x^2y'' + 2xy' + y = x, \\ y(1) = y'(1) = 0. \end{cases}$$

Solución. Resolvemos en primer lugar la ecuación que es de Cauchy–Euler y que por el cambio de variable $x = e^t$ se convierte en una ecuación lineal con coeficientes constantes. Si denotamos la derivada respecto de t por $\dot{y}$, se tiene que

$$y' = \dot{y}\,\frac{dt}{dx} = \dot{y}\,\frac{1}{x} = \dot{y}\,e^{-t},$$

y

$$y'' = \frac{d}{dt}(\dot{y}\,e^{-t})\frac{dt}{dx} = \ddot{y}\,e^{-2t} - \dot{y}\,e^{-2t},$$

por lo que el problema queda de la forma

$$\begin{cases} \ddot{y} + \dot{y} + y = e^t, \\ y(0) = \dot{y}(0) = 0. \end{cases}$$

Resolvemos primero la ecuación homogénea

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = 0$$

resolviendo la ecuación algebraica

$$t^2 + t + 1 = 0$$

que nos da

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

por lo que la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h(t) = c_1e^{-t/2}\cos\left(t\sqrt{3}/2\right) + c_2e^{-t/2}\sin\left(t\sqrt{3}/2\right).$$

Proponemos una solución particular de la forma $y_p(t) = Ae^t$ y dado que $\dot{y}(t) = \ddot{y}(t) = Ae^t$, sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$3Ae^t = e^t,$$

por lo que igualando coeficientes $3A = 1$, es decir, $A = 1/3$ y la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y(t) = c_1e^{-t/2}\cos\left(t\sqrt{3}/2\right) + c_2e^{-t/2}\sin\left(t\sqrt{3}/2\right) + \frac{1}{3}e^x.$$

Finalmente calculamos c_1 y c_2. Para ello derivamos

$$\dot{y}\ (t) = \left(-\frac{c_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2\right) e^{-t/2} \cos\left(t\sqrt{3}/2\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c_1 - \frac{c_2}{2}\right) e^{-t/2} \sin\left(t\sqrt{3}/2\right) + \frac{1}{3}e^x$$

y sustituimos

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 = c_1 + \frac{1}{3}, \\ \dot{y}\ (0) &= 0 = -\frac{c_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 + \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

de donde $c_1 = -1/3$ y $c_2 = -\sqrt{3}/9$ y así

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^{-t/2} \cos\left(t\sqrt{3}/2\right) - \frac{\sqrt{3}}{9}e^{-t/2} \sin\left(t\sqrt{3}/2\right) + \frac{1}{3}e^x.$$

Deshaciendo el cambio obtenemos la solución del problema (notar que $e^{-\log x/2} = 1/\sqrt{x}$)

$$y(x) = -\frac{1}{3\sqrt{x}} \cos(\sqrt{3}/2 \log x) - \frac{\sqrt{3}}{9\sqrt{x}} \sin(\sqrt{3}/2 \log x).$$

Resolver:

$$x^2y' + xy + \sqrt{y} = 0.$$

Solución. Se trata de una ecuación de Bernoulli que se pasa a lineal con el cambio de variable dependiente $z = y^{1/2}$. Entonces

$$z' = \frac{1}{2}y^{-1/2}y' = \frac{1}{2}y^{-1/2}(-y/x - y^{1/2}/x^2) = -\frac{z}{2x} - \frac{1}{2x^2}.$$

Resolvemos la ecuación homogénea $z' = -z/2x$ haciendo

$$\int \frac{z'(x)}{z(x)}dx = -\int \frac{1}{2x}dx$$

que nos da

$$\log z(x) = -\frac{1}{2}\log(2x) + c$$

o equivalentemente

$$z(x) = k\frac{1}{\sqrt{2x}}.$$

Calculamos ahora la solución de la ecuación no homogénea calculando

$$z(x) = k(x)\frac{1}{\sqrt{2x}},$$

$$z'(x) = k'(x)\frac{1}{\sqrt{2x}} - k(x)\frac{1}{2(2x)^{3/2}},$$

y sustituyendo

$$k'(x)\frac{1}{\sqrt{2x}} - k(x)\frac{1}{(2x)^{3/2}} = -k(x)\frac{1}{(2x)^{3/2}} - \frac{1}{2x^2},$$

por lo que

$$k(x) = -\int \frac{1}{\sqrt{2}}x^{-3/2}dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} + c,$$

y así

$$z(x) = \frac{1}{x} + c\frac{1}{\sqrt{2x}},$$

y deshaciendo el cambio tenemos la solución de la ecuación

$$y(x) = \left(\frac{1}{x} + c\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^2.$$

Resolver:

$$\begin{cases} x' = x + e^t \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = 3x + 2y + z. \end{cases}$$

Solución. Démonos cuenta de que la incógnita x puede calcularse directamente de la primera ecuación. Resolvemos primero $x' = x$, que nos da la solución $x_h(t) = c_1 e^t$. Como solución particular de la ecuación no homogénea proponemos $x_p(t) = Ate^t$, de donde $x_p'(t) = A(1+t)e^t$ y sustituyendo en la ecuación tenemos que

$$A(1+t)e^t = Ate^t + e^t,$$

de donde $Ae^t = e^t$ e igualando coeficientes $A = 1$. Así

$$x(t) = c_1 e^t + te^t = (c_1 + t)e^t.$$

Calculamos ahora las dos restantes incógnitas. Resolvemos en primer lugar el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para ello calculamos el polinomio característico y lo igualamos a cero

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & -2 \\ 2 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 2t + 5 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = 1 \pm 2i.$$

A continuación calculamos a_1 y a_2,

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{a_1}{t-1-2i} + \frac{a_2}{t-1+2i} = \frac{(a_1+a_2)t - a_1(1-2i) - a_2(1+2i)}{p(t)}$$

e igualando coeficientes obtenemos el sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ a_1(1-2i) + a_2(1+2i) = -1, \end{cases}$$

de donde $a_1 = -a_2$ y así $4ia_1 = 1$, por lo que $a_1 = 1/4i$ y $a_2 = -1/4i$. Por otro lado

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t-1-2i} = t-1+2i, \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{t-1+2i} = t-1-2i. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^{t(1+2i)}a_1(\mathbf{A}) \cdot q_1(\mathbf{A}) + e^{t(1-2i)}a_2(\mathbf{A}) \cdot q_2(\mathbf{A}) \\ &= e^t \left(\frac{e^{i2t}}{4i}(\mathbf{A} - (1-2i)\mathbf{I}_2) - \frac{e^{-i2t}}{4i}(\mathbf{A} - (1+2i)\mathbf{I}_2) \right) \\ &= e^t \left(\frac{e^{i2t}}{4i} \begin{pmatrix} 2i & -2 \\ 2 & 2i \end{pmatrix} - \frac{e^{-i2t}}{4i} \begin{pmatrix} -2i & -2 \\ 2 & -2i \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{e^t}{4i} \begin{pmatrix} 2i(e^{i2t} + e^{-i2t}) & -2(e^{i2t} - e^{-i2t}) \\ 2(e^{i2t} - e^{-i2t}) & 2i(e^{i2t} + e^{-i2t}) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) \\ \sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo que la solución del problema homogéneo es

$$\begin{pmatrix} y_h(t) \\ z_h(t) \end{pmatrix} = e^{t\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) \\ \sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, como soluciones particulares del problema no homogéneo se proponen $y_p(t) = (At+B)e^t$ y $z_p(t) = (Ct+D)e^t$ cuyas derivadas son $y_p'(t) = (At+A+B)e^t$ y $z_p(t) = (Ct+C+D)e^t$ y sustituyendo en el sistema no homogéneo tenemos

$$\begin{cases} (At+A+B)e^t = (At+B)e^t - 2(Ct+D)e^t + 2(c_1+t)e^t, \\ (Ct+C+D)e^t = 2(At+B)e^t + (Ct+D)e^t + 3(c_1+t)e^t, \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} te^t 2C + e^t(A+2D) = 2c_1e^t + te^t, \\ -te^t 2A + e^t(C-2B) = 3c_1e^t + te^t, \end{cases}$$

e igualando coeficientes construímos el sistema

$$\begin{cases} 2C = 1, \\ A + 2D = 2c_1, \\ -2A = 1, \\ C - 2B = 3c_1, \end{cases}$$

que fácilmente se resuelve y nos aporta las soluciones $A = -1/2$, $B = -3c_1/2 + 1/4$, $C = 1/2$ y $D = c_1 + 1/4$, con lo que la solución de sistema completo es

$$\begin{cases} x(t) = (c_1 + t)e^t, \\ y(t) = \left(-\frac{3}{2}c_1 + c_2\cos(2t) - c_3\sin(2t) - \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right)e^t, \\ z(t) = \left(c_1 + c_2\sin(2t) + c_3\cos(2t) + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right)e^t. \end{cases}$$

Construir una ecuación diferencial lineal homogénea de orden dos y con coeficientes constantes que tenga por solución $y(x) = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$, donde c_1 y c_2 son constantes positivas. Determinar además el único problema de condiciones iniciales con $x = 0$ formado por la ecuación encontrada anteriormente que tiene por solución única $y(x) = xe^{3x}$.

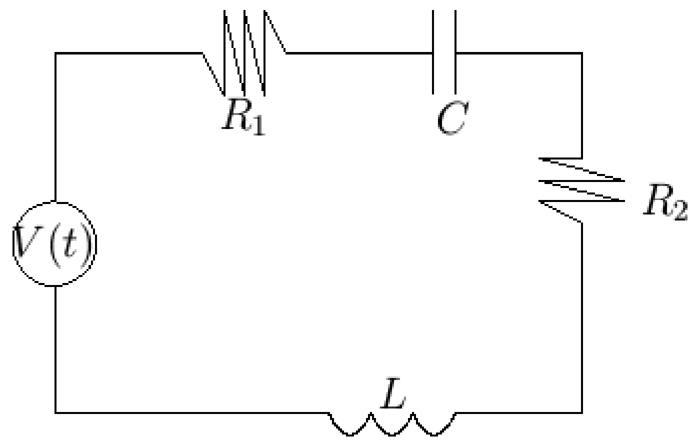
Solución. Dado que las soluciones linealmente independientes son $y_1(x) = e^{3x}$ e $y_2(x) = xe^{3x}$, se tiene que $x = 3$ es la única solución de la ecuación algebraica característica que ha de ser por tanto $(x-3)^2 = 0$ o equivalentemente $x^2 - 6x + 9 = 0$, por lo que la ecuación es

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

Por otra parte, si calculamos $y(0) = 0$ y dado que $y'(x) = (1 + 3x)e^{3x}$, tenemos $y'(0) = 1$. Por lo tanto el problema de condiciones iniciales es

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 0, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Dado el siguiente circuito



calcular la intensidad de corriente $i(t)$ para los valores $R_1 = R_2 = 2\Omega$, $C = 1F$, $L = 1H$, $V(t) = \sin t\ V$, suponiendo que inicialmente el circuito estaba descargado ($i(0) = i'(0) = 0$).

Solución. Como sabemos, el voltaje generado se consume en cada uno de los elementos del circuito, esto es

$$V(t) = V_L + V_{R_1} + V_{R_2} + V_C,$$

y desarrollando
$$V(t) = Li'(t) + R_1 i(t) + R_2 i(t) + q(t)/C,$$
donde $q(t)$ es la carga. Derivamos y teniendo en cuenta que $q'(t) = i(t)$, obtenemos

$$V'(t) = Li''(t) + R_1 i'(t) + R_2 i'(t) + i(t)/C,$$

y sustituyendo los datos tenemos el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} i'' + 4i' + i = \cos t, \\ i(0) = i'(0) = 0. \end{cases}$$

Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea

$$i'' + 4i' + i = 0$$

mediante la resolución de la ecuación característica

$$t^2 + 4t + 1 = 0$$

que nos da las soluciones
$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$$
por lo que la solución de la ecuación homogénea es

$$i_h(t) = c_1 e^{-t(2-\sqrt{3})} + c_2 e^{-t(2+\sqrt{3})}.$$

Proponemos como solución particular $i_p(t) = A\cos t + B\sin t$, que tiene por derivadas

$$\begin{aligned} i_p'(t) &= -A\sin t + B\cos t, \\ i_p''(t) &= -A\cos t - B\sin t, \end{aligned}$$

de manera que sustituyendo en la ecuación no homogénea tenemos

$$4B\cos t - 4A\sin t = \cos t,$$

de manera que igualando coeficientes obtenemos $4B = 1$ y $4A = 0$, de donde $A = 0$ y $B = 1/4$. Así la solución general de la ecuación es

$$i(t) = c_1 e^{-t(2-\sqrt{3})} + c_2 e^{-t(2+\sqrt{3})} + \frac{1}{4}\sin t.$$

Finalmente, derivamos

$$i'(t) = -c_1(2-\sqrt{3})e^{-t(2-\sqrt{3})} - c_2(2+\sqrt{3})e^{-t(2+\sqrt{3})} + \frac{1}{4}\cos t$$

y sustituyendo las condiciones iniciales tenemos

$$\begin{aligned} i(0) &= 0 = c_1 + c_2, \\ i'(0) &= 0 = -c_1(2-\sqrt{3}) - c_2(2+\sqrt{3}) + \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

de donde $c_1 = -c_2$ y por tanto $c_1 = -\sqrt{3}/24$ y así la única solución del problema de condiciones iniciales es

$$i(t) = -\frac{\sqrt{3}}{24}e^{-t(2-\sqrt{3})} + \frac{\sqrt{3}}{24}e^{-t(2+\sqrt{3})} + \frac{1}{4}\sin t.$$

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto y sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Consideremos el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

donde $(x_0, y_0) \in A$. Construir la ecuación integral asociada a dicho problema de condiciones iniciales y demostrar que toda solución continua de la ecuación integral es solución de (1.2).

Solución. Integrando en la ecuación diferencial tenemos

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} y'(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt,$$

de donde

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{1.3}$$

Entonces, si $y(x)$ es una solución continua de la ecuación integral, se verifica que $f(t, y(t))$ es una función continua, por lo que por el teorema fundamental del cálculo integral la función

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

es derivable y su derivada es

$$F'(x) = f(x, y(x)).$$

Derivando implícitamente (1.3) tenemos que

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

por lo que $y(x)$ es solución de la ecuación diferencial.

La población de medusas del Mar Menor varía de manera proporcional a la cantidad de medusas que hay en ese momento. Si inicialmente la población de medusas era de 100000 individuos y al cabo de 2 años dicha población se triplicó, calcular la población al cabo de 10 años. Calcular la población de medusas para cada instante de tiempo t y calcula su límite cuando $t \to +\infty$. En virtud del resultado obtenido ¿te parece acertado el modelo? ¿Qué pegas le encuentras?

Solución. Sea $y(t)$ la cantidad de medusas en el instante t, donde el tiempo se mide en años. Entonces dicha población sigue la ecuación diferencial

$$y'(t) = ky(t), \ k \in \mathbb{R}.$$

La solución de dicha ecuación se calcula a partir de

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = k,$$

de donde

$$\log y(t) = kt + c_1,$$

o equivalentemente

$$y(t) = ce^{kt},\ c = e^{c_1}.$$

Usando que $y(0) = 100000$, tenemos que

$$100000 = c.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que $y(2) = 300000$ obtenemos

$$300000 = 100000e^{2k},$$

de donde

$$k = \frac{1}{2}\log 3.$$

Así

$$x(10) = 100000e^{5\log 3} = 2430000 \text{ medusas}.$$

Por otra parte

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} 100000e^{\frac{t}{2}\log 3} = \infty,$$

lo que hace indicar que el modelo no es bueno a largo plazo dada la imposibilidad de que la población de medusas crezca indefinidamente. Notemos que este modelo no tiene en cuenta hechos relevantes para el crecimiento de una población como son las restricciones físicas y alimenticias, la existencia de predadores, etcétera.

Definir solución estable, asintóticamente estable y función de Lyapunov.

Solución. Teoría.

Capítulo 2

27–6–2000

Enunciado

1. Responder razonadamente a las siguientes cuestiones:

   (a) Hallar la familia de trayectorias ortogonales a la familia uniparamétrica de circunferencias: $x^2 + (y-c)^2 = c^2$**. (4 puntos)**

   (b) Probar, utilizando el teorema de existencia y unicidad de Picard–Lindelof, que el problema de condiciones iniciales

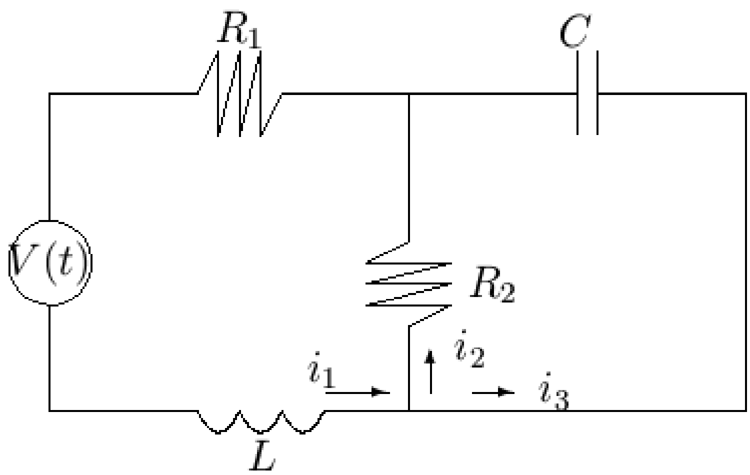
   $$\begin{cases} y'(t) = ty \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   tiene solución única sobre cualquier intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ conteniendo a 0. Hallar las tres primeras iteradas de Picard (aquellas asociadas al problema integral asociado)**. (3 puntos**)

   (c) Resolver la ecuación diferencial: $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin x$ **(3 puntos).**

2. Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones:

   (a) Dado el siguiente circuito



   calcular la intensidad de corriente $i_i(t)$, $i = 1,2,3$, en cada rama del circuito para los valores $R_1 = R_2 = 1\Omega$, $C = 1F$, $L = 1H$, $V(t) = \sin t\ V$, suponiendo que inicialmente el circuito estaba descargado en todas sus lineas ($i_i(0) = 0$ para $i = 1, 2, 3$). **(6 puntos)**.

(b) Comprobar que el cambio de variable función $y(t) = e^{\int_1^t z(s)ds}$ transforma la ecuación diferencial

$$a_0(t)y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = 0$$

en una ecuación de Riccati. Utilícese el resultado para integrar el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} z' = \frac{-4}{t^2} + \frac{4}{t}z - z^2 \ (t > 0), \\ z(1) = 0, \end{cases} \qquad (\textbf{4 puntos}).$$

Examen resuelto

Hallar la familia de trayectorias ortogonales a la familia uniparamétrica de circunferencias: $x^2 + (y - c)^2 = c^2$.

Solución. Derivamos implícitamente la ecuación algebraica que define a la familia de curvas obteniendo

$$x + (y - c)y' = 0.$$

La familia ortonormal ha de cumplir que

$$x + \frac{y - c}{y'} = 0,$$

de donde

$$c = y + xy'.$$

Sustituyendo en la ecuación algebraica original tenemos

$$x^2 + (xy')^2 = y^2 + (xy')^2 + 2xyy'$$

o equivalentemente

$$x^2 - y^2 - 2xyy' = 0.$$

Llamando $P(x, y) = x^2 - y^2$ y $Q(x, y) = -2xy$, tenemos que

$$-2y = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -2y,$$

por lo que la ecuación diferencial es exacta y entonces existe f tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= x^2 - y^2, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -2xy. \end{aligned}$$

Usando la primera ecuación obtenemos

$$f(x, y) = \int (x^2 - y^2)dx = \frac{x^3}{3} - xy^2 + g(y).$$

Derivando esta expresión y utilizando la segunda condición tenemos

$$-2xy = -2xy + g'(y),$$

de donde $g'(y) = 0$ y $g(y)$ es cosntante. Por tanto la función $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - xy^2$ define todas las soluciones de la ecuación de la forma

$$\frac{x^3}{3} - xy^2 = c.$$

Probar, utilizando el teorema de existencia y unicidad de Picard–Lindelof, que el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y'(t) = ty \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

tiene solución única sobre cualquier intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ conteniendo a 0. Hallar las tres primeras iteradas de Picard (aquellas asociadas al problema integral asociado).

Solución. La función que define la ecuación diferencial es $f(t, y) = ty$, que obviamente está definida y es de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto el problema de condiciones iniciales tendrá solución única. Por otro lado, el problema integral asociado es

$$y = 1 + \int_0^t xydx,$$

y tomando como primera aproximación la función $y_1(t) = 1$, tenemos que

$$y_2(t) = 1 + \int_0^t x1dx = 1 + \frac{t^2}{2},$$

e

$$y_3(t) = 1 + \int_0^t x(1 + x^2/2)dx = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8}.$$

Resolver la ecuación diferencial: $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin x$.

Solución. Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

a partir de su ecuación característica

$$x^2 - 4x + 4 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2,$$

de donde la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}.$$

Proponemos una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma $y_p(x) = Ae^{2x} \cos x + Be^{2x} \sin x$ y entonces

$$y_p'(x) = (2A + B)e^{2x} \cos x + (2B - A)e^{2x} \sin x,$$

$$y_p''(x) = (3A + 4B)e^{2x} \cos x + (3B - 4A)e^{2x} \sin x,$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea y simplificando tenemos

$$(4B - A)e^{2x} \cos x + (4A - B)e^{2x} \sin x = e^{2x} \sin x,$$

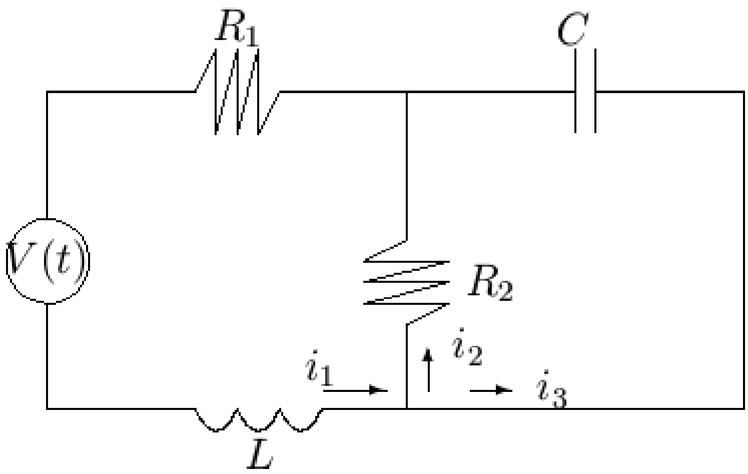
de donde igualando coeficientes obtenemos el sistema

$$\begin{cases} -A + 4B = 0, \\ 4A - B = 1, \end{cases}$$

y así $A = 4/15$, $B = 1/15$ y la solución general de la ecuación es

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{4}{15} e^{2x} \cos x + \frac{1}{15} e^{2x} \sin x.$$

Dado el siguiente circuito



calcular la intensidad de corriente $i_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, en cada rama del circuito para los valores $R_1 = R_2 = 1\Omega$, $C = 1F$, $L = 1H$, $V(t) = \sin t \ V$, suponiendo que inicialmente el circuito estaba descargado en todas sus lineas ($i_i(0) = 0$ para $i = 1, 2, 3$).

Solución. Por la leyes de Kirchoff, en cada nudo $i_1 = i_2 + i_3$. Por otra parte, si suponemos que en cada subcircuito la corriente lo recorre en sentido contrario a las agujas del reloj y teniendo en cuenta que el potencial generado se consume en todos los elementos del circuito obtenemos

$$V(t) = V_{R_1} + V_{R_2} + V_L$$

para el subcircuito de la izquierda y

$$0 = V_C - V_{R_2}$$

para el de la derecha. Sustituyendo los potenciales tenemos

$$\begin{cases} V(t) = R_1 i_1 + R_2 i_2 + L i_1', \\ 0 = q_3/C - R_2 i_2, \end{cases}$$

donde q_3 es la carga correspondiente a la intensidad i_3. Derivando la segunda ecuación teniendo en cuenta que $q_3' = i_3$ y sustituyendo los valores numéricos tenemos

$$\begin{cases} \sin t = i_1 + i_2 + i_1', \\ 0 = i_3 - i_2', \end{cases}$$

y teniendo en cuenta que $i_3 = i_1 - i_2$ obtenemos el problema

$$\begin{cases} i_1' = -i_1 - i_2 + \sin t, \\ i_2' = i_1 - i_2, \\ i_1(0) = i_2(0) = 0. \end{cases}$$

Resolvemos primero el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix},$$

siendo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico lo igualamos a cero

$$p(t) = \begin{vmatrix} -1-t & -1 \\ 1 & -1-t \end{vmatrix} = t^2 + 2t + 2 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i.$$

Calculamos a_1 y a_2 haciendo

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{a_1}{t+1-i} + \frac{a_2}{t+1+i} = \frac{(a_1+a_2)t + a_1(1+i) + a_2(1-i)}{p(t)}$$

e igulando coeficientes obtenemos el sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ a_1(1+i) + a_2(1-i) = 1, \end{cases}$$

y resolviendo el sistema $a_1 = 1/2i$ y $a_2 = -1/2i$. Por otra parte

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t+1-i} = t+1+i, \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{t+1+i} = t+1-i, \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^{-t(1-i)} a_1(\mathbf{A}) \cdot q_1(\mathbf{A}) + e^{-t(1+i)} a_2(\mathbf{A}) \cdot q_2(\mathbf{A}) \\ &= e^{-t} \left(\frac{e^{it}}{2i} (\mathbf{A} + (1+i)\mathbf{I}_2) - \frac{e^{-it}}{2i} (\mathbf{A} + (1-i)\mathbf{I}_2) \right) \\ &= e^{-t} \left(\frac{e^{it}}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} - \frac{e^{-it}}{2i} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \right) = \\ &= \frac{e^{-t}}{2i} \begin{pmatrix} i(e^{it}+e^{-it}) & -(e^{it}-e^{-it}) \\ (e^{it}-e^{-it}) & i(e^{it}+e^{-it}) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como soluciones particulares proponemos $i_{1,p}(t) = A\cos t + B\sin t$ e $i_{2,p}(t) = C\cos t + D\sin t$ y derivando y sustituyendo en el sistema no homogéneo obtenemos

$$\begin{cases} -A\sin t + B\cos t = -(A+C)\cos t - (B+D-1)\sin t, \\ -C\sin t + D\cos t = (A-C)\cos t + (B-D)\sin t, \end{cases}$$

e igualando coeficientes y haciendo algunas simplificaciones obtenemos el sistema

$$\begin{cases} -A+B+D=1, \\ A+B+C=0, \\ B+C-D=0, \\ -A+C+D=0, \end{cases}$$

que resolvemos

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2+F_1 \\ F_4-F_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow_{F_2\times F_4} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{F_3+F_2 \\ F_4+2F_2}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow_{F_4-\frac{3}{2}F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 & 1/2 \end{array}\right),$$

que nos da el sistema

$$\begin{cases} -A+B+D=1, \\ -B+C=-1, \\ 2C-D=-1, \\ \frac{5}{2}D=\frac{1}{2}, \end{cases}$$

y así $D = 1/5$, $C = -2/5$, $B = 3/5$ y $A = -1/5$ y la solución del sistema no homogéneo es

$$\begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix} = e^{t\mathbf{A}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{5}\cos t + \frac{3}{5}\sin t \\ -\frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t \end{pmatrix}$$

y utilizando las condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix},$$

de donde $c_1 = -1/5$, $c_2 = -2/5$ y la solución del circuito es (recordar que $i_3 = i_1 - i_2$)

$$\begin{cases} i_1(t) = \left(-\frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t\right)e^{-t} - \frac{1}{5}\cos t + \frac{3}{5}\sin t, \\ i_2(t) = \left(-\frac{2}{5}\cos t - \frac{1}{5}\sin t\right)e^{-t} - \frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t, \\ i_3(t) = \left(\frac{1}{5}\cos t + \frac{3}{5}\sin t\right)e^{-t} + \frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t. \end{cases}$$

Comprobar que el cambio de variable función $y(t) = e^{\int_1^t z(s)ds}$ transforma la ecuación diferencial

$$a_0(t)y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = 0$$

en una ecuación de Riccati. Utilícese el resultado para integrar el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} z' = \frac{-4}{t^2} + \frac{4}{t}z - z^2 \ (t > 0), \\ z(1) = 0. \end{cases}$$

Solución. Derivamos $y(t)$ dos veces

$$\begin{aligned} y'(t) &= e^{\int_1^t z(s)ds} z(t), \\ y''(t) &= e^{\int_1^t z(s)ds} z(t)^2 + e^{\int_1^t z(s)ds} z'(t), \end{aligned}$$

y sustituimos en la ecuación lineal

$$a_0(t)\left(e^{\int_1^t z(s)ds} z(t)^2 + e^{\int_1^t z(s)ds} z'(t)\right) + a_1(t) e^{\int_1^t z(s)ds} z(t) + a_2(t) e^{\int_1^t z(s)ds} = 0,$$

o equivalentemente

$$e^{\int_1^t z(s)ds}\left(a_0(t)(z(t)^2 + z'(t)) + a_1(t)z(t) + a_2(t)\right) = 0,$$

y dado que $e^{\int_1^t z(s)ds} \neq 0$, tenemos que

$$a_0(t)(z(t)^2 + z'(t)) + a_1(t)z(t) + a_2(t) = 0,$$

que es la ecuación de Riccati

$$a_0(t)z'(t) + a_1(t)z(t) + a_0(t)z(t)^2 = -a_2(t).$$

Si ahora reescribimos el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} t^2 z' - 4tz + t^2 z^2 = -4 \ (t > 0), \\ z(1) = 0, \end{cases}$$

tenemos que $a_0(t) = t^2$, $a_1(t) = -4t$ y $a_2(t) = 4$, por lo que puede escribirse como

$$\begin{cases} t^2 y'' - 4ty' + 4y = 0, \\ y(1) = 1, \ y'(1) = 0. \end{cases}$$

Esta ecuación lineal es de Cauchy–Euler y con el cambio $t = e^x$ se transforma en una ecuación lineal de coeficientes constantes. Para ello, si denotamos la derivada respecto de x por $\dot{y}$, se tiene que

$$y' = \dot{y}\,\frac{dx}{dt} = \dot{y}\,\frac{1}{t} = \dot{y}\,e^{-x},$$

y

$$y'' = \frac{d}{dx}(\dot{y}\,e^{-x})\frac{dx}{dt} = \ddot{y}\,e^{-2x} - \dot{y}\,e^{-2x},$$

por lo que el problema queda de la forma

$$\begin{cases} \ddot{y} - 5\dot{y} + 4y = 0, \\ y(0) = 1, \ \dot{y}(0) = 0. \end{cases}$$

La ecuación la resolvemos a partir de su ecuación característica

$$x^2 - 5x + 4 = 0,$$

que nos da

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2},$$

por lo que las raíces son 1 y 4 por lo que

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{4x}.$$

A partir de las condiciones iniciales, y derivando previamente $y'(x) = c_1 e^x + 4c_2 e^{4x}$, tenemos

$$\begin{cases} y(0) = 1 = c_1 + c_2, \\ \dot{y}\,(0) = 0 = c_1 + 4c_2, \end{cases}$$

de donde $c_1 = 4/3$ y $c_2 = -1/3$ y por tanto

$$y(x) = \frac{4}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{4x}$$

y deshaciendo los cambios

$$y(t) = \frac{4}{3}t - \frac{1}{3}t^4,$$

y finalmente

$$\frac{4}{3}t - \frac{1}{3}t^4 = e^{\int_1^t z(s)ds}.$$

Entonces

$$\log\left(\frac{4}{3}t - \frac{1}{3}t^4\right) = \int_1^t z(s)ds,$$

y derivando implícitamente

$$z(t) = \frac{\frac{4}{3} - \frac{4}{3}t^3}{\frac{4}{3}t - \frac{1}{3}t^4} = \frac{4 - 4t^3}{4t - t^4}.$$

Capítulo 3

4–9–2000

Enunciado

1. Decidir la validez o falsedad de las siguientes afirmaciones:

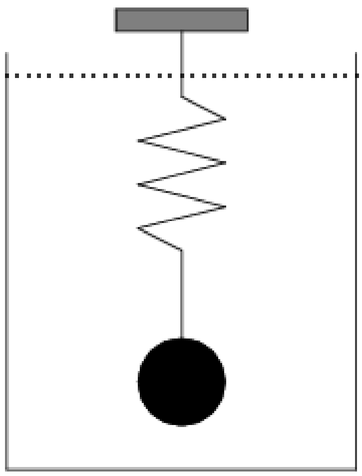
   (a) Un problema de condiciones iniciales de la forma

   $$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

   tiene solución única si y sólo si f es continua en un intervalo de la forma $[a, b)$ con $a \leq 0 < b$. **(2 puntos).**

   (b) Sea la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$ con a, b números reales. Calcular a y b para que $\cos x$ sea solución de dicha ecuación. Con los valores a y b previamente calculados, ¿puede ser $\sin x$ solución particular de $y'' + ay' + by = \sin x$? **(3 puntos).**

2. Un resorte elástico del cual cuelga una masa está metido en un recipiente que contiene un líquido viscoso, según muestra la figura:



Se desplaza la masa de la posición de equilibrio un metro y se suelta. Sabiendo que la masa del cuerpo es de un kilogramo, la constante del muelle es de 1 N/m y el líquido produce una resistencia al movimiento proporcional a la velocidad con constante de proporcionalidad $c = 1\ N \cdot m/s$, calcular la ecuación del movimiento y la velocidad al cabo de 10 segundos. A los diez segundos se vacia el recipiente y queda el muelle en movimiento. Calcular la velocidad del cuerpo a los 20 segundos **(5 puntos)**.

3. Resolver las siguientes ecuaciones:

   (a) $x^2 + 2xy + (yx + 2x^2)y' = 0$. **(2 puntos)**.

   (b) $\left\{ \begin{array}{l} y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + e^{2x}\cos x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{array} \right\}$ **(2 puntos)**.

   (c) $xy' + y = y^2 \log x$. **(2 puntos)**.

   (d) $\left\{ \begin{array}{l} x' = y + z \\ y' = x + z \\ z' = x + y \\ x(0) = y(0) = 0, z(0) = 1 \end{array} \right\}$ **(4 puntos)**.

Examen resuelto

Decidir la validez o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Un problema de condiciones iniciales de la forma

$$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

tiene solución única si y sólo si f es continua en un intervalo de la forma $[a, b)$ con $a \leq 0 < b$.

(b) Sea la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$ con a, b números reales. Calcular a y b para que $\cos x$ sea solución de dicha ecuación. Con los valores a y b previamente calculados, ¿puede ser $\sin x$ solución particular de $y'' + ay' + by = \sin x$?

Solución. (a) La afirmación es falsa. Basta considerar el problema

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{3}y^{2/3}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

siendo $f(y) = \frac{1}{3}y^{2/3}$ una función continua. Resolvemos la ecuación

$$3\int y(x)^{-2/3}y'(x)dx = \int dx,$$

y

$$y(x)^{1/3} = x + c,$$

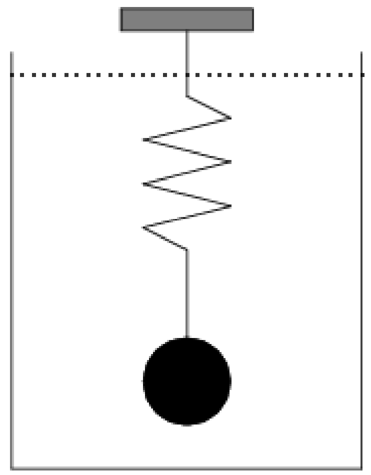
de donde

$$y(x) = (x + c)^3.$$

Teniendo en cuenta que $y(0) = 0 = c^3$, tenemos que $c = 0$ e $y(x) = x^3$ es solución del problema. Por otra parte, es fácil ver que $y(x) = 0$ también es solución, por lo que dicho problema no tiene solución única. (**Nota**: este ejercicio reproduce un ejemplo de la teoría).

(b) Para que $\cos x$ sea solución de la ecuación diferencial, su ecuación característica debe tener $\pm i$ como solución. Al ser la ecuación de orden dos, esta ecuación característica debe ser $x^2+1 = 0$, por lo que la ecuación diferencial debe ser $y'' + y = 0$. Al ser $\sin x$ también solución de la ecuación homogénea, no puede serlo de la ecuación no homogénea $y'' + y = \sin x$.

Un resorte elástico del cual cuelga una masa está metido en un recipiente que contiene un líquido viscoso, según muestra la figura:



Se desplaza la masa de la posición de equilibrio un metro y se suelta. Sabiendo que la masa del cuerpo es de un kilogramo, la constante del muelle es de 1 N/m y el líquido produce una resistencia al movimiento proporcional a la velocidad con constante de proporcionalidad $c = 1\ N \cdot m/s$, calcular la ecuación del movimiento y la velocidad al cabo de 10 segundos. A los diez segundos se vacia el recipiente y queda el muelle en movimiento. Calcular la velocidad del cuerpo a los 20 segundos.

Solución. Si denotamos por F_k la fuerza recuperadora del muelle y por F_r la fuerza de rozamiento, se tiene por la segunda ley de Newton que

$$mx'' = F_k - F_r = -kx - cx',$$

donde x es la posición, m la masa y k la constante de recuperadora del muelle. Sustituyendo los datos tenemos el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} x'' + x' + x = 0, \\ x(0) = -1, x'(0) = 0. \end{cases}$$

Resolvemos la ecuación por medio de la ecuación característica

$$t^2 + t + 1 = 0,$$

de donde

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

y así

$$x(t) = c_1 e^{-t/2} \cos(t\sqrt{3}/2) + c_2 e^{-t/2} \sin(t\sqrt{3}/2).$$

Derivamos $x(t)$,

$$x'(t) = \left(-\frac{c_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} c_2\right) e^{-t/2} \cos(t\sqrt{3}/2) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} c_1 - \frac{c_2}{2}\right) e^{-t/2} \sin(t\sqrt{3}/2),$$

y utilizando las condiciones iniciales tenemos

$$\begin{cases} x(0) = -1 = c_1, \\ x'(0) = 0 = -\frac{c_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} c_2, \end{cases}$$

de donde $c_1 = -1$, $c_2 = -\sqrt{3}/3$ y la solución es por tanto

$$x(t) = -e^{-t/2}\left(\cos(t\sqrt{3}/2) + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(t\sqrt{3}/2)\right).$$

Resolver

$$x^2 + 2xy + (yx + 2x^2)y' = 0.$$

Solución. Llamamos $P(x,y) = x^2 + 2xy$ y $Q(x,y) = yx + 2x^2$. Entonces

$$2x = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = y + 4x,$$

por lo que la ecuación no es exacta y hemos de buscar un factor integrante $\mu(x,y)$. Escribimos su ecuación

$$\mu(x,y)\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y)P(x,y) = \mu(x,y)\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y)Q(x,y),$$

o equivalentemente

$$2x\mu(x,y) + (x^2 + 2xy)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) = (y + 4x)\mu(x,y) + (yx + 2x^2)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y),$$

$$(x^2 + 2xy)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) - x(y + 2x)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y) = (y + 2x)\mu(x,y).$$

Si $\mu(x,y)$ sólo depende de x, esto es, es de la forma $\mu(x)$, simplificando tenemos la ecuación

$$-x\mu'(x) = \mu(x),$$

que resolvemos fácilmente

$$\int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}dx = -\int \frac{dx}{x},$$

y obtenemos la solución

$$\mu(x) = \frac{1}{x}.$$

Así, la ecuación

$$x + 2y + (y + 2x)y' = 0$$

es exacta y por tanto existe $f(x,y)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= x + 2y, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= y + 2x. \end{aligned}$$

Integrando en la primera condición tenemos que

$$f(x,y) = \int (x+2y)dx = \frac{x^2}{2} + 2xy + g(y),$$

y derivando respecto de y esta última expresión y utilizando la segunda condición tenemos que

$$y + 2x = 2x + g'(y),$$

por lo que

$$g(y) = \int ydy = \frac{y^2}{2},$$

y la función $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + 2xy + \dfrac{y^2}{2}$ define la solución general de la ecuación diferencial de la forma

$$\frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} = c.$$

Resolver

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' - 4y' + 4y = e^{2x} + e^{2x}\cos x, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{array} \right\}$$

Solución. Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea

$$y'' - 4y' + 4y = 0,$$

a partir de su ecuación característica

$$x^2 - 4x + 4 = 0,$$

que nos da las soluciones

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = 2,$$

por lo que la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}.$$

Proponemos como solución particular de la ecuación no homogénea

$$y_p(x) = Ax^2 e^{2x} + Be^{2x}\cos x + Ce^{2x}\sin x$$

cuyas derivadas son

$$y_p'(x) = (2Ax + 2Ax^2)e^{2x} + (2B + C)e^{2x}\cos x + (2C - B)e^{2x}\sin x,$$

$$y_p''(x) = (2A + 8Ax + 4Ax^2)e^{2x} + (3B + 4C)e^{2x}\cos x + (-4B + 3C)e^{2x}\sin x,$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea y simplificando tenemos

$$2Ae^{2x} - Be^{2x}\cos x - Ce^{2x}\sin x = e^{2x} + e^{2x}\cos x,$$

e igualando coeficientes

$$\begin{cases} 2A = 1, \\ -B = 1, \\ -C = 0, \end{cases}$$

de donde $A = 1/2$, $B = -1$ y $C = 0$ y la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - e^{2x} \cos x.$$

Utilizamos las condiciones iniciales para obtener c_1 y c_2. Para ello, en primer lugar derivamos la solución general

$$y'(x) = (2c_1 + c_2)e^{2x} + 2c_2 x e^{x} + x e^{2x} + x^2 e^{2x} - 2e^{2x} \cos x + e^{2x} \sin x,$$

y entonces

$$\begin{cases} y(0) = 0 = c_1 - 1, \\ y'(0) = 0 = 2c_1 + c_2 - 2, \end{cases}$$

de donde $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, y la solución del problema de condiciones iniciales es

$$y(x) = e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - e^{2x} \cos x.$$

Resolver

$$xy' + y = y^2 \log x.$$

Solución. Se trata de una ecuación de Bernoulli, que se transforma en lineal al aplicar el cambio de variable dependiente $z = 1/y$, de donde

$$z' = -\frac{y'}{y^2} = -\frac{1}{y^2}\left(-\frac{y}{x} + \frac{y^2 \log x}{x}\right)$$

y tenemos la ecuación lineal

$$z' = \frac{z}{x} - \frac{\log x}{x}.$$

Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea haciendo

$$\int \frac{z'(x)}{z(x)} dx = \int \frac{dx}{x},$$

de donde

$$\log z(x) = \log x + c$$

o

$$z(x) = kx, \ k = e^c.$$

Proponemos como solución de la ecuación no homogénea $z(x) = k(x)x$, y teniendo en cuenta que $z'(x) = k'(x)x + k(x)$ y sustituyendo en la ecuación no homogénea tenemos

$$k'(x)x + k(x) = k(x) - \frac{\log x}{x},$$

y así

$$k'(x) = \int -\frac{\log x}{x^2}dx = \left\{ \begin{array}{l|l} u = \log x & du = dx/x \\ dv = -dx/x^2 & v = 1/x \end{array} \right\} = \frac{\log x}{x} - \int \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x}(1 + \log x) + c.$$

Entonces

$$z(x) = 1 + \log x + cx.$$

Deshaciendo el cambio

$$y(x) = \frac{1}{1 + \log x + cx}.$$

Resolver

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = x + y, \\ x(0) = y(0) = 0, z(0) = 1. \end{array} \right\}$$

Solución. Escribimos el sistema de forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Igualando su polinomio característico a cero

$$p(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & -t \end{vmatrix} = -t^3 + 3t + 2 = 0,$$

resolvemos aplicando el método de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

y la ecuación

$$-t^2 + t + 2 = 0$$

nos da

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-1} = 1 \pm 3$$

por lo que las soluciones son -1, -2 y 4. Calculamos ahora

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{a_1}{t+1} + \frac{a_2}{t+2} + \frac{a_3}{t-4} = \frac{(a_1 + a_2 + a_3)t^2 + (-2a_1 - 3a_2 + 3a_3)t - 8a_1 - 4a_2 + 2a_3}{-p(t)}$$

de donde igualando coeficientes obtenemos

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ -2a_1 - 3a_2 + 3a_3 = 0, \\ 8a_1 + 4a_2 - 2a_3 = 1, \end{cases}$$

que resolvemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 3 & 0 \\ 8 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow_{\substack{F_2+2F_1 \\ F_3-8F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & -10 & 1 \end{array}\right) \rightarrow_{F_2-4F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -30 & 1 \end{array}\right)$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ -a_2 + 5a_3 = 0, \\ -30a_3 = 1, \end{cases}$$

de donde $a_3 = -1/30$, $a_2 = -1/6$ y $a_1 = 1/5$. Por otra parte

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t+1} = -t^2 + 2t + 8, \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{t+2} = -t^2 + 3t + 4, \\ q_3(t) &= \frac{p(t)}{t-4} = -t^2 - 3t - 2. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^{-t} a_1(\mathbf{A}) \cdot q_1(\mathbf{A}) + e^{-2t} a_2(\mathbf{A}) \cdot q_2(\mathbf{A}) + e^{4t} a_3(\mathbf{A}) \cdot q_3(\mathbf{A}) \\ &= \frac{e^{-t}}{5}(-\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + 8\mathbf{I}_3) + \frac{e^{-2t}}{6}(\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 4\mathbf{I}_3) + \frac{e^{4t}}{30}(\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_3) \\ &= \frac{e^{-t}}{5}\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} + \frac{e^{-2t}}{6}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} + \frac{e^{4t}}{30}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 36e^{-t} - 10e^{-2t} + 4e^{4t} & 6e^{-t} - 10e^{-2t} + 4e^{4t} & 6e^{-t} - 10e^{-2t} + 4e^{4t} \\ 6e^{-t} - 10e^{-2t} + 4e^{4t} & 36e^{-t} - 10e^{-2t} + 4e^{4t} & 6e^{-t} - 10e^{-2t} + 4e^{4t} \\ 6e^{-t} - 10e^{-2t} + 4e^{4t} & 6e^{-t} - 10e^{-2t} + 4e^{4t} & 36e^{-t} - 10e^{-2t} + 4e^{4t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 36e^{-t} - 10e^{-2t} + 4e^{4t} & 6e^{-t} - 10e^{-2t} + 4e^{4t} & 6e^{-t} - 10e^{-2t} + 4e^{4t} \\ 6e^{-t} - 10e^{-2t} + 4e^{4t} & 36e^{-t} - 10e^{-2t} + 4e^{4t} & 6e^{-t} - 10e^{-2t} + 4e^{4t} \\ 6e^{-t} - 10e^{-2t} + 4e^{4t} & 6e^{-t} - 10e^{-2t} + 4e^{4t} & 36e^{-t} - 10e^{-2t} + 4e^{4t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

A partir de las condiciones iniciales tenemos

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_3 \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

de donde $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ y entonces

$$x(t) = y(t) = z(t) = \frac{8}{5}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{2}{5}e^{4t}.$$

Capítulo 4

29–11–2000

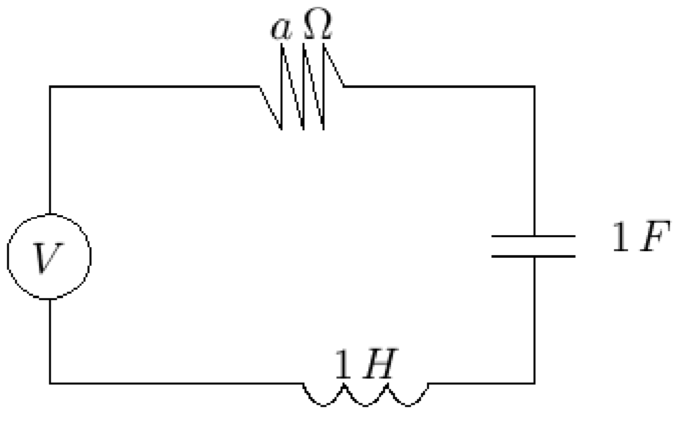
Enunciado

1. Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones:

   (a) La velocidad a la que se transmite un noticia en un grupo es directamente proporcional al número de individuos que aun no la conocen. Si inicialmente había 10 personas que sabían la noticia y a los 3 dias la conocían 100 personas, determinar cuanta gente lo sabrá al mes de producirse la noticia (tomar como población de España 40000000). (**4 puntos**)

   (b) Dada la ecuación lineal
   $$y'' + ay' + by = e^x,$$
   ¿qué condiciones deben satisfacer a y b para que $y(x) = e^x$ no sea una solución particular de la misma? (**2 puntos**)

   (c) Dado el circuito de la siguiente figura, se pide:

   donde $a \geq 0$. Si inicialmente estaba descargado, se pide determinar a para que
   $$\lim_{t\to\infty} i_h(t) = 0$$
   donde $i_h(t)$ es la intensidad del circuito en cuando $V = 0$. (**4 puntos**)

2. Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $3xy' - 2y = \dfrac{x^3}{y^2}$ **(2 puntos)**.

(b) $2xy^2 - 3y^3 + (7 - 3xy^2)y' = 0$ **(2 puntos)**.

(c) $y^{4)} + 2y^{3)} - y'' - 2y' = x + 1 - 2e^{3x} + 4e^{5x}$ **(2 puntos)**.

(d) $\left\{ \begin{array}{l} x' = x + e^t \\ y' = x + y + z \\ z' = x + y - z \\ x(0) = y(0) = 0, z(0) = 1 \end{array} \right\}$ **(4 puntos)**.

Examen resuelto

La velocidad a la que se transmite un noticia en un grupo es directamente proporcional al número de individuos que aun no la conocen. Si inicialmente había 10 personas que sabían la noticia y a los 3 dias la conocían 100 personas, determinar cuanta gente lo sabrá al mes de producirse la noticia (tomar como población de España 40000000).

Solución. Sea $x(t)$ el número de personas que conocen la noticia en el instante de tiempo t, medido en dias. Entonces

$$x'(t) = k(40000000 - x(t)),$$

de donde

$$\int \frac{x'(t)}{40000000 - x(t)} dt = \int k dt,$$

y así

$$-\log(40000000 - x(t)) = kt + c_1,$$

o equivalentemente

$$x(t) = 40000000 - ce^{-kt}, \ c = e^{-c_1}.$$

Utilizando las condiciones iniciales tenemos que

$$x(0) = 10 = 40000000 - c,$$

y así $c = 39999990$ y de

$$x(3) = 100 = 40000000 - 39999990e^{-3k}$$

obtenemos

$$k = -\frac{1}{3} \log \frac{39999900}{39999990}.$$

Entonces

$$x(t) = 40000000 - 39999990e^{\frac{1}{3} \log \frac{39999900}{39999990} t},$$

y

$$x(30) = 40000000 - 39999990e^{10 \log \frac{39999900}{39999990}} = 909.991 \approx 910 \text{ personas}.$$

Dada la ecuación lineal

$$y'' + ay' + by = e^x,$$

¿qué condiciones deben satisfacer a y b para que $y(x) = e^x$ no sea una solución particular de la misma?

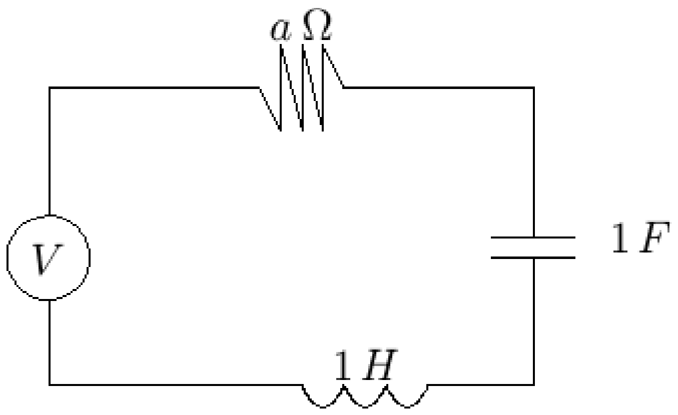
Solución. Para que e^x sea solución particular de la ecuación no homogénea debe cumplirse que

$$e^x + ae^x + be^x = (1 + a + b)e^x = e^x,$$

de donde igualando coeficientes $1 + a + b = 1$. Así, para que no sea solución debe verificarse que

$$a + b \neq 0.$$

Dado el circuito de la siguiente figura, se pide:



donde $a \geq 0$. Si inicialmente estaba descargado, se pide determinar a para que

$$\lim_{t\to\infty} i_h(t) = 0$$

donde $i_h(t)$ es la intensidad del circuito en cuando $V = 0$.

Solución. De la teoría de circuitos eléctricos se tiene que

$$V = V_L + V_R + V_C,$$

donde V_L, V_R y V_C son los potenciales consumidos en la bobina, resistencia y condensador, respectivamente. Si denotamos por q la carga se tiene que

$$V = Li' + Ri + q/C = i' + ai + q,$$

y teniendo en cuenta que $q' = i$, tenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} q' \\ i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ V \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz del sistema se calculan a partir de la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ -1 & -a-t \end{vmatrix} = t^2 + at + 1 = 0,$$

de donde

$$t = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

Distinguimos los siguientes casos:

- Si $0 < a < 2$, entonces $a^2 - 4 < 0$ y las raíces del polinomio característico son complejas conjugadas con parte real $-a/2 < 0$, por lo que el sistema es asintóticamente estable y $\lim_{t\to\infty} i_h(t) = 0$.
- Si $a = 2$, entonces $-a/2 < 0$ es la única solución y similarmente $\lim_{t\to\infty} i_h(t) = 0$.

- Si $a > 2$, se tiene que las dos raíces reales verifican que

$$\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} < 0$$

y dado que $a > \sqrt{a^2 - 4}$,

$$\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} < 0,$$

con lo que de nuevo $\lim_{t \to \infty} i_h(t) = 0$.

- Finalmente, si $a = 0$ las raíces del polinomio son $\pm 2i$, por lo que el sistema es estable pero no asintóticamente estable, por lo que no necesariamente $\lim_{t \to \infty} i_h(t) = 0$.

Resolver

$$3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}.$$

Solución. Se trata de una ecuación de Bernoulli, que con el cambio de variable dependiente $z = y^3$ se transforma en la ecuación lineal

$$z' = 3y^2 y' = 2\frac{y^3}{x} + \frac{x^3}{3} = 2\frac{z}{x} + \frac{x^3}{3}.$$

Resolvemos primero la ecuación homogénea

$$\int \frac{z'(x)}{z(x)} dx = \int \frac{2}{x} dx,$$

de donde

$$\log z(x) = 2 \log x + c,$$

o equivalentemente

$$z(x) = kx^2, \ k = e^c.$$

Proponemos como solución de la ecuación no homogénea la función $z(x) = k(x)x^2$, derivando

$$z'(x) = k'(x)x^2 + 2k(x)x$$

y sustitutendo

$$k'(x)x^2 + 2k(x)x = 2k(x)x + \frac{x^3}{3},$$

por lo que

$$k(x) = \int \frac{x}{3} dx = \frac{x^2}{6} + c,$$

y así

$$z(x) = cx^2 + \frac{x^4}{6}.$$

Deshaciendo el cambio

$$y(x) = \sqrt[3]{cx^2 + \frac{x^4}{6}}.$$

Resolver

$$2xy^2 - 3y^3 + (7 - 3xy^2)y' = 0.$$

Solución. Sean $P(x, y) = 2xy^2 - 3y^3$ y $Q(x, y) = 7 - 3xy^2$. Dado que

$$4xy - 9y^2 = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -3y^2,$$

la ecuación no es exacta y tenemos que buscar un factor integrante $\mu(x, y)$ a partir de la ecuación

$$\mu(x, y)\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial \mu}{\partial y}(x, y)P(x, y) = \mu(x, y)\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \mu}{\partial x}(x, y)Q(x, y),$$

o sea

$$(4xy - 9y^2)\mu(x, y) + (2xy^2 - 3y^3)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x, y) = -3y^2\mu(x, y) + (7 - 3xy^2)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x, y).$$

Simplificamos

$$2(2xy - 3y^2)\mu(x, y) = (7 - 3xy^2)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x, y) - y(2xy - 3y^2)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x, y),$$

y nos damos cuenta de que si $\mu(x, y)$ sólo depende de y, la ecuación se simplifica a

$$2\mu(y) = -y\mu'(y).$$

La resolvemos

$$\int \frac{\mu'(y)}{\mu(y)}dy = -\int \frac{2}{y}dy,$$

y

$$\log \mu(y) = -2 \log y,$$

de donde

$$\mu(y) = \frac{1}{y^2}.$$

Entonces la ecuación

$$2x - 3y + \left(\frac{7}{y^2} - 3x\right) y' = 0$$

es exacta y existe $f(x, y)$ de manera que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x - 3y, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{7}{y^2} - 3x. \end{aligned}$$

Utilizando la primera condición tenemos

$$f(x,y) = \int (2x - 3y)dx = x^2 - 3xy + g(y),$$

y derivando la última expresión y utilizando la segunda condición

$$-3x + g'(y) = \frac{7}{y^2} - 3x,$$

de donde

$$g(y) = \int \frac{7}{y^2}dy = -\frac{7}{y}$$

por lo que la función $f(x,y) = x^2 - 3xy - 7/y$ define las soluciones de la forma

$$x^2 - 3xy - \frac{7}{y} = c.$$

Resolver:

$$y^{4)} + 2y^{3)} - y'' - 2y' = x + 1 - 2e^{3x} + 4e^{5x}.$$

Solución. Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea

$$y^{4)} + 2y^{3)} - y'' - 2y' = 0$$

a partir de su ecuación característica

$$x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0,$$

que tiene a 0 por solución.Calculamos otra solución por el método de Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

y de $x^2 + 3x + 2 = 0$ obtenemos

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2},$$

por lo que las soluciones son 0, 1, -1 y -2, y así la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} + c_4 e^{-2x}.$$

Proponemos como solución particular

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + Ce^{3x} + De^{5x},$$

cuyas derivadas son

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 2Ax + B + 3Ce^{3x} + 5De^{5x}, \\ y_p''(x) &= 2A + 9Ce^{3x} + 25De^{5x}, \\ y_p^{3)}(x) &= 27Ce^{3x} + 125De^{5x}, \\ y_p^{4)}(x) &= 81Ce^{3x} + 625De^{5x}, \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecaución no homogénea y simplificando tenemos

$$120Ce^{3x} + 840De^{5x} - 4Ax - 2A - 2B = x + 1 - 2e^{3x} + 4e^{5x},$$

de donde igualando coeficientes obtenemos el sistema

$$\begin{cases} -4A = 1, \\ -2A - 2B = 1, \\ 120C = -2, \\ 840D = 4, \end{cases}$$

de donde $A = -1/4$, $B = -1/4$, $C = -1/60$ y $D = 1/210$, por lo que la solución de la ecuación es

$$y(x) = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} + c_4e^{-2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{60}e^{3x} + \frac{1}{210}e^{5x}.$$

Resolver

$$\left\{\begin{array}{l} x' = x + e^t, \\ y' = x + y + z, \\ z' = x + y - z, \\ x(0) = y(0) = 0, z(0) = 1. \end{array}\right\}$$

Solución. Empezamos por resolver la ecuación $x' = x + e^t$. La ecuación homogénea $x' = x$ tiene por solución $x_h(t) = c_1e^t$. Como solución particular de la ecuación no homogénea proponemos $x_p(t) = Axe^t$, cuya derivada es $x_p'(t) = (A + Ax)e^t$. Sustituyendo en la ecuación no homogénea y simplificando obtenemos $Ae^t = e^t$, por lo que $A = 1$ y la solución de la ecuación no homogénea es

$$x(t) = c_1e^t + te^t.$$

Teniendo en cuentas que $x(0) = 1 = c_1$, obtenemos que

$$x(t) = e^t + te^t.$$

Vamos a continuación a calcular las restantes incógnitas. Como siempre, empezamos por el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A partir de su ecuación característica

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -1-t \end{vmatrix} = t^2 - 2 = 0$$

vemos que sus raíces son $\pm\sqrt{2}$. Calculamos ahora a_1 y a_2 a partir de

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{a_1}{t-\sqrt{2}} + \frac{a_2}{t+\sqrt{2}} = \frac{(a_1+a_2)t + \sqrt{2}(a_1-a_2)}{p(t)}$$

e igualando coeficientes tenemos el sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ \sqrt{2}(a_1 - a_2) = 1, \end{cases}$$

de donde $a_1 = \sqrt{2}/4$ y $a_2 = -\sqrt{2}/4$. Por otra parte

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t-\sqrt{2}} = t + \sqrt{2}, \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{t+\sqrt{2}} = t - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^{t\sqrt{2}} a_1(\mathbf{A}) \cdot q_1(\mathbf{A}) + e^{-t\sqrt{2}} a_2(\mathbf{A}) \cdot q_2(\mathbf{A}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} e^{t\sqrt{2}} (\mathbf{A} + \sqrt{2}\mathbf{I}_2) - \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-t\sqrt{2}} (\mathbf{A} - \sqrt{2}\mathbf{I}_2) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} e^{t\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-t\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})e^{t\sqrt{2}} - (1-\sqrt{2})e^{-t\sqrt{2}} & e^{t\sqrt{2}} - e^{-t\sqrt{2}} \\ e^{t\sqrt{2}} - e^{-t\sqrt{2}} & (-1+\sqrt{2})e^{t\sqrt{2}} + (1+\sqrt{2})e^{-t\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y por tanto la solución del sistema homogéneo es

$$\begin{pmatrix} y_h(t) \\ z_h(t) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})e^{t\sqrt{2}} - (1-\sqrt{2})e^{-t\sqrt{2}} & e^{t\sqrt{2}} - e^{-t\sqrt{2}} \\ e^{t\sqrt{2}} - e^{-t\sqrt{2}} & (-1+\sqrt{2})e^{t\sqrt{2}} + (1+\sqrt{2})e^{-t\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Proponemos ahora como solución del sistema no homogéneo las soluciones particulares $y_p(t) = (At+B)e^t$ y $z_p(t) = (Ct+D)e^t$, cuyas derivadas son $y_p(t) = (At+A+B)e^t$ y $z_p(t) = (Ct+C+D)e^t$. Sustituyendo en el sistema y simplificando obtenemos

$$\begin{pmatrix} (At+A+B)e^t \\ (Ct+C+D)e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ((A+C)t+B+D)e^t + e^t + te^t \\ (A-C)t+B-D)e^t + e^t + te^t \end{pmatrix},$$

de donde obtenemos el sistema

$$\begin{cases} C = -1, \\ A - D = 1, \\ 2C - A = 1, \\ C + 2D - B = 1, \end{cases}$$

con lo que $C = -1$, $A = -3$, $D = -4$ y $B = -10$ y así la solución general de la ecuación no homogénea es

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{t\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(3t+10)e^t \\ -(t+4)e^t \end{pmatrix}.$$

Utilizando las condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2 \cdot \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \end{pmatrix},$$

obtenemos que $c_2 = 11$ y $c_3 = 5$ y por tanto la sollución del sistema será

$$\begin{cases} x(t) = (1+t)e^t, \\ y(t) = \frac{\sqrt{2}}{4}((16+11\sqrt{2})e^{t\sqrt{2}} - (16+11\sqrt{2})e^{-t\sqrt{2}}) - (3t+10)e^t, \\ z(t) = \frac{\sqrt{2}}{4}((6+5\sqrt{2})e^{t\sqrt{2}} - (6-5\sqrt{2})e^{-t\sqrt{2}}) - (t+4)e^t. \end{cases}$$

Capítulo 5

5–2–2001

Enunciado

1. **(2.5 puntos)** Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $\mathbf{f}(x, y, z) = (z, x + y, -z, y - x)$. Se pide:

   (a) Demostrar que $\mathbf{f}$ es lineal.

   (b) Hallar una base, dimensión y ecuaciones del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$.

   (c) Decir si $\mathbf{f}$ es epimorfismo o monomorfismo.

   (d) Dadas las bases
   $$\mathcal{B} = \{(1, 2, 0), (0, 0, 1), (0, 2, 0)\}$$
   y
   $$\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 0)\},$$
   hallar la matriz de $\mathbf{f}$ asociada a estas bases.

2. **(2.5 puntos)** Consideremos $\mathcal{W}$ el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores
   $$\{(1, 2, -1, 0), (1, 0, -2, 1), (0, 1, 1, 0)\}.$$
   Con el producto escalar usual, hallar una base ortonormal de $\mathcal{W}$ y de $\mathcal{W}^\perp$. Hallar la proyección ortogonal de $(1, 1, 1, 1)$ sobre $\mathcal{W}$.

3. **(2.5 puntos)** Dada la matriz
   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$
   se pide:

   (a) Hallar el polinomio característico de $\mathbf{A}$ y sus valores propios.

   (b) Calcular los subespacios propios de $\mathbf{A}$.

   (c) Determinar si $\mathbf{A}$ es o no diagonalizable. En caso afirmativo, obtener la forma diagonal $\mathbf{D}$, la matriz de paso $\mathbf{P}$ de forma que $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$ y calcular $\mathbf{A}^{100}$.

4. **(2.5 puntos)** Responder a las siguientes cuestiones:

(a) Dadas $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos matrices cuadradas del mismo orden, ¿se verifica siempre que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$?

(b) Dadas $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos matrices cuadradas del mismo orden, ¿se verifica siempre que $\mathrm{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$? (Se define la traza de una matriz cuadrada $\mathbf{M}$, $\mathrm{tr}(\mathbf{M})$, como la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz).

(c) Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada. ¿Es simétrica la matriz $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t$?

(d) Demostrar que la suma de dos subespacios propios asociados a valores propios distintos es directa.

(e) Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada de forma que $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}$. Decir cuáles pueden ser sus valores propios.

Examen resuelto

Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $\mathbf{f}(x,y,z) = (z, x+y, -z, y-x)$. Se pide:

(a) Demostrar que $\mathbf{f}$ es lineal.

(b) Hallar una base, dimensión y ecuaciones del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$.

(c) Decir si $\mathbf{f}$ es epimorfismo o monomorfismo.

(d) Dadas las bases
$$\mathcal{B} = \{(1,2,0),(0,0,1),(0,2,0)\}$$
y
$$\mathcal{B}' = \{(1,1,0,0),(1,0,0,0),(0,0,1,1),(0,0,1,0)\},$$
hallar la matriz de $\mathbf{f}$ asociada a estas bases.

Solución. (a) Sean $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in \mathbb{R}^3$ y $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Calculamos

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(\alpha(x_1,y_1,z_1)+\beta(x_2,y_2,z_2)) &= \mathbf{f}(\alpha x_1+\beta x_2, \alpha y_1+\beta y_2, \alpha z_1+\beta z_2)\\
&= (\alpha z_1+\beta z_2, \alpha x_1+\beta x_2+\alpha y_1+\beta y_2, -\alpha z_1-\beta z_2, \alpha y_1+\beta y_2-\alpha x_1-\beta x_2)\\
&= (\alpha z_1, \alpha x_1+\alpha y_1, -\alpha z_1, \alpha y_1-\alpha x_1)+(\beta z_2, \beta x_2+\beta y_2, -\beta z_2, \beta y_2-\beta x_2)\\
&= \alpha(z_1, x_1+y_1, -z_1, y_1-x_1)+\beta(z_2, x_2+y_2, -z_2, y_2-x_2)\\
&= \alpha\mathbf{f}(x_1,y_1,z_1)+\beta\mathbf{f}(x_2,y_2,z_2),
\end{aligned}$$

por lo que $\mathbf{f}$ es lineal.

(b) Sean $\mathcal{C}_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y $\mathcal{C}_4 = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, respectivamente. Entonces la matriz asociada de $\mathbf{f}$ es estas bases es

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}_4\mathcal{C}_3}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos en primer lugar el núcleo de $\mathbf{f}$ que vendrá dado por el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}.$$

Procedemos a resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to_{\substack{F_3+F_1\\ F_4+F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

por lo que el sistema puede escribirse como

$$\left\{\begin{array}{l} z=0, \\ x+y=0, \\ 2y=0, \end{array}\right.$$

cuya única solución es $x=y=z=0$, y por tanto $\operatorname{Ker}(\mathbf{f})=\{(0,0,0)\}$. Obviamente no existe ninguna base de $\operatorname{Ker}(\mathbf{f})$ y consecuentemente $\dim\operatorname{Ker}(\mathbf{f})=0$.

Calculemos ahora la imagen. Dado que un vector $(x,y,z,t)\in\operatorname{Im}\mathbf{f}$ si y sólo existe $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Resolvemos el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & -1 & z \\ -1 & 1 & 0 & t \end{array}\right)\to_{\substack{F_3+F_1\\F_4+F_2}}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & x+z \\ 0 & 2 & 0 & y+t \end{array}\right),$$

y vemos que para que la matriz ampliada del sistema tenga rango tres como la matriz del sistema debe verificarse que $x+z=0$, por lo que

$$\operatorname{Im}\mathbf{f}=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+z=0\}.$$

Por otra parte, las ecuaciones paramétricas de la imagen son

$$\left\{\begin{array}{l} x=-\lambda, \\ y=\mu, \\ z=\lambda, \\ t=\nu, \end{array}\right. \quad \lambda,\mu,\nu\in\mathbb{R},$$

por lo que

$$(x,y,z,t)=-\lambda(1,0,-1,0)+\mu(0,1,0,0)+\nu(0,0,0,1)$$

y entonces una base de la imagen es $\mathcal{B}_{\operatorname{Im}\mathbf{f}}=\{(1,0,-1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}$. Consecuentemente $\dim\operatorname{Im}\mathbf{f}=3$.

(c) Dado que $\operatorname{Ker}(\mathbf{f})=\{(0,0,0)\}$, se tiene que $\mathbf{f}$ es inyectiva y por tanto monomorfismo. No es sobreyectiva al no ser $\operatorname{Im}\mathbf{f}=\mathbb{R}^4$, y por tanto la aplicación lineal no es epimorfismo.

(d) La matriz pedida la obtenemos por la fórmula del cambio de bases

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\mathbf{f})=\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{C}_4}(\mathbf{i})\cdot\mathbf{M}_{\mathcal{C}_4\mathcal{C}_3}(\mathbf{f})\cdot\mathbf{M}_{\mathcal{C}_3\mathcal{B}}(\mathbf{i}),$$

donde

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}_3\mathcal{B}}(\mathbf{i})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y $\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{C}_4}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{C}_4\mathcal{B}'}(\mathbf{i})]^{-1}$ donde

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}_4\mathcal{B}'}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos la inversa

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{F_2-F_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow_{\substack{(-1)F_2 \\ F_3\times F_4}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow_{\substack{F_1-F_2 \\ F_4-F_3}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

por lo que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{C}_4}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Consideremos $\mathcal{W}$ el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores

$$\{(1,2,-1,0),(1,0,-2,1),(0,1,1,0)\}.$$

Con el producto escalar usual, hallar una base ortonormal de $\mathcal{W}$ y de $\mathcal{W}^{\perp}$. Hallar la proyección ortogonal de $(1,1,1,1)$ sobre $\mathcal{W}$.

Solución. En primer lugar vamos a encontrar una base de $\mathcal{W}$ calculando el rango de la matriz formada por los tres vectores generadores

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow_{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow_{F_2\times F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow_{F_3+2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que el rango de la matriz es tres y por tanto los tres vectores son linealmente independientes y constituyen una base de $\mathcal{W}$. Obtengamos una base ortogonal $\mathcal{O} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ donde

$$\mathbf{v}_1 = (1,2,-1,0),$$

$$\mathbf{v}_2 = (1,0,-2,1) - \frac{\langle (1,0,-2,1), \mathbf{v}_1\rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle}\mathbf{v}_1 = (1,0,-2,1) - \frac{1}{2}(1,2,-1,0) = (1/2,-1,-3/2,1),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 &= (0,1,1,0) - \frac{\langle (0,1,1,0), \mathbf{v}_1\rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle (0,1,1,0), \mathbf{v}_2\rangle}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2\rangle}\mathbf{v}_2 \\ &= (0,1,1,0) - \frac{1}{6}(1,2,-1,0) + \frac{5}{9}(1/2,-1,-3/2,1) = (1/9,1/9,1/3,5/9). \end{aligned}$$

Calculamos ahora una base ortonormal $\mathcal{N} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ donde

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{||\mathbf{v}_1||}\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{6}}{6}(1,2,-1,0) = (\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3, -\sqrt{6}/6, 0),$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{||\mathbf{v}_2||}\mathbf{v}_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}(1/2,-1,-3/2,1) = (\sqrt{2}/6, -\sqrt{2}/3, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/3),$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{||\mathbf{v}_3||}\mathbf{v}_3 = \frac{3}{2}(1/9,1/9,1/3,5/9) = (1/6,1/6,1/2,5/6).$$

Calculamos ahora $\mathcal{W}^\perp$. Para ello, démonos cuenta de que $(x,y,z,t) \in \mathcal{W}^\perp$ si y sólo si

$$\begin{aligned} \langle (x,y,z,t), (1,2,-1,0)\rangle &= 0 = x + 2y - z, \\ \langle (x,y,z,t), (1,0,-2,1)\rangle &= 0 = x - 2z + t, \\ \langle (x,y,z,t), (0,1,1,0)\rangle &= 0 = y + z, \end{aligned}$$

y resolviendo el sistema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to_{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to_{F_3 + \frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right),$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 0, \\ -2y - z + t = 0, \\ \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}t = 0, \end{array} \right.$$

de donde las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{W}^\perp$ son

$$\left\{ \begin{array}{r} x = -3\lambda, \\ y = \lambda, \\ z = -\lambda, \\ t = \lambda, \end{array} \right. \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

por lo que

$$(x,y,z,t) = \lambda(-3,1,-1,1), \ \lambda \in \mathbb{R},$$

y por tanto una base de $\mathcal{W}^\perp$ es $\{(-3,1,-1,1)\}$. Para conseguir una base ortonormal basta construir

$$\mathbf{u} = \frac{1}{||(-3,1,-1,1)||}(-3,1,-1,1) = \frac{\sqrt{3}}{6}(-3,1,-1,1) = (-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/6, -\sqrt{3}/6, \sqrt{3}/6),$$

y una base ortonormal de $\mathcal{W}^\perp$ es $\{(-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/6, -\sqrt{3}/6, \sqrt{3}/6)\}$.

Por último, la proyección ortogonal de $(1,1,1,1)$ sobre $\mathcal{W}$ es

$$\mathbf{p}(1,1,1,1) = \langle (1,1,1,1), \mathbf{v}_1\rangle \,\mathbf{v}_1 + \langle (1,1,1,1), \mathbf{v}_2\rangle \,\mathbf{v}_2 + \langle (1,1,1,1), \mathbf{v}_3\rangle \,\mathbf{v}_3 = \left(\frac{263}{162}, \frac{415}{81}, -\frac{7}{54}, -\frac{31}{81}\right).$$

Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

se pide:

(a) Hallar el polinomio característico de $\mathbf{A}$ y sus valores propios.

(b) Calcular los subespacios propios de $\mathbf{A}$.

(c) Determinar si $\mathbf{A}$ es o no diagonalizable. En caso afirmativo, obtener la forma diagonal $\mathbf{D}$, la matriz de paso $\mathbf{P}$ de forma que $\mathbf{A} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{P}^{-1}$ y calcular $\mathbf{A}^{100}$.

Solución. (a) El polinomio característico es

$$p(t) = |\mathbf{A} - t\mathbf{I}_2| = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ 2 & -t & 0 \\ 4 & 2 & -1-t \end{vmatrix} = (-1-t)(t^2-t-2) = -t^3+3t+2.$$

Sus raíces, es decir, los valores propios de $\mathbf{A}$ son -1 y

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2},$$

esto es, -1 y 2. Luego -1 es un valor propio doble (multiplicidad 2) y 2 es simple.

(b) Calculamos primero $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}+\mathbf{I}_3)$, que vendrá dado por el sistema

$$(\mathbf{A}+\mathbf{I}_3)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que queda reducido a

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A}+\mathbf{I}_3) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x+y=0\}.$$

Calculamos ahora $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-2\mathbf{I}_3)$, que viene dado por el sistema

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{I}_3)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que de nuevo fácilmente se ve que es

$$\operatorname{Ker}(\mathbf{A}+\mathbf{I}_3) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x+y=0,\ 4x+2y-3z=0\}.$$

(c) Calculamos una base de $\operatorname{Ker}(\mathbf{A}+\mathbf{I}_3)$ a partir de sus ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = \lambda, \\ y = -2\lambda, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\ z = \mu, \end{cases}$$

por lo que

$$(x,y,z) = \lambda(1,-2,0) + \mu(0,0,1),\ \lambda,\mu \in \mathbb{R},$$

y una base es $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker}(\mathbf{A}+\mathbf{I}_3)} = \{(1,-2,0),(0,0,1)\}$.

Procedemos del mismo modo con $\operatorname{Ker}(\mathbf{A}-2\mathbf{I}_3)$, cuyas ecuaciones paramétricas se obtienen al resolver el sistema dado por las ecuaciones que definen el subespacio

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow_{F_2+4F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

que queda en forma triangular

$$\begin{cases} -x+y=0, \\ 6y-z=0, \end{cases}$$

cuya solución serán las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = 6\lambda, \end{cases}$$

por lo que

$$(x,y,z) = \lambda(1,1,6),\ \lambda \in \mathbb{R},$$

y por tanto $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker}(\mathbf{A}-2\mathbf{I}_3)} = \{(1,1,6)\}$.

Dado que $\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{A}+\mathbf{I}_3) = 2$ y $\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{A}-2\mathbf{I}_3) = 1$, y ambas dimensiones coinciden con las multiplicidades de los valores propios, tenemos que la matriz $\mathbf{A}$ es diagonalizable. Además, la base $\mathcal{B} = \{(1,-2,0),(0,0,1),(1,1,6)\}$ es de vectores propios y

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{P}^{-1}$$

siendo

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

y calculando su inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2+2F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_2\times F_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\frac{1}{3}F_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{F_2-6F_3\\ F_1-F_3}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right)$$

por lo que

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{100} &= \mathbf{P}\cdot\mathbf{D}^{100}\cdot\mathbf{P}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{100} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -4 & -2 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+2^{101}}{3} & \frac{2^{100}-1}{3} & 0 \\ \frac{2^{101}-2}{3} & \frac{2^{100}+1}{3} & 0 \\ 2^{102}-4 & 2^{101}-2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

> Dadas $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos matrices cuadradas del mismo orden, ¿se verifica siempre que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$?

Solución. No, basta considerar

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y comprobar que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

> Dadas $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos matrices cuadradas del mismo orden, ¿se verifica siempre que $\mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})$? (Se define la traza de una matriz cuadrada $\mathbf{M}$, $\mathrm{tr}(\mathbf{M})$, como la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz).

Solución. Sean $\mathbf{A} = (a_{ij})$ y $\mathbf{B} = (b_{ij})$. Entonces

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)$$

y

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} \right),$$

por lo que

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} = \operatorname{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}).$$

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada. ¿Es simétrica la matriz $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t$?

Solución. Es simétrica dado que

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t)^t = (\mathbf{A}^t)^t \cdot \mathbf{A}^t = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t.$$

Demostrar que la suma de dos subespacios propios asociados a valores propios distintos es directa.

Solución. Sean λ, μ dos valores propios distintos de una matriz $\mathbf{A}$. Si $\mathbf{u} \in \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \mu \mathbf{I}_n) \cap \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)$, entonces

$$\mu \mathbf{u} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u},$$

por lo que

$$(\mu - \lambda)\mathbf{u} = 0,$$

y como $\lambda \neq \mu$, necesariamente $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, y por tanto $\operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \mu \mathbf{I}_n) \cap \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = \{\mathbf{0}\}$ y la suma es directa.

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada de forma que $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}$. Decir cuáles pueden ser sus valores propios.

Solución. Si λ es un valor propio de $\mathbf{A}$ con vector propio asociado se verifica por un lado que

$$\mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u})) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \cdot (\lambda \mathbf{u})) = \lambda \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}) = \lambda^3 \mathbf{u}$$

y por otro

$$\mathbf{A}^3 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u},$$

por lo que

$$(\lambda^3 - \lambda)\mathbf{u} = \mathbf{0},$$

y dado que $\mathbf{u} \neq 0$, tenemos que $\lambda^3 - \lambda = 0$, de donde λ es 0, 1 ó -1.

Capítulo 6

2–6–2001

Enunciado

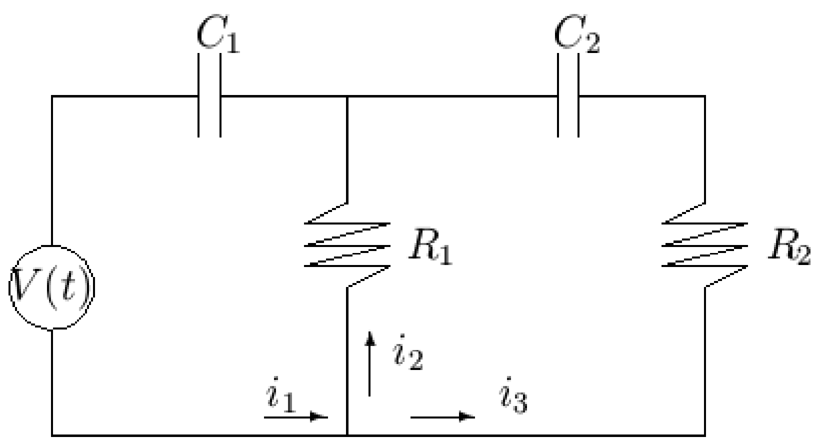
1. **(1.5 puntos)** Obtener la familia de curvas ortogonales a la familia de curvas dadas por la ecuación
$$y - x = ce^{-x}, \; c \in \mathbb{R}.$$

2. Resolver las siguientes ecuaciones lineales:

   (a) **(1.5 puntos)** $(1-x)y'' + xy' - y = (1-x)^2$, comprobando previamente que e^x es una solución particular de la ecuación homogénea.

   (b) **(1.5 puntos)** $y''' + y'' + y' + y = \cos x + 2\sin(3x)$.

3. Se considera el circuito de la figura



donde $C_1 = C_2 = 1\,\mathrm{F}$, $R_1 = 1/3\,\Omega$ y $R_2 = 1/2\,\Omega$. Se pide:

   (a) **(0.5 puntos)** Demostrar que las ecuaciones del circuito pueden escribirse de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} i_2' = -3i_2 - 3i_3 + 3V'(t); \\ i_3' = -2i_2 - 4i_3 + 2V'(t). \end{array} \right. \tag{6.1}$$

(b) **(2.5 puntos)** Resolver el sistema (6.1) y dibujar su diagrama de fases cuando $V'(t) = 0$.

(c) **(1.0 punto)** Obtener la solución del problema de condiciones iniciales asociado al sistema (6.1) cuando $V(t) = \sin t\,\mathrm{V}$ e $i_2(0) = i_3(0) = 1\,\mathrm{A}$.

4. **(1.5 puntos)** Dado el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - xy; \\ y' = x - y; \end{array} \right.$$

se pide calcular sus puntos críticos y determinar la estabilidad o inestabilidad de los mismos. (**Nota**: si usas algún resultado, debes demostrar que dicho resultado puede aplicarse).

Examen resuelto

Obtener la familia de curvas ortogonales a la familia de curvas dadas por la ecuación

$$y - x = ce^{-x}, \ c \in \mathbb{R}.$$

Solución. Derivamos implícitamente la ecuación

$$y' - 1 = -ce^{-x},$$

y cambiamos y por $-1/y'$ obteniendo

$$\frac{1+y'}{y'} = ce^{-x}.$$

Entonces

$$ce^{-x} = \frac{1+y'}{y'} = y - x,$$

de donde la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es

$$1 + y' = y'(y - x)$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{y-x-1} = y'.$$

Con el cambio de variable dependiente $z = y - x - 1$, transformamos la ecuación en

$$z' = y' - 1 = \frac{1}{y-x-1} - 1 = \frac{1}{z} - 1 = \frac{1-z}{z},$$

de donde

$$\int \frac{z(x)}{1-z(x)} z'(x)dx = \int dx,$$

e integrando

$$\begin{aligned} \int \frac{z(x)}{1-z(x)} z'(x)dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = z(x) \\ dt = z'(x)dx \end{array} \right\} = \int \frac{t}{1-t} dt \\ &= \int \left(-1 + \frac{1}{1-t} \right) dt = -t - \log(1-t) = -z(x) - \log(1 - z(x)) \end{aligned}$$

obtenemos la solución

$$-z(x) - \log(1 - z(x)) = x + c,$$

y deshaciendo el cambio

$$-y(x) - \log(2 - y(x) + x) = 2x + 1 + c.$$

Resolver

$$(1-x)y'' + xy' - y = (1-x)^2,$$

comprobando previamente que e^x es una solución particular de la ecuación homogénea.

Solución. Dada $y_1(x) = e^x$, es claro que $y_1'(x) = y_1''(x) = e^x$ y sustituyendo en la ecuación homogénea tenemos

$$(1-x)e^x + xe^x - e^x = 0,$$

por lo que $y_1(x)$ es solución de dicha ecuación. Proponemos otra solución de la forma $y_2(x) = k(x)e^x$ y derivando dos veces

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= k'(x)e^x + k(x)e^x, \\ y_2''(x) &= k''(x)e^x + 2k'(x)e^x + k(x)e^x, \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación homogénea tenemos

$$(1-x)k''(x) + (2-x)k'(x) = 0,$$

de donde

$$\int \frac{k''(x)}{k'(x)}dx = \int \frac{2-x}{x-1}dx$$

y entonces

$$\log k'(x) = \int \frac{2-x}{x-1}dx = \int \left(-1 + \frac{1}{x-1}\right) dx = -x + \log(x+1),$$

esto es

$$k(x) = \int (x+1)e^{-x}dx = \left\{ \begin{array}{c|c} u = x+1 & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{array} \right\} = -e^{-x}(x+1) + \int e^{-x}dx = -e^{-x}(x+2),$$

y así

$$y_2(x) = -x - 2,$$

y la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(x) = c_1e^x + c_2(x+2).$$

Proponemos una solución particular de la forma $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$, y derivando dos veces y sustituyendo en la ecuación no homogénea tenemos

$$Ax^2 - 2Ax + 2A - C = 1 - 2x + x^2,$$

de donde

$$\begin{cases} A = 1, \\ -2A = -2, \\ 2A - C = 1, \end{cases}$$

de donde $A = 1$, $C = 1$ y B puede tomar cualquier valor, por lo que una solución particular de la ecuación sería $y_p(x) = x^2 + 1$ y la solución general es

$$y(x) = c_1e^x + c_2(x+2) + x^2 + 1.$$

Nota. Lo más habitual en este ejercicio sería proponer una solución particular de la forma

$$y_p(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)(x+2)$$

y derivando

$$y_p'(x) = c_1(x)e^x + c_2(x) + c_1'(x)e^x + c_2'(x)(x+2),$$

suponiendo que
$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)(x+2) = 0$$
volviendo a derivar
$$y_p''(x) = c_1(x)e^x + c_1'(x)e^x + c_2'(x)$$
y sustituyendo y simplificando en la ecuación no homogénea tenemos

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x) = 1 - x,$$

por lo que tenemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1'(x)e^x + c_2'(x)(x+2) = 0, \\ c_1'(x)e^x + c_2'(x) = 1 - x, \end{array} \right|$$

que al resolver nos da
$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x+2 \\ 1-x & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & x+2 \\ e^x & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(x-2)(x-1)}{-e^x(x+1)}$$
pero la integral
$$\int \frac{(x-2)(x-1)}{-e^x(x+1)} dx$$
no admite una primitiva en términos de funciones elementales. Así dado que puede comprobarse que
$$c_2(x) = x - 2\log(x+1),$$
la solución general de la ecuación tendría que expresarse de la forma

$$y(x) = c_1 e^x + c_2(x+2) + e^x \int_0^x \frac{(t-2)(t-1)}{-e^t(t+1)} dt + x^2 + 2x - 2(x+2)\log(x+1).$$

Resolver
$$y''' + y'' + y' + y = \cos x + 2\sin(3x).$$

Solución. Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea

$$y''' + y'' + y' + y = 0$$

mediante la ecuación característica

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

que por el método de Ruffini nos da

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & & -1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

por lo que -1 es solución y la ecuación resultante $x^2+1=0$ nos da las soluciones $\pm i$, por lo que la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x.$$

Proponemos una solución particular de la forma

$$y_p(x) = Ax\cos x + Bx\sin x + C\cos(3x) + D\sin(3x),$$

y derivando tres veces

$$y_p'(x) = (A+Bx)\cos x + (-Ax+B)\sin x - 3C\sin(3x) + 3D\cos(3x),$$

$$y_p''(x) = (-Ax+2B)\cos x + (-Bx-2A)\sin x - 9C\cos(3x) - 9D\sin(3x),$$

$$y_p'''(x) = (-Bx-3A)\cos x + (Ax-3B)\sin x + 27C\sin(3x) - 27D\cos(3x).$$

Sustituyendo en la ecución no homogénea y simplificando

$$(2B-2A)\cos x - (2A+2B)\sin x - (8C+24D)\cos(3x) + (24C-8D)\sin(3x) = \cos x + 2\sin(3x),$$

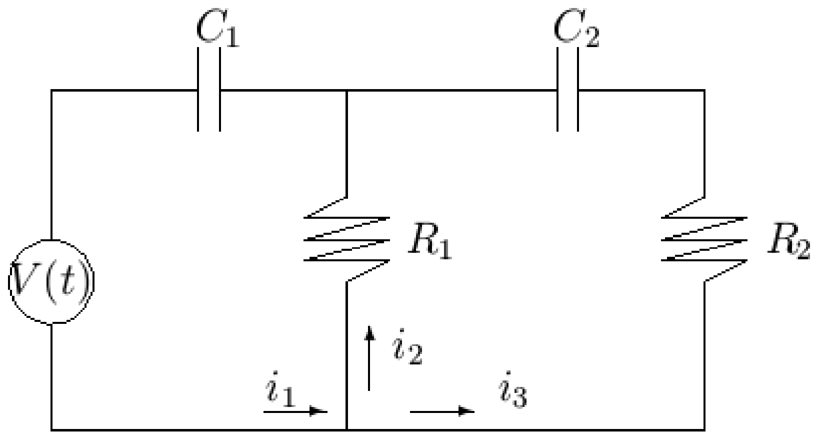
e igualando coeficientes

$$\begin{cases} -2A+2B=1, \\ 2A+2B=0, \\ 8C+24D=0, \\ 24C-8D=2, \end{cases}$$

de donde $A=-1/4$, $B=1/4$, $C=3/40$ y $D=-1/40$ y la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2\cos x + c_3 \sin x - \frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{4}x\sin x + \frac{3}{40}\cos(3x) - \frac{1}{40}\sin(3x).$$

Se considera el circuito de la figura



donde $C_1 = C_2 = 1\,\mathrm{F}$, $R_1 = 1/3\,\Omega$ y $R_2 = 1/2\,\Omega$. Se pide:

(a) Demostrar que las ecuaciones del circuito pueden escribirse de la forma

$$\left\{\begin{array}{l} i_2' = -3i_2 - 3i_3 + 3V'(t); \\ i_3' = -2i_2 - 4i_3 + 2V'(t). \end{array}\right. \tag{6.2}$$

(b) Resolver el sistema (6.2) y dibujar su diagrama de fases cuando $V'(t) = 0$.

(c) Obtener la solución del problema de condiciones iniciales asociado al sistema (6.2) cuando $V(t) = \sin t\,\mathrm{V}$ e $i_2(0) = i_3(0) = 1\,\mathrm{A}$.

Solución. (a) Por una parte, la suma de las intensidades que llegan a un nudo coincide con la suma de las intesidades salientes, por lo que

$$i_1 = i_2 + i_3.$$

Por otro lado, si suponemos que cada subcircuito es recorrido en sentido contrario a las agujas del reloj, y teniendo en cuenta que el voltaje generado en cada uno se consume en los elementos del circuito tenemos

$$V(t) = V_{C_1} + V_{R_1},$$

para el circuito de la izquierda y

$$V(t) = V_{C_1} + V_{C_2} + V_{R_2},$$

para el circuito exterior (eliminando la rama de i_2). Entonces, sustituyendo

$$\left\{\begin{array}{l} V(t) = q_1/C_1 + R_1 i_2, \\ V(t) = q_1/C_1 + q_3/C_2 + R_2 i_3, \end{array}\right.$$

donde q_1 y q_3 son las cargas correspondientes a las intensidades i_1 e i_3. Derivamos y teniendo en cuenta que la derivada de la carga es la intensidad

$$\left\{\begin{array}{l} V'(t) = i_1/C_1 + R_1 i_2', \\ V'(t) = i_1/C_1 + i_3/C_2 + R_2 i_3'. \end{array}\right.$$

Sustituyendo los valores númericos y el valor de i_1 y despejando las derivadas de i_2 e i_3 tenemos

$$\left\{\begin{array}{l} i_2' = -3i_2 - 3i_3 + 3V'(t); \\ i_3' = -2i_2 - 4i_3 + 2V'(t). \end{array}\right.$$

(b) Expresamos el sistema de forma matricial

$$\begin{pmatrix} i_2' \\ i_3' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} i_2 \\ i_3 \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico es

$$p(t) = \begin{vmatrix} -3-t & -3 \\ -2 & -4-t \end{vmatrix} = t^2 + 7t + 6 = 0,$$

de donde

$$t = \frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = -\frac{7}{2} \pm \frac{5}{2},$$

por lo que las soluciones son -6 y -1. Calculamos a_1 y a_2,

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{a_1}{t+6} + \frac{a_2}{t+1} = \frac{(a_1+a_2)t + a_1 + 6a_2}{p(t)},$$

que igualando coeficientes da lugar al sistema

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 + a_2 = 0, \\ a_1 + 6a_2 = 1, \end{array}\right.$$

con lo que $a_1 = -1/5$ y $a_2 = 1/5$. Por otra parte

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t+6} = t+1, \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{t+1} = t+6. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^{-6t} a_1(\mathbf{A}) \cdot q_1(\mathbf{A}) + e^{-t} a_2(\mathbf{A}) \cdot q_2(\mathbf{A}) \\ &= -\frac{e^{-6t}}{5}(\mathbf{A} + \mathbf{I}_2) + \frac{e^{-t}}{5}(\mathbf{A} + 6\mathbf{I}_2) \\ &= -\frac{e^{-6t}}{5}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} + \frac{e^{-t}}{5}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2e^{-6t} + 3e^{-t} & 3e^{-6t} - 3e^{-t} \\ 2e^{-6t} - 2e^{-t} & 3e^{-6t} + 2e^{-t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{pmatrix} i_2(t) \\ i_3(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2e^{-6t} + 3e^{-t} & 3e^{-6t} - 3e^{-t} \\ 2e^{-6t} - 2e^{-t} & 3e^{-6t} + 2e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Esbozamos a continuación el diagrama de fases del sistema

$$\begin{cases} i_2' = -3i_2 - 3i_3, \\ i_3' = -2i_2 - 4i_3. \end{cases}$$

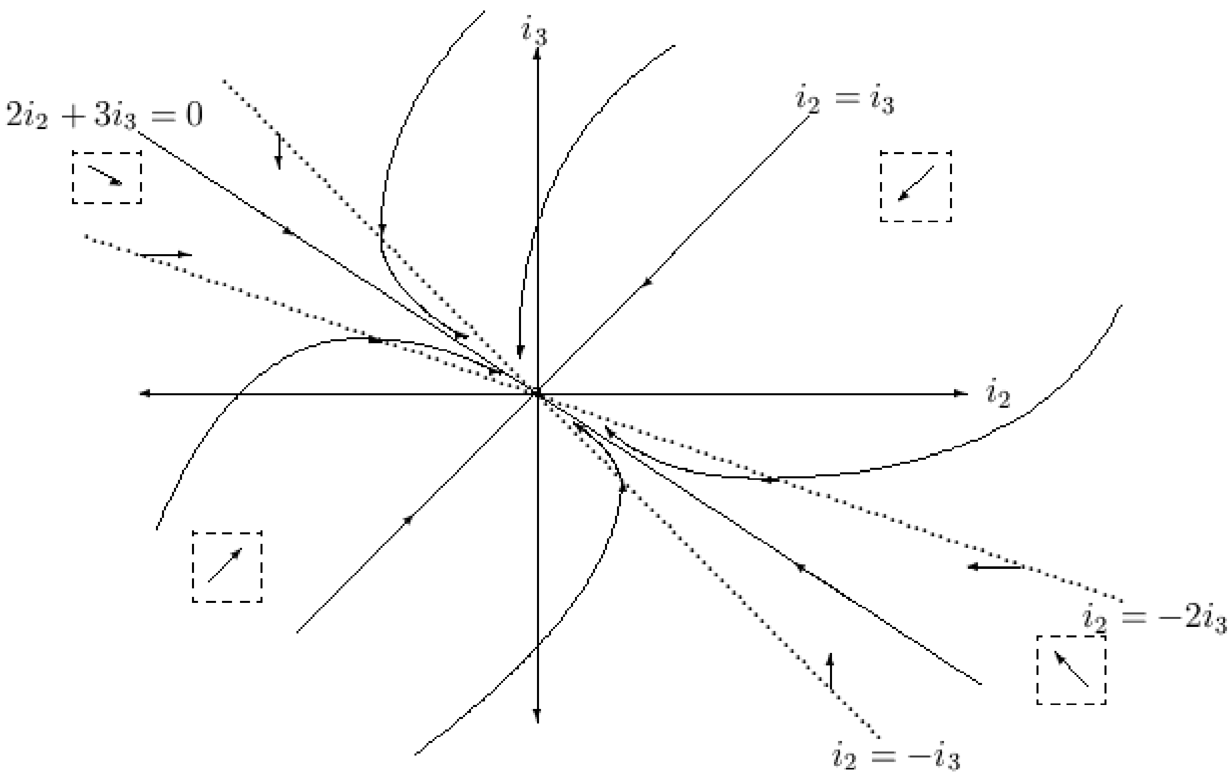
Vemos fácilmente que $(0,0)$ es el único pnto crítico y que las rectas $i_2 = -i_3$ e $i_2 = -2i_3$ son las isoclinas. En la primera, tenemos que $i_2' = 0$ e $i_3' = 2i_2$ por lo que el vector tangente en esta recta será paralelo al eje i_3 hacia arriba si $i_2 > 0$ y hacia abajo si $i_2 < 0$. En la segunda isoclina tenemos que $i_3' = 0$ e $i_2' = 3i_3$ por lo que será paralelo al eje i_2 hacia la derecha si $i_3 > 0$ y hacia la izquierda si $i_3 < 0$. Por otro lado, los subespacios propios son

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A} + 6\mathbf{I}_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : i_2 = i_3\},$$

y

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A} + \mathbf{I}_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2i_2 + 3i_3 = 0\},$$

por lo que el diagrama de fases será aproximadamente



(c) Proponemos una solución particular de la forma

$$\begin{aligned} i_{2,p}(t) &= A\cos t + B\sin t, \\ i_{3,p}(t) &= C\cos t + D\sin t. \end{aligned}$$

Derivamos

$$\begin{aligned} i_{2,p}'(t) &= -A\sin t + B\cos t, \\ i_{3,p}'(t) &= -C\sin t + D\cos t, \end{aligned}$$

y sustituimos en el sistema no homogéneo

$$\begin{cases} i_2' = -3i_2 - 3i_3 + 3\cos t; \\ i_3' = -2i_2 - 4i_3 + 2\cos t. \end{cases}$$

y simplificando

$$\begin{aligned} -A\sin t + B\cos t &= -3(A+C-1)\cos t - 3(B+D)\sin t, \\ -C\sin t + D\cos t &= -2(A+2C-1)\cos t - 2(B+2D)\sin t, \end{aligned}$$

de donde igualando coeficientes

$$\begin{cases} 3A + B + 3C = 3, \\ -A + 3B + 3D = 0, \\ 2A + 4C + D = 2, \\ 2B - C + 4D = 0, \end{cases}$$

que resolvemos

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1\times F_2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_2+3F_1 \\ F_3+2F_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 3 & 9 & 3 \\ 0 & 6 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2\times F_4]{} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 7 & 2 \\ 0 & 10 & 3 & 9 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_3-3F_2 \\ F_4-5F_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -11 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_4-\frac{8}{7}F_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{37}{7} & \frac{5}{7} \end{array}\right) \xrightarrow{(-7)F_4} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 37 & -5 \end{array}\right)$$

que nos da el sistema

$$\begin{cases} -A + 3B + 3D = 0, \\ 2B - C + 4D = 0, \\ 7C - 5D = 2, \\ 37D = -5, \end{cases}$$

de donde $D = -5/37$, $C = 7/37$, $B = 27/74$ y $A = 51/74$, por lo que la solución particular es

$$\begin{aligned} i_{2,p}(t) &= \frac{51}{74}\cos t + \frac{27}{74}\sin t, \\ i_{3,p}(t) &= \frac{7}{37}\cos t - \frac{5}{37}\sin t, \end{aligned}$$

y así la solución general es

$$\begin{pmatrix} i_2(t) \\ i_3(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2e^{-6t} + 3e^{-t} & 3e^{-6t} - 3e^{-t} \\ 2e^{-6t} - 2e^{-t} & 3e^{-6t} + 2e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{51}{74}\cos t + \frac{27}{74}\sin t \\ \frac{7}{37}\cos t - \frac{5}{37}\sin t \end{pmatrix}$$

y a partir de la condición inicial

$$\begin{pmatrix} i_2(0) \\ i_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2 \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{51}{74} \\ \frac{7}{37} \end{pmatrix},$$

de donde $c_1 = 23/74$ y $c_2 = 30/37$ y así

$$\left\{ \begin{array}{l} i_2(t) = \frac{83}{185}e^{-6t} - \frac{51}{370}e^{-t} + \frac{51}{74}\cos t + \frac{27}{74}\sin t, \\ i_3(t) = \frac{83}{185}e^{-6t} + \frac{17}{185}e^{-t} + \frac{7}{37}\cos t - \frac{5}{37}\sin t. \end{array} \right.$$

Dado el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - xy; \\ y' = x - y; \end{array} \right.$$

se pide calcular sus puntos críticos y determinar la estabilidad o inestabilidad de los mismos. (**Nota**: si usas algún resultado, debes demostrar que dicho resultado puede aplicarse).

Solución. Calculamos los puntos críticos del sistema resolviendo

$$\left\{ \begin{array}{l} x - xy = 0, \\ x - y = 0, \end{array} \right.$$

de donde $x = y$ y por consiguiente $x - x^2 = 0$, de donde $x = 0$ ó 1 y las dos puntos críticos del sistema son $(0,0)$ y $(1,1)$. La matrix jacobiana del sistema es

$$\mathbf{Jf}(x,y) = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Estudiamos el punto crítico $(0,0)$. En este caso

$$\mathbf{Jf}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

y su polinomio característico es

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 \\ 1 & -1-t \end{vmatrix} = -(1-t)(1+t)$$

cuyas raíces son obviamente ± 1. Ambas son distintas de cero y por tanto el punto crítico es hiperbólico y por el Teorema de Hartman–Grobman, como uno de ellas es positivo se tiene que el punto crítico $(0,0)$ es inestable.

Pasamos ahora al punto crítico $(1,1)$, que nos da la matriz jacobiana

$$\mathbf{Jf}(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico nos proporciona la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} -t & -1 \\ 1 & -1-t \end{vmatrix} = t^2 + t + 1 = 0,$$

de donde

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

que son dos raíces complejas conjugadas con parte real no nula y consecuentemente el punto crítico es hiperbólico. Aplicando entonces el Teorema de Hartman–Grobman tenemos que dicho punto crítico es asintóticamente estable pues la parte real de los valores propios de la matriz jacobiana es negativa.

Capítulo 7

15–6–2001

Enunciado

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

   (a) **(1.5 puntos)** $x^3y''' + 2xy' - 2y = x^2 \log x + 3x$.

   (b) **(1.0 punto)** $y'' + 2y' - 8y = 9e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

2. **(2.5 puntos)** Resolver el sistema lineal

$$\begin{cases} x' = 3x + y; \\ y' = y - 2x; \end{cases}$$

   y esbozar su diagrama de fases.

3. **(2.5 puntos)** Un tanque contiene 40 l. de agua pura. Una solución salina con 100 gr. de sal por litro entra en el tanque a razón de 1.6 l/min. y sale del tanque a razón de 2.3 l/min. Se pide calcular la cantidad de sal en el tanque cuando éste tenga 25 litros de agua.

4. **(1.0 punto)** Dada la ecuación

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0, \tag{7.1}$$

   con $M, N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, determinar qué ecuación debe de satisfacer un factor integrante de (7.1) que dependa de la variable xy.

5. **(1.5 puntos)** Determinar los puntos críticos del sistema

$$\begin{cases} x' = 1 - xy; \\ y' = x - y^3; \end{cases}$$

   y estudiar la estabilidad de los mismos, apuntando aquellos resultados que permiten dicho estudio.

6. **(2.5 puntos)** Determinar para qué valores de p y q la siguiente matriz es diagonalizable

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & q \\ 3 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

   Hallar la matriz diagonal y la matriz de cambio de base para los valores $p = -1$ y $q = 0$.

7. **(2.5 puntos)** Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (2x, 2y - x, z + y + x, x - y + z).$$

Hallar en caso de ser posible:

(a) Matriz asociada a $\mathbf{f}$ en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$.

(b) Núcleo e imagen de $\mathbf{f}$.

(c) Valores propios de la matriz asociada a $\mathbf{f}$ en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$.

8. **(2.5 puntos)** Sea $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^4$ el subespacio vectorial determinado por las ecuaciones $x - y + 2z - t = 0$ y $x + y + z + 4t = 0$. Hallar las ecuaciones de $\mathcal{W}^\perp$ y una base ortonormal de $\mathcal{W}$. Hallar la proyección ortogonal de $(0, 0, 0, 1)$ sobre $\mathcal{W}$.

9. **(2.5 puntos)** Determinar de una forma razonada la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Todo valor propio de una matriz cuadrada tal que su subespacio propio asociado tiene dimensión uno es una raíz de multiplicidad uno del polinomio característico de dicha matriz.

(b) La intersección de dos subespacios vectoriales es un subespacio vectorial.

(c) Toda matriz diagonalizable es simétrica.

(d) Dados los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tales que $\mathbf{u}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$. ¿Es cierto que $\mathbf{u}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$?

(e) Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada. Si $|\mathbf{A}^4| = 0$, entonces 0 es un valor propio de $\mathbf{A}$.

Examen resuelto

Resolver
$$x^3y''' + 2xy' - 2y = x^2 \log x + 3x.$$

Solución. Se trata de una ecuación de Cauchy–Euler que con el cambio $x = e^t$ se transforma en lineal con coeficientes constantes. Para ello, supongamos que $\dot{y}$ es la derivada de y respecto a t. Entonces
$$y' = \dot{y}\,\frac{dt}{dx} = \dot{y}\,\frac{1}{x} = \dot{y}\; e^{-t},$$
$$y'' = \frac{d}{dt}(\dot{y}\; e^{-t})\frac{dt}{dx} = \ddot{y}\; e^{-2t} - \dot{y}\; e^{-2t},$$
y
$$y''' = \frac{d}{dt}(\ddot{y}\; e^{-2t} - \dot{y}\; e^{-2t})\frac{dt}{dx} = \dddot{y}\; e^{-3t} - 3e^{-3t}\,\ddot{y} + 2e^{-3t}\,\dot{y}$$
y sustituyendo en la ecuación y simplificando tenemos
$$\dddot{y} - 3\,\ddot{y} + 4\,\dot{y} - 2y = te^{2t} + 3e^t.$$
Resolvemos primero la ecuación homogénea a partir de su ecuación característica
$$t^3 - 3t^2 + 4t - 2 = 0,$$
que procediendo por el método de Ruffini
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 4 & -2 \\ 1 & & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$
y la ecuación restante $t^2 - 2t + 2 = 0$ nos da
$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i,$$
por lo que la solución de la ecuación homogénea es
$$y_h(t) = c_1e^t + c_2e^t \cos t + c_3e^t \sin t.$$
Proponemos como solución particular de la ecuación no homogénea la función
$$y_p(x) = (At + B)e^{2t} + Cte^t,$$
que derivando tres veces
$$\dot{y}_p\,(x) = (2At + A + 2B)e^{2t} + (Ct + C)e^t,$$
$$\ddot{y}_p\,(x) = (4At + 4A + 4B)e^{2t} + (Ct + 2C)e^t,$$
$$\dddot{y}_p\,(x) = (8At + 12A + 8B)e^{2t} + (Ct + 3C)e^t,$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea y simplificando

$$(2At + 4A + 2B)e^{2t} - Ce^t = te^{2t} + 3e^t,$$

e igualando coeficientes y simplificando tenemos

$$\begin{cases} 2A = 1, \\ 4A + 2B = 0, \\ -C = 3, \end{cases}$$

de donde $A = 1/2$, $B = -1$ y $C = -3$, con lo que la solución de la ecuación no homogénea es

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^t\cos t + c_3e^t\sin t + (t/2 - 1)e^{2t} - 3te^t.$$

Deshaciendo el cambio

$$y(x) = c_1x + c_2x\cos(\log x) + c_3x\sin(\log x) + (\log x/2 - 1)x^2 - 3x\log x.$$

Resolver

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 8y = 9e^{-x}, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Solución. Resolvemos primero la ecuación homogénea

$$y'' + 2y' - 8y = 0,$$

mediante su ecuación característica

$$x^2 + 2x - 8 = 0,$$

que nos da las soluciones

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = -1 \pm 3,$$

por lo que las raíces son -4 y 2 y la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h(x) = c_1e^{-4x} + c_2e^{2x}.$$

Proponemos una solución particular de la forma $y_p(x) = Ae^{-x}$, derivamos dos veces

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= -Ae^{-x}, \\ y_p''(x) &= Ae^{-x}, \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea y simplificando

$$-9Ae^{-x} = 9e^{-x},$$

de donde $-9A = 9$ y $A = -1$, con lo que la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y(x) = c_1e^{-4x} + c_2e^{2x} - e^{-x}.$$

Derivamos una vez la solución

$$y'(x) = -4c_1e^{-4x} + 2c_2e^{2x} + e^{-x},$$

y utilizamos las condiciones iniciales para construir el sistema

$$\begin{cases} y(0) = 0 = c_1 + c_2 - 1, \\ y'(0) = 0 = -4c_1 + 2c_2 + 1, \end{cases}$$

de donde $c_1 = c_2 = 1/2$ y la solución del problema de condiciones iniciales es

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{-4x} + \frac{1}{2}e^{2x} - e^{-x}.$$

Resolver el sistema lineal

$$\begin{cases} x' = 3x + y; \\ y' = y - 2x; \end{cases}$$

y esbozar su diagrama de fases.

Solución. La forma matricial del sistema es

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Igualamos el polinomio caracterísitco a cero

$$p(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 1 \\ -2 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 4t + 5 = 0,$$

de donde

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i.$$

Calculamos a_1 y a_2,

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{a_1}{t-2+i} + \frac{a_2}{t-2-i} = \frac{(a_1+a_2)t - a_1(2+i) - a_2(2-i)}{p(t)},$$

e igulando coeficientes obtenemos el sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ a_1(2+i) + a_2(2-i) = -1, \end{cases}$$

con lo que $a_1 = -1/4i$ y $a_2 = 1/4i$. Por otra parte

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t-2+i} = t - 2 - i, \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{t-2-i} = t - 2 + i. \end{aligned}$$

Así

$$
\begin{aligned}
e^{t\mathbf{A}} &= e^{t(2-i)}a_1(\mathbf{A})\cdot q_1(\mathbf{A}) + e^{t(2+i)}a_2(\mathbf{A})\cdot q_2(\mathbf{A}) \\
&= e^{2t}\left(-\frac{e^{-it}}{4i}(\mathbf{A}-(2+i)\mathbf{I}_2) + \frac{e^{it}}{4i}(\mathbf{A}-(2-i)\mathbf{I}_2)\right) \\
&= e^{2t}\left(-\frac{e^{-it}}{4i}\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ -2 & -1-i \end{pmatrix} + \frac{e^{it}}{4i}\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -2 & -1+i \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{e^{2t}}{4i}\begin{pmatrix} e^{it}-e^{-it}+i(e^{it}+e^{-it}) & e^{it}-e^{-it} \\ -2(e^{it}-e^{-it}) & -(e^{it}-e^{-it})+i(e^{it}+e^{-it}) \end{pmatrix} \\
&= \frac{e^{2t}}{2}\begin{pmatrix} \sin t+\cos t & \sin t \\ -2\sin t & -\sin t+\cos t \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

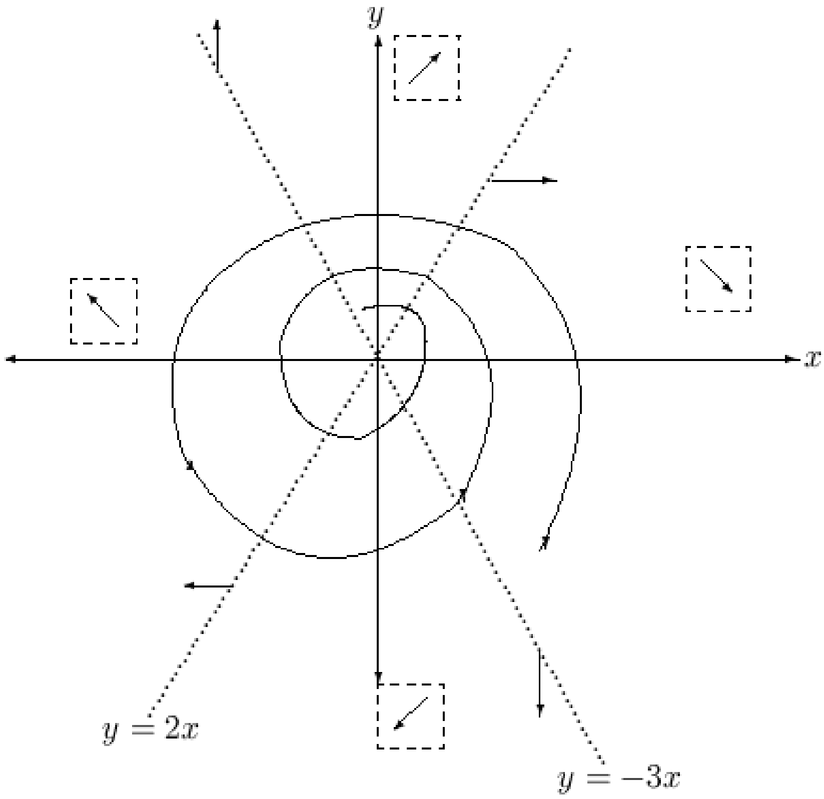
por lo que la solución del sistema es

$$
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{e^{2t}}{2}\begin{pmatrix} \sin t+\cos t & \sin t \\ -2\sin t & -\sin t+\cos t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},
$$

o equivalentemente

$$
\begin{cases} x(t) = \frac{e^{2t}}{2}(c_2\cos t + (c_1+c_2)\sin t), \\ y(t) = \frac{e^{2t}}{2}(c_2\cos t - (2c_1+c_2)\sin t). \end{cases}
$$

Procedemos a esbozar el diagrama de fases. Es fácil ver que $(0,0)$ es el único punto crítico del mismo y que las isoclinas son $y=-3x$ e $y=2x$. En la primera tenemos que $x'=0$ e $y'=-5x$, por lo que el vector tangente tendrá la dirección del eje y y apuntará hacia arriba si $x<0$ y hacia abajo si $x>0$. Respecto a la segunda isoclina tenemos que $x'=5x$ e $y'=0$, por lo que el vector tangente tendrá la dirección del eje x y apuntará a la derecha si $x>0$ y a la izquierda si $x<0$. Por otra parte, los vectores propios son complejos conjugados con parte real positiva, por lo que el diagrama de fases será de la forma



Un tanque contiene 40 l. de agua pura. Una solución salina con 100 gr. de sal por litro entra en el tanque a razón de 1.6 l/min. y sale del tanque a razón de 2.3 l/min. Se pide calcular la cantidad de sal en el tanque cuando éste tenga 25 litros de agua.

Solución. Sea $x(t)$ la cantidad de sal en el tanque en el instante de tiempo t. Se verifica entonces que

$$x'(t) = v_e - v_s$$

donde v_e es la velocidad de entrada de la sal y v_s la de salida. Dado que

$$v_e = 1.6 \cdot 100 = 160,$$

y

$$v_s = 2.3 \cdot \frac{x(t)}{V(t)},$$

donde $V(t)$ es el volumen de agua en el tanque. Como $V(t) = 40 - 0.7t$, tenemos la ecuación diferencial lineal

$$x'(t) = 160 - 2.3 \cdot \frac{x(t)}{40 - 0.7t}.$$

Resolvemos primero la ecuación homogénea

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = -2.3 \int \frac{dt}{40 - 0.7t},$$

de donde

$$\log x(t) = \frac{23}{7}\log(40 - 0.7t) + c,$$

o equivalentemente

$$x_h(t) = k(40 - 0.7t)^{23/7},\ k = e^c.$$

Proponemos como solución de la ecuación no homogénea $x(t) = k(t)(40 - 0.7t)^{23/7}$, y derivando

$$x'(t) = k'(t)(40 - 0.7t)^{23/7} - k(t)0.7\frac{23}{7}(40 - 0.7t)^{16/7},$$

y sustituyendo

$$k'(t)(40 - 0.7t)^{23/7} = 160,$$

con lo que

$$k(t) = \int 160(40 - 0.7t)^{-23/7}dt = 100(40 - 0.7t)^{-16/7} + c,$$

y

$$x(t) = c(40 - 0.7t)^{23/7} + 100(40 - 0.7t).$$

Como el agua inicialmente era pura, tenemos que $x(0) = 0$ y así

$$x(0) = 0 = c \cdot 40^{23/7} + 4000,$$

de donde $c = -4000/40^{23/7}$ y

$$x(t) = -\frac{4000}{40^{23/7}}(40 - 0.7t)^{23/7} + 100(40 - 0.7t).$$

Sea t_0 el tiempo en que el volumen es de 25 litros. Entonces

$$V(t_0) = 25 = 40 - 0.7t_0,$$

de donde $t_0 = 150/7$ minutos y

$$x\left(\frac{150}{7}\right) = -\frac{4000}{40^{23/7}}\left(40 - 0.7\frac{150}{7}\right)^{23/7} + 100\left(40 - 0.7\frac{150}{7}\right) \approx 1646.15 \text{ gramos.}$$

Dada la ecuación

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0, \tag{7.2}$$

con $M, N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, determinar qué ecuación debe de satisfacer un factor integrante de (7.2) que dependa de la variable xy.

Solución. De la ecuación de factor integrante

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y)M(x,y) + \mu(x,y)\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y)N(x,y) + \mu(x,y)\frac{\partial N}{\partial x}(x,y),$$

y dado que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y) &= \mu'(xy)y, \\ \frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) &= \mu'(xy)x, \end{aligned}$$

reescribimos la ecuación como

$$\mu'(xy)(M(x,y)x - N(x,y)y) = \mu(xy)\left(\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\right).$$

Determinar los puntos críticos del sistema

$$\begin{cases} x' = 1 - xy; \\ y' = x - y^3; \end{cases}$$

y estudiar la estabilidad de los mismos, apuntando aquellos resultados que permiten dicho estudio.

Solución. Del sistema

$$\begin{cases} 1 - xy = 0; \\ x - y^3 = 0, \end{cases}$$

tenemos que $x = y^3$, y entonces $1 = y^4$, de donde $y = \pm 1$, por lo que $(1,1)$ y $(-1,-1)$ son los únicos puntos críticos del sistema. La matriz jacobiana es

$$\mathbf{Jf}(x,y) = \begin{pmatrix} -y & -x \\ 1 & -3y^2 \end{pmatrix}.$$

Consideremos ahora el punto $(1,1)$. Entonces

$$\mathbf{Jf}(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

e igualando el polinomio caracterísitco a cero tenemos

$$p(t) = \begin{vmatrix} -1-t & -1 \\ 1 & -3-t \end{vmatrix} = t^2 + 4t + 4 = 0,$$

de donde

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = -2,$$

por lo que los valores propios de la matriz jacobiana son negativos y por tanto hiperbólicos. Aplicamos el Teorema de Hartman–Grobman para concluir que el punto crítico es asintóticamente estable.

Estudiamos ahora el punto crítico $(-1,-1)$. Ahora

$$\mathbf{Jf}(-1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Igualando el polinomio caracterísitco a cero obtenemos

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 1 & -3-t \end{vmatrix} = t^2 + 2t - 4 = 0,$$

y entonces

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{5},$$

por lo que los valores propios de la matriz jacobiana son reales no nulos y por tanto hiperbólicos. Teniendo en cuenta que $-1+2\sqrt{5} > 0$, aplicamos el Teorema de Hartman–Grobman para deducir que el punto crítico es inestable.

Determinar para qué valores de p y q la siguiente matriz es diagonalizable

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & q \\ 3 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz diagonal y la matriz de cambio de base para los valores $p = -1$ y $q = 0$.

Solución. Calculamos el polinomio característico y lo igualamos a cero

$$p(t) = \begin{vmatrix} 5-t & 0 & 0 \\ 0 & -1-t & q \\ 3 & 0 & p-t \end{vmatrix} = (t-5)(t+1)(p-t) = 0,$$

por lo que fácilmente vemos que las raíces son 5, -1 y p. Distinguimos entonces los siguientes casos:

- Si $p \notin \{-1, 5\}$, entonces los tres valores propios son distintos y por lo tanto la matriz es diagonalizable.
- Si $p = -1$, entonces éste tiene multiplicidad dos y hemos de calcular la dimensión de $\operatorname{Ker}(\mathbf{A}+\mathbf{I}_3)$ que vendrá dado por el sistema

$$(\mathbf{A}+\mathbf{I}_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde distinguimos los siguientes subcasos:

  - Si $q \neq 0$, entonces $\operatorname{Ker}(\mathbf{A}+\mathbf{I}_3) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z = 0\}$, cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = \lambda, & \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = 0, \end{cases}$$

de donde $(x,y,z) = \lambda(0,1,0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y por tanto una base es $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker}(\mathbf{A}+\mathbf{I}_3)} = \{(0,1,0)\}$, por lo que $\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{A}+\mathbf{I}_3) = 1$ y la matriz no es diagonalizable.

  - Si $q = 0$, entonces $\operatorname{Ker}(\mathbf{A}+\mathbf{I}_3) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$, cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = \lambda, & \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\ z = \mu, \end{cases}$$

y por tanto $(x,y,z) = \lambda(0,1,0)+\mu(0,0,1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, y entonces una base es $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker}(\mathbf{A}+\mathbf{I}_3)} = \{(0,1,0),(0,0,1)\}$, obteniéndose que $\dim \mathcal{B}_{\operatorname{Ker}(\mathbf{A}+\mathbf{I}_3)} = 2$ y por consiguiente la matriz es diagonalizable.

- Si $p = 5$, entonces éste tiene multiplicidad dos y de nuevo hemos de calcular la dimensión de $\operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}_3)$ que viene dado por el sistema

$$(\mathbf{A} - \mathbf{5I}_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & q \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde tenemos que $\operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}_3) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0,\ 6y - qz = 0\}$, cuyas ecuaciones parámetricas son

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = \frac{q}{6}\lambda, & \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = \lambda, \end{cases}$$

de donde $(x, y, z) = \lambda(0, q/6, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y una base será $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker}(\mathbf{A}-5\mathbf{I}_3)} = \{(0, q/6, 1)\}$ y por lo tanto $\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}_3) = 1$ y la matriz no es diagonalizable.

Sean ahora $p = -1$ y $q = 0$. Como hemos visto anteriormente la matriz será diagonalizable y $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker}(\mathbf{A}+\mathbf{I}_3)} = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Calculamos $\operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}_3)$ que viene dado por

$$(\mathbf{A} - \mathbf{5I}_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

por lo que $\operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}_3) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0,\ x - 2z = 0\}$, cuyas ecuaciones parámetricas son

$$\begin{cases} x = 2\lambda, \\ y = 0, & \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = \lambda, \end{cases}$$

de donde $(x, y, z) = \lambda(2, 0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y una base será $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker}(\mathbf{A}-5\mathbf{I}_3)} = \{(2, 0, 1)\}$. así una base de vectores propios es $\mathcal{B} = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (2, 0, 1)\}$. Entonces

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1},$$

donde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y la inversa la calculamos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow_{F_1 \times F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow_{F_2 \times F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow_{\frac{1}{2}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow_{F_2 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right),$$

y así

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (2x, 2y - x, z + y + x, x - y + z).$$

Hallar en caso de ser posible:

(a) Matriz asociada a $\mathbf{f}$ en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$.

(b) Núcleo e imagen de $\mathbf{f}$.

(c) Valores propios de la matriz asociada a $\mathbf{f}$ en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$.

Solución. (a) Sean $\mathcal{C}_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y

$$\mathcal{C}_4 = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}.$$

Entonces

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}_4\mathcal{C}_3}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Calculamos en primer lugar el núcleo que vendrá dado por el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que al resolverlo nos da $x = y = z = 0$, por lo que $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(0,0,0)\}$.

Calculemos ahora la imagen. Para ello démonos cuenta de que $(x, y, z, t) \in \mathrm{Im}\,\mathbf{f}$ si y sólo si existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Calculamos el rango de las matrices del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & x \\ -1 & 2 & 0 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \\ 1 & -1 & 1 & t \end{array}\right) \to_{\substack{F_2+\frac{1}{2}F_1 \\ F_3-\frac{1}{2}F_1 \\ F_4-\frac{1}{2}F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 & y+\frac{1}{2}x \\ 0 & 1 & 1 & z-\frac{1}{2}x \\ 0 & -1 & 1 & t-\frac{1}{2}x \end{array}\right) \to_{\substack{F_3-\frac{1}{2}F_2 \\ F_4+\frac{1}{2}F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 & y+\frac{1}{2}x \\ 0 & 0 & 1 & z-\frac{1}{2}y-\frac{3}{4}x \\ 0 & 0 & 1 & t+\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}x \end{array}\right)$$

$$\to_{F_4-F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 & y+\frac{1}{2}x \\ 0 & 0 & 1 & z-\frac{1}{2}y-\frac{3}{4}x \\ 0 & 0 & 0 & t-z+y+\frac{1}{2}x \end{array}\right),$$

y para que el rango de la matriz $\mathbf{A}$ y la ampliada del sistema coincidan debe ocurrir que $x+2y-2z+2t=0$, por lo que

$$\operatorname{Im}\mathbf{f} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+2y-2z+2t=0\}.$$

(c) No es posible calcular los valores y vectores porpios puesto que la matriz no es cuadrada.

Sea $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^4$ el subespacio vectorial determinado por las ecuaciones $x-y+2z-t=0$ y $x+y+z+4t=0$. Hallar las ecuaciones de $\mathcal{W}^\perp$ y una base ortonormal de $\mathcal{W}$. Hallar la proyección ortogonal de $(0,0,0,1)$ sobre $\mathcal{W}$.

Solución. Empezamos obteniendo una base de $\mathcal{W}$. Para ello resolvemos el sistema que forman sus ecuaciones para obtener las ecuaciones paramétricas.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \to_{F_2-F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right),$$

que se reescribe como sistema de la forma

$$\begin{cases} x-y+2z-t=0, \\ 2y-z+5t=0, \end{cases}$$

que da lugar a las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2}\lambda - \frac{3}{2}\mu, \\ y = \frac{1}{2}\lambda - \frac{5}{2}\mu, \\ z = \lambda, \\ t = \mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

por lo que $(x,y,z,t) = \frac{1}{2}\lambda(-3,1,2,0) + \frac{1}{2}\mu(-3,-5,0,1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, por lo que una base de $\mathcal{W}$ es $\mathcal{B}_{\mathcal{W}} = \{(-3,1,2,0),(-3,-5,0,1)\}$. Entonces un vector $(x,y,z,t) \in \mathcal{W}^\perp$ si y sólo si

$$\begin{cases} 0 = \langle (x,y,z,t),(-3,1,2,0)\rangle = -3x+y+2z, \\ 0 = \langle (x,y,z,t),(-3,-5,0,1)\rangle = -3x-5y+t, \end{cases}$$

por lo que

$$\mathcal{W}^\perp = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : -3x+y+2z=0,\ -3x-5y+t=0\}.$$

Obtenemos a continuación una base ortonormal de $\mathcal{W}$. Para ello empezamos por obtener una base ortogonal $\mathcal{O} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ donde $\mathbf{v}_1 = (-3, 1, 2, 0)$ y

$$\mathbf{v}_2 = (-3,-5,0,1) - \frac{\langle(-3,-5,0,1), \mathbf{v}_1\rangle}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\rangle}\mathbf{v}_1 = (-3,-5,0,1) - \frac{2}{7}(-3,1,2,0) = \left(-\frac{15}{7}, -\frac{37}{7}, -\frac{4}{7}, 1\right),$$

y la base ortonormal es $\mathcal{N} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ donde

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{||\mathbf{v}_1||}\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{14}}{14}(-3,1,2,0) = \left(-\frac{3\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{7}, 0\right),$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{||\mathbf{v}_2||}\mathbf{v}_2 = \frac{\sqrt{1659}}{237}\left(-\frac{15}{7}, -\frac{37}{7}, -\frac{4}{7}, 1\right).$$

La proyección ortogonal de $(0,0,0,1)$ sobre $\mathcal{W}$ es

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(0,0,0,1) &= \left\langle (0,0,0,1), \frac{\sqrt{14}}{14}(-3,1,2,0)\right\rangle \frac{\sqrt{14}}{14}(-3,1,2,0) \\
&\quad + \left\langle (0,0,0,1), \frac{\sqrt{1659}}{237}\left(-\frac{15}{7}, -\frac{37}{7}, -\frac{4}{7}, 1\right)\right\rangle \frac{\sqrt{1659}}{237}\left(-\frac{15}{7}, -\frac{37}{7}, -\frac{4}{7}, 1\right) \\
&= \frac{1659}{56169}\left(-\frac{15}{7}, -\frac{37}{7}, -\frac{4}{7}, 1\right).
\end{aligned}$$

Determinar de una forma razonada la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Todo valor propio de una matriz cuadrada tal que su subespacio propio asociado tiene dimensión uno es una raíz de multiplicidad uno del polinomio característico de dicha matriz.

(b) La intersección de dos subespacios vectoriales es un subespacio vectorial.

(c) Toda matriz diagonalizable es simétrica.

(d) Dados los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tales que $\mathbf{u}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$. ¿Es cierto que $\mathbf{u}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$?

(e) Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada. Si $|\mathbf{A}^4| = 0$, entonces 0 es un valor propio de $\mathbf{A}$.

Solución. (a) Falso. Basta considerar la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

cuyo polinomio característico es

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2,$$

por lo que su único valor propio es 1 que tendrá multiplicidad dos. Sin embargo

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\},$$

que tiene obviamente dimensión uno.

(b) Teoría.

(c) Falso. La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

cuyo polinomio característico es

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 \\ 1 & 2-t \end{vmatrix} = (1-t)(2-t),$$

tiene claramente dos valores propios, 1 y 2, y por tanto es diagonalizable aunque no es simétrica.

(d) Falso. Consideremos $\mathbb{R}^2$ con el producto euclídeo usual y sean $\mathbf{u} = (1, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1)$ y $\mathbf{w} = (-1, 0)$. Es fácil ver que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0,$$

y sin embargo

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = -1.$$

(e) Verdadero. Dado que $|\mathbf{A}^4| = |\mathbf{A}|^4 = 0$, tenemos que $|\mathbf{A}| = 0$. Pero entonces si $p(t)$ es el polinomio característico de $\mathbf{A}$ se verifica que

$$p(0) = |\mathbf{A} - 0\mathbf{I}_n| = |\mathbf{A}| = 0,$$

por lo que 0 es raiz del polinomio característico y por tanto valor propio de $\mathbf{A}$.

Capítulo 8

4–9–2001

Enunciado

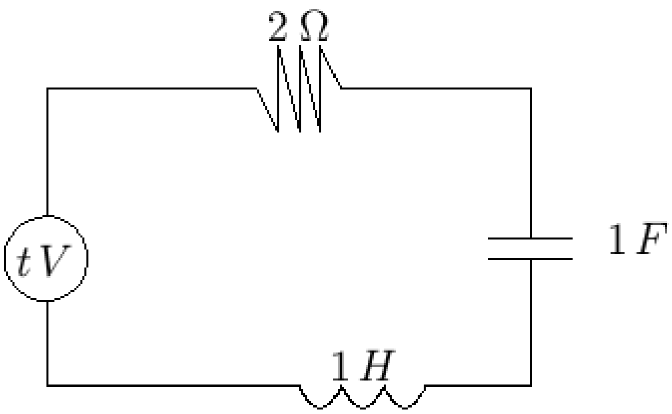
1. Resolver las siguientes cuestiones:

   (a) **(1 punto)** Hallar la curva ortogonal a la familia de curvas dada por la ecuación diferencial
   $$1 + y^2 = x^2 + cx$$
   que pasa por el punto $(1, 1)$.

   (b) **(1 punto)** Resolver la ecuación
   $$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2$$
   sabiendo que tiene una solución particular polinómica de grado uno.

   (c) **(1 punto)** Resolver la ecuación lineal
   $$y^{4)} - y = 8e^x.$$

2. **(2 puntos)** Resolver el siguiente circuito de la figura suponiendolo inicialmente descargado $[i(0) = i'(0) = 0]$ y dibujar el diagrama de fases del sistema de orden uno homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas deducido a partir de la ecuación.



3. Deducir la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) **(1 punto)** El problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

tiene solución única.

(b) **(1 punto)** El sistema

$$\begin{cases} x' = 2x + y^2, \\ y' = x + y, \end{cases}$$

tiene un punto crítico en $(0,0)$ el cual es estable.

(c) **(1 punto)** La función $V(x,y) = x^2 + y^2$ es una función de Lyapunov para el $(0,0)$, punto crítico del sistema

$$\begin{cases} x' = -x + xy^2, \\ y' = -x^2 y. \end{cases}$$

4. **(2 puntos)** Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal de manera que una base de $\mathrm{Ker}(\mathbf{f} - \mathbf{i})$ es $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ y que $\mathbf{f}(0,2,1) = (1,1,0)$. Si denotamos por $\mathbf{A}$ la matriz de $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, determinar si $\mathbf{A}$ es o no diagonalizable. Hallar los valores propios y subespacios propios, y en caso afirmativo, la matriz diagonal asociada a $\mathbf{A}$.

5. **(1 punto)** En $\mathbb{R}^4$, con el producto escalar usual, obtener las ecuaciones del subespacio ortogonal de

$$\mathcal{V} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + t = 0,\ 2x + y - z + 3t = 0\}.$$

6. **(2 puntos)** Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de la base canónica es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$. Determinar si $\mathbf{A}$ es o no diagonalizable. Hallar $\mathrm{Ker}(\mathbf{f})$ e $\mathrm{Im}\,\mathbf{f}$.

Examen resuelto

Hallar la curva ortogonal a la familia de curvas dada por la ecuación diferencial

$$1 + y^2 = x^2 + cx$$

que pasa por el punto $(1, 1)$.

Solución. Derivamos ímplicitamente la familia de curvas

$$2yy' = 2x + c$$

y reemplazando y' por $-1/y'$ se tiene

$$-\frac{2y}{y'} - 2x = c,$$

y sustituyendo c en la ecuación original

$$2xy + (1 + y^2 + x^2)y' = 0.$$

Si $P(x, y) = 2xy$ y $Q(x, y) = 1 + y^2 + x^2$, se tiene que

$$2x = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 2x,$$

por lo que la ecuación es exacta y por tanto existe una función $f(x, y)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2xy, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 1 + x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Utilizando la primera condición tenemos

$$f(x, y) = \int 2xy dx = x^2 y + g(y),$$

y con la segunda

$$x^2 + g'(y) = 1 + x^2 + y^2,$$

de donde

$$g(y) = \int (1 + y^2) dy = y + \frac{y^3}{3},$$

y así $f(x, y) = x^2 y + y + \frac{y^3}{3}$, y la solución general es

$$x^2 y + y + \frac{y^3}{3} = c$$

y utilizando la condición inicial se tiene que $c = 7/3$ y por tanto la curva es

$$x^2 y + y + \frac{y^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

Resolver la ecuación
$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2$$
sabiendo que tiene una solución particular polinómica de grado uno.

Solución. Se trata de una ecuación autónoma, que tiene una solución particular de la forma $y_p(x) = Ax + B$, que derivándola, sustituyéndola y simplificando en la ecuación se tiene

$$(A^2 - 2A + 1)x^2 + (2AB - 2B)x + B^2 - A + 1 = 0,$$

de donde obtenemos el sistema
$$\left\{\begin{array}{l} A^2 - 2A + 1 = 0, \\ 2AB - 2B = 0, \\ B^2 - A + 1 = 0, \end{array}\right.$$
y se obtiene $A = 1$ y $B = 0$, esto es $y_p(x) = x$. Ahora se hace el cambio de variable dependiente $z = y - x$ y se tiene
$$z' = y' - 1 = x^2 - 2xy + y^2 = (y - x)^2 = z^2,$$
que se resuelve
$$\int \frac{z'(x)}{z(x)^2} dx = \int dx,$$
e integrando
$$-\frac{1}{z(x)} = x + c,$$
o equivalentemente
$$z(x) = -\frac{1}{x + c}$$
y deshaciendo el cambio
$$y(x) = \frac{x^2 + cx - 1}{x + c}.$$

Resolver la ecuación lineal
$$y^{4)} - y = 8e^x.$$

Solución. Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea

$$y^{4)} - y = 0,$$

que al resolver la ecuación característica

$$x^4 - x = 0,$$

que nos da 0 como solución y posteriormente por el método de Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

y de la ecuación resultante $x^2 + x + 1 = 0$ tenemos

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

de donde la solución de la ecaución homogénea es

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-t/2} \cos(t\sqrt{3}/2) + c_4 e^{-t/2} \sin(t\sqrt{3}/2).$$

Proponemos como solución particular de la ecuación no homogénea $y_p(x) = Axe^x$, y derivando cuatro veces

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= (Ax + A)e^x, \\ y_p''(x) &= (Ax + 2A)e^x, \\ y_p^{3)}(x) &= (Ax + 3A)e^x, \\ y_p^{4)}(x) &= (Ax + 4A)e^x, \end{aligned}$$

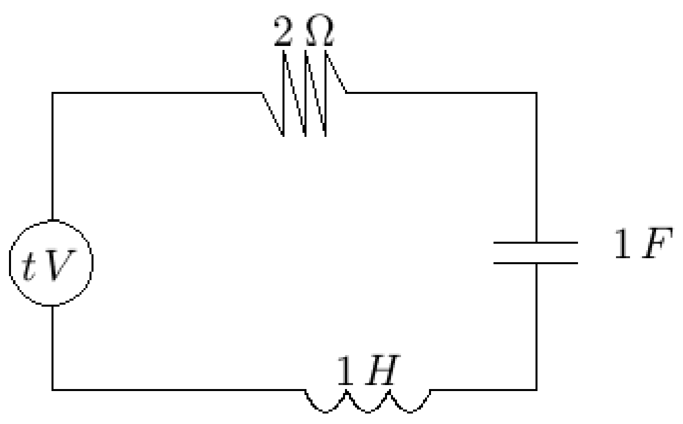
y sustituyendo y simplificando en la ecuación no homogénea

$$4Ae^x = 8e^x,$$

de donde $A = 2$ y la solución de la ecuación no homogénea es

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-t/2} \cos(t\sqrt{3}/2) + c_4 e^{-t/2} \sin(t\sqrt{3}/2) + 2xe^x.$$

Resolver el siguiente circuito de la figura suponiendolo inicialmente descargado $[i(0) = i'(0) = 0]$ y dibujar el diagrama de fases del sistema de orden uno homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas deducido a partir de la ecuación.



Solución. Sabemos que el voltaje generado se consume en cada elemento del circuito

$$V(t) = Li' + Ri + q/C,$$

donde q es la carga circulante, cuya derivada es la intensidad. Derivando la expresión anterior y sustituyendo los valores numéricos tenemos el sistema

$$1 = i'' + 2i' + i.$$

Resolvemos primero la ecuación homogénea a partir de la ecuación característica

$$t^2 + 2t + 1 = 0,$$

de donde

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1,$$

por lo que la solución de la ecuación homogénea es

$$i_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}.$$

Proponemos como solución particular de la ecuación no homogénea la función $i_p(t) = A$, cuyas derivadas son $i_p'(t) = i_p''(t) = 0$, y sustituyendo en la ecuación no homogénea y simplificando tenemos $A = 1$, por lo que la solución general de la ecuación no homogénea es

$$i(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + 1.$$

Derivamos la solución

$$i'(t) = (c_2 - c_1)e^{-t} - c_2 t e^{-t}$$

y utilizamos las condiciones iniciales para construir el sistema

$$\begin{cases} i(0) = 0 = c_1 + 1, \\ i'(0) = 0 = c_2 - c_1, \end{cases}$$

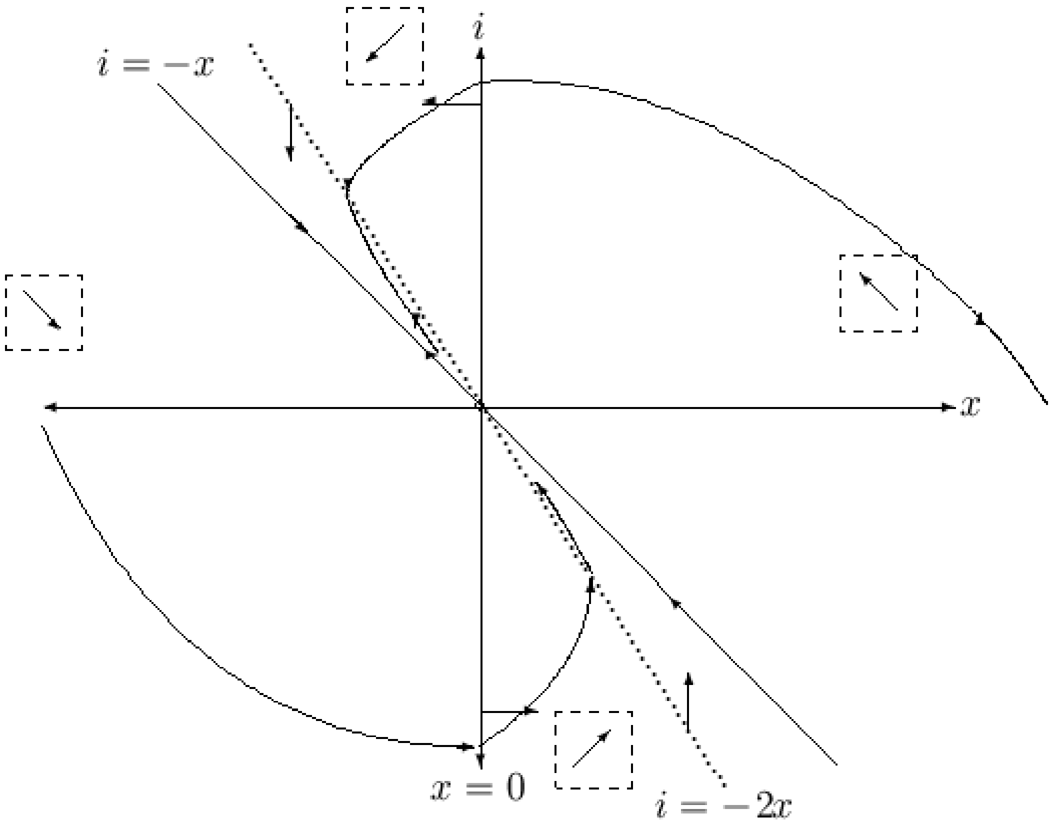
con lo que $c_1 = c_2 = -1$ y así la solución del problema condiciones iniciales es

$$i(t) = -(1+t)e^{-t} + 1.$$

Introducimos ahora la incógina $x = i'$ y construimos el sistema homogéneo

$$\begin{cases} i' = x, \\ x' = -i - 2x. \end{cases}$$

Es fácil ver que $(0,0)$ es el único punto crítico del mismo. Por otra parte, las isoclinas son las rectas $x = 0$ e $i = -2x$. En la primera tenemos que $i' = 0$ y $x' = -i$, por lo que el vector tangente sera paralelo al eje x y apuntará a la derecha si $i < 0$ y a la izquierda en caso contrario. En la segunda isoclina tenemos que $x' = 0$ e $i' = x$, por lo que el vector tangente será paralelo al eje i y apuntará hacia arriba si $x > 0$ y hacia abajo si $x < 0$. Finalmente, hemos visto anteriormente que -1 era el único valor propio del sistema, cuya recta de vectores propios será $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} + \mathbf{I}_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + i = 0\}$. Con toda esta información tenemos el siguiente diagrama de fases



> Deducir la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
>
> (a) El problema de condiciones iniciales
> $$\begin{cases} y' = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
> tiene solución única.
>
> (b) El sistema
> $$\begin{cases} x' = 2x + y^2, \\ y' = x + y, \end{cases}$$
> tiene un punto crítico en $(0,0)$ el cual es estable.
>
> (c) La función $V(x,y) = x^2+y^2$ es una función de Lyapunov para el $(0,0)$, punto crítico del sistema
> $$\begin{cases} x' = -x + xy^2, \\ y' = -x^2 y. \end{cases}$$

Solución. (a) Falso. La función

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

no está definida en el punto $(0,0)$.

(b) Es evidente que $(0,0)$ es punto crítico. La matriz jacobiana es

$$\mathbf{Jf}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2y \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

que particularizada en el punto crítico nos da

$$\mathbf{Jf}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios se calculan mediante la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 0 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = (2-t)(1-t) = 0,$$

y son 1 y 2, reales y positivos, por lo que $(0,0)$ es hiperbólico y aplicando el Teorema de Hartman–Grobman tenemos que dicho punto crítico es inestable. Así la afirmación es falsa.

(c) Vemos que

- $V(0,0) = 0$.
- $V(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$.
- $\dot{V}\,(x,y) = \langle \mathrm{grad}V(x,y), \mathbf{f}(x,y)\rangle = \langle (2x,2y), (-x+xy^2, -x^2y)\rangle = -2x^2 < 0.$

Así, V es una función de Lyapunov y $(0,0)$ es asintóticamente estable.

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que una base de $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}-\mathbf{i})$ es $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ y que $\mathbf{f}(0,2,1) = (1,1,0)$. Si denotamos por $\mathbf{A}$ la matriz de $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$, determinar si $\mathbf{A}$ es o no diagonalizable. Hallar los valores propios y subespacios propios, y en caso afirmativo, la matriz diagonal asociada a $\mathbf{A}$.

Solución. En primer lugar calculamos el rango de la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to_{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to_{F_3+2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

por lo que el rango es tres y $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,2,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(1,1,0) &= (1,1,0), \\ \mathbf{f}(1,0,1) &= (1,0,1), \\ \mathbf{f}(0,2,1) &= (1,1,0), \end{aligned}$$

por lo que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$. La matriz pedida

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}),$$

donde

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Calculamos la inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to_{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to_{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to_{\substack{\frac{1}{3}F_3 \\ (-1)F_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \to_{F_2 + 2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\to_{F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right),$$

por lo que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores propios mediante la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} - t & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - t & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} - t \end{vmatrix} = -t(t-1)^2 = 0,$$

por lo que los valores propios son 0 y 1.

Calculamos $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ a partir del sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que al resolverlo tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{array}\right) \to_{\substack{3F_1 \\ 3F_2 \\ 3F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to_{F_1 \times F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to_{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right),$$

de donde $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0,\ y = z\}$.

Dado que $\text{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3) = \text{Ker}(\mathbf{f} - \mathbf{i})$, se tiene que una base del mismo es $\mathcal{B}_{\text{Ker}(\mathbf{A}-\mathbf{I}_3)} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$, por lo que un vector $(x, y, z) \in \text{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3)$ si y sólo si existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$(x, y, z) = \lambda(1, 1, 0) + \mu(1, 0, 1),$$

y las ecuaciones paramétricas son por tanto

$$\left\{\begin{array}{l} x = \lambda + \mu, \\ y = \lambda, \\ z = \mu, \end{array}\right. \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Así pues, se trata de un sistema con solución por lo que calculando los rangos de sus matrices

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{array}\right) \to_{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y - x \\ 0 & 1 & z \end{array}\right) \to_{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y - x \\ 0 & 0 & z + y - x \end{array}\right),$$

tenemos que para que el rango de ambas matrices sea dos debe ocurrir que $z + y - x = 0$, por lo que $\text{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + y - x = 0\}$.

En $\mathbb{R}^4$, con el producto escalar usual, obtener las ecuaciones del subespacio ortogonal de

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + t = 0,\ 2x + y - z + 3t = 0\}.$$

Solución. Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de $\mathcal{V}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \to_{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

de donde las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{V}$ son

$$\left\{\begin{array}{l} x = -2\mu, \\ y = \lambda + \mu, \\ z = \lambda, \\ y = \mu, \end{array}\right. \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto $(x, y, z, t) = \lambda(0, 1, 1, 0) + \mu(-2, 1, 0, 1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y entonces una base de $\mathcal{V}$ es $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{(0, 1, 1, 0), (-2, 1, 0, 1)\}$.

Ahora, un vector $(x, y, z, t) \in \mathcal{V}^{\perp}$ si y sólo si

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = \langle (x, y, z, t), (0, 1, 1, 0) \rangle = y + z, \\ 0 = \langle (x, y, z, t), (-2, 1, 0, 1) \rangle = -2x + y + t, \end{array}\right.$$

por lo que

$$\mathcal{V}^{\perp} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y + z = 0,\ -2x + y + t = 0\}.$$

Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de la base canónica es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$. Determinar si $\mathbf{A}$ es o no diagonalizable. Hallar $\mathrm{Ker}(\mathbf{f})$ e $\mathrm{Im}\,\mathbf{f}$.

Solución. La matriz pedida es

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y $\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})]^{-1}$, que calculamos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to_{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to_{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to_{\substack{F_1-F_2 \\ F_1+F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to_{(-1)F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right),$$

por lo que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

y entonces

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para ver si $\mathbf{A}$ es diagonalizable planteamos la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ -1 & -t & 1 \\ 3 & 0 & -t \end{vmatrix} = t^2(1-t) = 0,$$

de donde sus valores propios son 0, de multiplicidad dos, y 1. La matriz será diagonalizable si $\dim \mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \dim \mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = 2$. Para ver esto, calculamos $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ mediante el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde obtenemos fácilmente que $x = z = 0$ y por tanto $\operatorname{Ker}(\mathbf{A}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z = 0\}$. Sus ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = 0, \end{cases}$$

por lo que $(x, y, z) = \lambda(0, 1, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y por lo tanto una base del núcleo será $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker}(\mathbf{A})} = \{(0, 1, 0)\}$, y así $\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{A}) = 1$ y la matriz $\mathbf{A}$ no es diagonalizable.

Por último, calculamos la imagen de $\mathbf{f}$. Para ello, sabemos que $(x, y, z) \in \operatorname{Im} \mathbf{f}$ si y sólo si existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tal que el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

tiene solución. Entonces, si calculamos los rangos de las matrices del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ -1 & 0 & 1 & y \\ 3 & 0 & 0 & z \end{array}\right) \to_{\substack{F_2+F_1 \\ F_3-3F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & y+x \\ 0 & 0 & 0 & z-3x \end{array}\right),$$

tenemos que para que los rangos de ambas matrices sean dos debe verificarse que $z - 3x = 0$, de donde

$$\operatorname{Im} \mathbf{f} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - 3x = 0\}.$$

Capítulo 9

29–11–2001

Enunciado

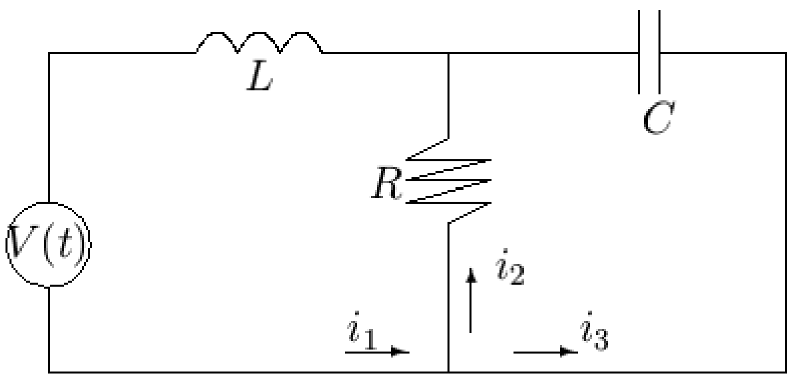
1. Resolver las siguientes cuestiones:

   (a) **(1 punto)** Hallar la familia ortogonal a la familia de curvas dada por la ecuación diferencial
   $$x^3 - 3xy^2 = c^2.$$

   (b) **(1 punto)** Resolver la ecuación
   $$x^3 y''' + 2x^2 y'' = x + \sin(\log x).$$

   (c) **(1 punto)** Demostrar que la ecuación
   $$xy' = y - x^2 - y^2$$
   tiene un factor integrante de la forma
   $$\mu(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2},$$
   y utilizar éste para obtener la solución de la ecuación diferencial que pasa por el punto $y(0) = 1$.

2. **(2 puntos)** Dado el circuito eléctrico de la figura



se pide

(a) Demostrar que éste puede ser modelizado por las ecuaciones

$$\begin{cases} L\dfrac{di_1}{dt} + Ri_2 = V(t), \\ RC\dfrac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0. \end{cases}$$

(b) Si $V(t) = 60\,V$, $L = 0.5\,H$, $R = 50\,\Omega$ y $C = 10^{-4}\,F$, resolver el sistema anterior y calcular $\lim_{t\to+\infty} i_j(t)$ para $j = 1, 2, 3$.

(c) Esbozar el diagrama de fases del sistema anterior cuando $V(t) = 0\,V$.

3. **(2.5 puntos)** Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal dada por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (2x - 2y, -x + 3y, (\alpha - 1)x + (\alpha - 1)y + \alpha z),$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Se pide:

(a) Calcular α para que $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) \neq \{(0, 0, 0)\}$.

(b) Hallar $\mathrm{Im}\,\mathbf{f}$ en función del parámetro α.

(c) Comprobar, para el valor de α obtenido en el primer apartado, si la matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es o no diagonalizable, hallando en caso afirmativo su forma diagonal junto con las matrices de cambio de base.

4. **(2.5 puntos)** En $\mathbb{R}^4$, con el producto escalar usual, obtener las ecuaciones implícitas del subespacio ortogonal de

$$\mathcal{W} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = t,\ y = z\right\}.$$

Calcular la matriz asociada a la base canónica de $\mathbb{R}^4$ de la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que verifica que $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \mathcal{W}$ y todos los vectores del subespacio ortogonal de $\mathcal{W}$ son vectores propios asociados al valor propio 3.

Examen resuelto

Hallar la familia ortogonal a la familia de curvas dada por la ecuación diferencial

$$x^3 - 3xy^2 = c^2.$$

Solución. Derivamos implícitamente la ecuación

$$3x^2 - 3y^2 - 6xyy' = 0,$$

y reemplazando y' por $-1/y'$ obtenemos la ecuación diferencial de la familia ortogonal

$$6xy + (3x^2 - 3y^2)y' = 0.$$

Sean $P(x,y) = 6xy$ y $Q(x,y) = 3x^2 - 3y^2$. Entonces

$$6x = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 6x,$$

por lo que la ecuación es exacta y existe $f(x,y)$ tal que

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 6xy, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 3x^2 - 3y^2, \end{array}$$

y usando la primera condición

$$f(x,y) = \int 6xydx = 3x^2y + g(y).$$

Usando la segunda condición

$$3x^2 + g'(y) = 3x^2 - 3y^2,$$

por lo que

$$g(y) = \int -3y^2dy = -y^3.$$

Así $f(x,y) = 3x^2y - y^3$ y la familia ortogonal es

$$3x^2y - y^3 = c.$$

Resolver la ecuación

$$x^3y''' + 2x^2y'' = x + \sin(\log x).$$

Solución. Se trata de una ecuación de Cauchy–Euler que con el cambio $x = e^t$ y denotando por $\dot{y}$ la derivada de y respecto de la variable t se verifica

$$y' = \dot{y}\,\frac{dt}{dx} = \dot{y}\,\frac{1}{x} = \dot{y}\,e^{-t},$$

$$y'' = \frac{d}{dt}(\dot{y}\ e^{-t})\frac{dt}{dx} = \ddot{y}\ e^{-2t} - \dot{y}\ e^{-2t},$$

y

$$y''' = \frac{d}{dt}(\ddot{y}\ e^{-2t} - \dot{y}\ e^{-2t})\frac{dt}{dx} = \dddot{y}\ e^{-3t} - 3e^{-3t}\ \ddot{y} + 2e^{-3t}\ \dot{y}$$

y sustituyendo en la ecuación y simplificando tenemos

$$\dddot{y} - \ddot{y} = e^t + \sin t.$$

Resolvemos primero la ecuación homogénea a partir de la ecuación característica

$$0 = t^3 - t^2 = t(t-1),$$

que nos da las soluciones 0, de multiplicidad dos, y 1, por lo que la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t.$$

Proponemos como solución particular $y_p(t) = Ate^t + B\cos t + C\sin t$, derivamos tres veces

$$\begin{aligned}
\dot{y}_p\ (t) &= (At + A)e^t - B\sin t + C\cos t,\\
\ddot{y}_p\ (t) &= (At + 2A)e^t - B\cos t - C\sin t,\\
\dddot{y}_p\ (t) &= (At + 3A)e^t + B\sin t - C\cos t,
\end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea y simplificando

$$Ae^t + (B + C)\sin t + (B - C)\cos t = e^t + \sin t,$$

de donde obtenemos el sistema

$$\begin{cases} A = 1,\\ B + C = 1,\\ B - C = 0,\end{cases}$$

y $A = 1$, $B = 1/2$ y $C = 1/2$. Entonces la solución de la ecuación no homogénea es

$$y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + te^t + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t.$$

Deshaciendo el cambio tenemos

$$y(x) = c_1 + c_2\log x + c_3 x + x\log x + \frac{1}{2}\cos(\log x) + \frac{1}{2}\sin(\log x).$$

Demostrar que la ecuación

$$xy' = y - x^2 - y^2$$

tiene un factor integrante de la forma

$$\mu(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2},$$

y utilizar éste para obtener la solución de la ecuación diferencial que pasa por el punto $y(0) = 1$.

Solución. Sean $P(x,y) = x^2+y^2-y$ y $Q(x,y) = x$. Planteamos la ecuación de factor integrante

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y)P(x,y)+\mu(x,y)\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y)Q(x,y)+\mu(x,y)\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

y poniendo los datos

$$-\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\mu'\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)(x^2+y^2-y)+\mu\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)(2y-1) = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\mu'\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)x+\mu\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

de donde

$$\frac{(1-y)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\mu'\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = (1-y)\mu\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

o haciendo $t = 1/(x^2+y^2)$ e integrando

$$\int \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}dt = \int \frac{1}{t}dt,$$

y así

$$\log \mu(t) = \log t,$$

y

$$\mu(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Entonces la ecuación

$$\frac{x^2+y^2-y}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2}y' = 0$$

es exacta y existe $f(x,y)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{x^2+y^2-y}{x^2+y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Integrando la primera condición

$$f(x,y) = \int \frac{x^2+y^2-y}{x^2+y^2}dx = \int \left(1-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx = x-\arctan\left(\frac{x}{y}\right)+g(y),$$

y derivando la anterior expresión y usando la segunda condición

$$\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}+g'(y),$$

de donde $g'(y) = 0$ y por tanto $g(y)$ es constante. Así una función $f(x,y) = x-\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$. Así la solución general de la ecuación es

$$x-\arctan\left(\frac{x}{y}\right) = c$$

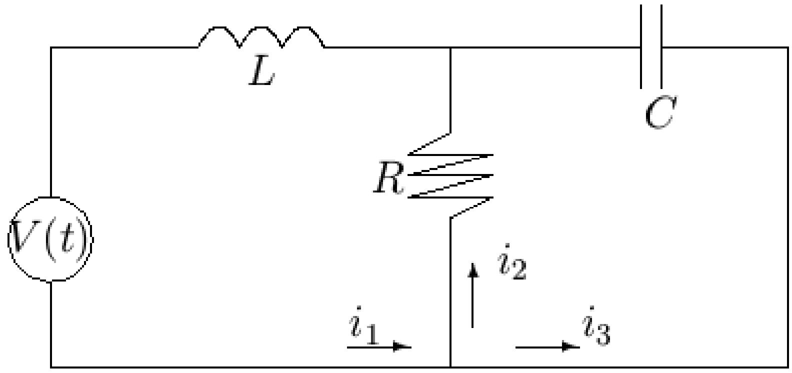
y utilizando las condiciones iniciales $c = 0$, por lo que la única solución es

$$x - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = 0,$$

o equivalentemente

$$y(x) = \frac{x}{\tan x}.$$

Dado el circuito eléctrico de la figura



se pide

(a) Demostrar que éste puede ser modelizado por las ecuaciones

$$\begin{cases} L\dfrac{di_1}{dt} + Ri_2 = V(t), \\ RC\dfrac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0. \end{cases}$$

(b) Si $V(t) = 60\,V$, $L = 0.5\,H$, $R = 50\,\Omega$ y $C = 10^{-4}\,F$, resolver el sistema anterior y calcular $\lim_{t\to+\infty} i_j(t)$ para $j = 1, 2, 3$.

(c) Esbozar el diagrama de fases del sistema anterior cuando $V(t) = 0\,V$.

Solución. (a) De la ley de los nudos se obtiene que

$$i_1 = i_2 + i_3.$$

Suponiendo ahora que la corriente gira en cada subcircuito en sentido contrario a las agujas del reloj, y teniendo en cuenta que el voltaje generado en cada subcircuito se consume en cada elemento del mismo se tienen las ecuaciones

$$V(t) = V_L + V_R,$$

para el subcircuito de la izquierda y

$$0 = V_C - V_R,$$

de donde substituyendo cada voltaje por su valor se tiene

$$\begin{cases} L\dfrac{di_1}{dt} + Ri_2 = V(t), \\ \dfrac{q_3}{C} - R\dfrac{di_2}{dt} = 0, \end{cases}$$

donde q_3 es la carga correspondiente a la intesidad i_3. Derivando la segunda ecuación y teniendo en cuenta que $i_3 = i_1 - i_2$ se consigue

$$\begin{cases} L\dfrac{di_1}{dt} + Ri_2 = V(t), \\ RC\dfrac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0. \end{cases}$$

(b) El sistema se escribe como

$$\begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -100 \\ 200 & -200 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} -t & -100 \\ 200 & -200 - t \end{vmatrix} = t^2 + 200t + 20000 = 0,$$

con lo que

$$t = \frac{-200 \pm \sqrt{40000 - 80000}}{2} = -100 \pm 100i.$$

Calculamos a_1 y a_2,

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{a_1}{t + 100 - i100} + \frac{a_2}{t + 100 + i100} = \frac{(a_1 + a_2)t + a_1(100 + i100) + a_2(100 - i100)}{p(t)},$$

de donde igualando coeficientes obtenemos el sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ a_1(100 + i100) + a_2(100 - i100) = 1, \end{cases}$$

y al resolverlo $a_1 = -a_2 = 1/i200$. Por otra parte

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t + 100 - i100} = t + 100 + i100, \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{t + 100 + i100} = t + 100 - i100. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^{t(-100+100i)} a_1(\mathbf{A}) \cdot q_1(\mathbf{A}) + e^{t(-100-100i)} a_2(\mathbf{A}) \cdot q_2(\mathbf{A}) \\ &= \frac{e^{-100t}}{200i} \left(e^{t100i}(\mathbf{A} + (100 + i100)\mathbf{I}_2) - e^{-t100i}(\mathbf{A} + (100 - i100)\mathbf{I}_2) \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^{-100t}}{200i}\left(e^{t100i}\begin{pmatrix} 100+100i & -100 \\ 200 & -100+100i \end{pmatrix} - e^{-t100i}\begin{pmatrix} 100-100i & -100 \\ 200 & -100-100i \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{e^{-100t}}{2i}\begin{pmatrix} e^{t100i}-e^{-t100i}+i(e^{t100i}+e^{-t100i}) & -e^{t100i}+e^{-t100i} \\ 2(e^{t100i}-e^{-t100i}) & -e^{t100i}+e^{-t100i}+i(e^{t100i}+e^{-t100i}) \end{pmatrix} \\
&= e^{-100t}\begin{pmatrix} \sin(100t)+\cos(100t) & -\sin(100t) \\ 2\sin(100t) & \cos(100t)-\sin(100t) \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

por lo que la solución del sistema homogéneo es

$$
\begin{pmatrix} i_{1,h}(t) \\ i_{2,h}(t) \end{pmatrix} = e^{t\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.
$$

Proponemos una solución particular de la forma $i_{1,p}(t) = A$ e $i_{2,p}(t) = B$, derivando, sutituyendo en el sistema no homogéneo tenemos

$$
\begin{cases} 0 = -100B + 120, \\ 0 = 200A - 200B, \end{cases}
$$

por lo que $A = B = 6/5$ y la solución del sistema es

$$
\begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix} = e^{-100t}\begin{pmatrix} \sin(100t)+\cos(100t) & -\sin(100t) \\ 2\sin(100t) & \cos(100t)-\sin(100t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}.
$$

Entonces

$$
\lim_{t\to\infty} i_1(t) = \lim_{t\to\infty} i_2(t) = \frac{6}{5}
$$

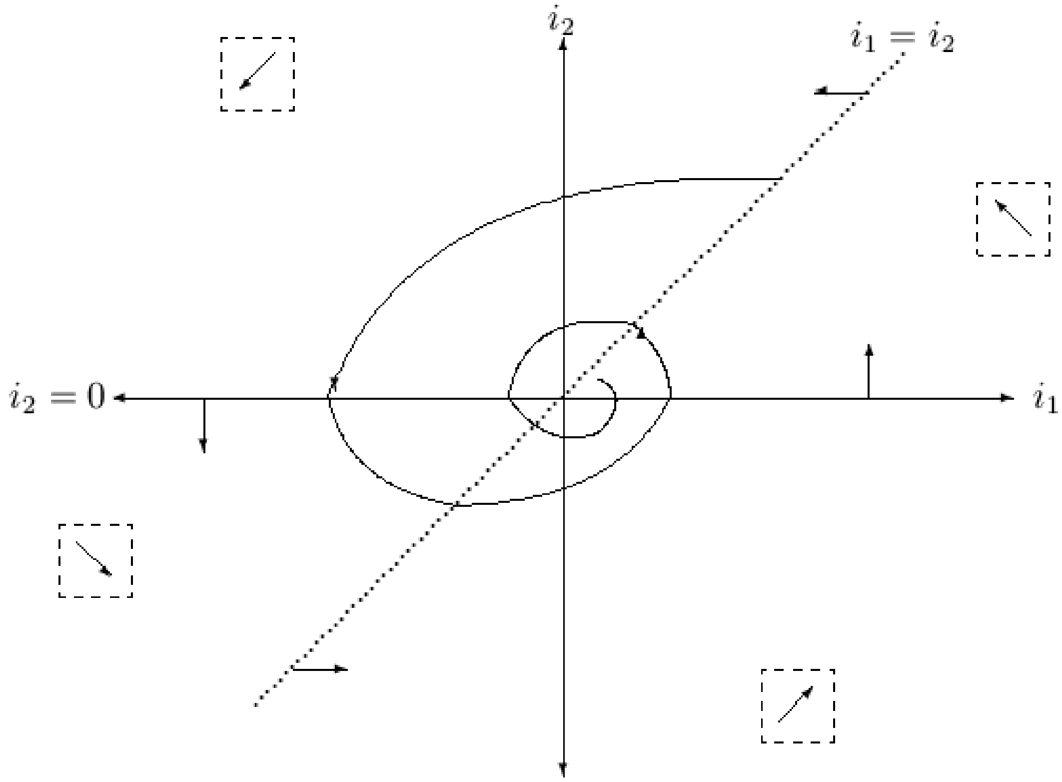
y

$$
\lim_{t\to\infty} i_3(t) = \lim_{t\to\infty} i_1(t) - \lim_{t\to\infty} i_2(t) = 0.
$$

(c) El sistema es

$$
\begin{cases} i_1' = -100 i_2, \\ i_2' = 200 i_1 - 200 i_2. \end{cases}
$$

Es sencillo ver que $(0,0)$ es el único punto crítico del mismo, y que las isoclinas son las rectas $i_2 = 0$ e $i_1 = i_2$. En la primera tenemos que $i_1' = 0$ e $i_2' = 200i_1$, por lo que el vector tangente será paralelo al eje i_2 y apuntará hacia arriba si $i_1 > 0$ y hacia abajo en caso contrario. Respecto a la segunda isoclina tenemos que $i_1' = -100i_2$ e $i_2' = 0$, por lo que el vector tangente será paralelo al eje i_1 y apuntará a la derecha si $i_2 < 0$ y a la izquierda en el otro caso. En cuanto a los valores propios, tenemos que éstos son complejos conjugados con parte real negativa, por lo que el diagrama de fases será aproximadamente



Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal dada por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (2x - 2y, -x + 3y, (\alpha - 1)x + (\alpha - 1)y + \alpha z),$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Se pide:

(a) Calcular α para que $\operatorname{Ker}(\mathbf{f}) \neq \{(0, 0, 0)\}$.

(b) Hallar $\operatorname{Im} \mathbf{f}$ en función del parámetro α.

(c) Comprobar, para el valor de α obtenido en el primer apartado, si la matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es o no diagonalizable, hallando en caso afirmativo su forma diagonal junto con las matrices de cambio de base.

Solución. (a) Si $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$, se tiene

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ \alpha - 1 & \alpha - 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Entonces el núcleo se calcula a partir del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ \alpha - 1 & \alpha - 1 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+\frac{1-\alpha}{2}F_1]{F_2+\frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha-2 & \alpha & 0 \end{array}\right) \rightarrow_{F_3-(\alpha-1)F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{array}\right),$$

por lo que el rango de la matriz del sistema será 3, y por lo tanto $\operatorname{Ker}(\mathbf{f}) = \{(0,0,0)\}$, si y sólo si $\alpha \neq 0$. Así para que $\operatorname{Ker}(\mathbf{f}) \neq \{(0,0,0)\}$ ha de verificarse que $\alpha = 0$.

(b) Si $\alpha \neq 0$, entonces $\dim \operatorname{Im} \mathbf{f} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker}(\mathbf{f}) = 3 - 0 = 3$, por lo que $\operatorname{Im} \mathbf{f} = \mathbb{R}^3$. Así, supongamos que $\alpha = 0$. Un vector $(x,y,z) \in \operatorname{Im} \mathbf{f}$ si y sólo existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ ta que si el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

tiene solución. Si calculamos los rangos de las matrices del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & x \\ -1 & 3 & 0 & y \\ -1 & -1 & 0 & z \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+\frac{1}{2}F_1]{F_2+\frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 & y+\frac{1}{2}x \\ 0 & -2 & 0 & z+\frac{1}{2}x \end{array}\right) \rightarrow_{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 & y+\frac{1}{2}x \\ 0 & 0 & 0 & z+y+x \end{array}\right),$$

por lo que los rangos coinciden si y sólo si $x+y+z=0$, de donde

$$\operatorname{Im} \mathbf{f} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}.$$

(c) Calculamos los valores propios de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mediante la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -2 & 0 \\ -1 & 3-t & 0 \\ -1 & -1 & -t \end{vmatrix} = -t(t^2-5t+4) = 0,$$

de donde 0 es una solución y las otras dos son

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2},$$

esto es 4 y 1. Al ser los tres valores propios distintos la matriz es diagonalizable.

Calculamos los subespacios propios empezando por $\operatorname{Ker}(\mathbf{A}) = \operatorname{Ker}(\mathbf{f})$, que vendrá dado por el sistema

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que al resolverlo nos da

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+\frac{1}{2}F_1]{F_2+\frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

con lo que $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$ y una base del mismo es $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(\mathbf{A})} = \{(0, 0, 1)\}$.

Para calcular $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}_3)$ planteamos el sistema

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow_{\substack{F_2 - \frac{1}{2}F_1 \\ F_3 - \frac{1}{2}F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right),$$

de donde $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}_3) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y,\ z = 0\}$ por lo que una base es $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}_3)} = \{(1, 1, 0)\}$.

Finalmente calculamos $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3)$ mediante el sistema

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cuya resolución

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow_{\substack{F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \end{array}\right),$$

nos depara que $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0,\ 3y + 4z = 0\}$, cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{8}{3}\lambda, \\ y = -\frac{4}{3}\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = \lambda, \end{array} \right.$$

por lo que $(x, y, z) = \frac{\lambda}{3}(8, -4, 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y por tanto una base es $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3)} = \{(8, -4, 3)\}$.

Entonces $\mathcal{B} = \{(0, 0, 1), (1, 1, 0), (8, -4, 3)\}$ es una base de vectores propios y

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1},$$

donde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

y calculando su inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow_{F_1 \times F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow_{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow_{\substack{F_2 + \frac{1}{3}F_3 \\ F_1 - \frac{1}{4}F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow_{\frac{1}{12}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & 0 \end{array}\right),$$

porlo que

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

En $\mathbb{R}^4$, con el producto escalar usual, obtener las ecuaciones implícitas del subespacio ortogonal de

$$\mathcal{W} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = t,\ y = z\right\}.$$

Calcular la matriz asociada a la base canónica de $\mathbb{R}^4$ de la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que verifica que $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \mathcal{W}$ y todos los vectores del subespacio ortogonal de $\mathcal{W}$ son vectores propios asociados al valor propio 3.

Solución. Las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{W}$ son

$$\begin{cases} x = \mu, \\ y = \lambda, \\ z = \lambda, \\ t = \mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

por lo que un vector de $\mathcal{W}$ es de la forma $(x, y, z, t) = \lambda(0, 1, 1, 0) + \mu(1, 0, 0, 1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y por lo tanto una base de $\mathcal{W}$ será $\mathcal{B}_{\mathcal{W}} = \{(0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$. Entonces $(x, y, z, t) \in \mathcal{W}^{\perp}$ si y sólo si

$$\begin{cases} 0 = \langle (x, y, z, t), (0, 1, 1, 0)\rangle = y + z, \\ 0 = \langle (x, y, z, t), (1, 0, 0, 1)\rangle = x + t, \end{cases}$$

de donde

$$\mathcal{W}^{\perp} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y + z = 0,\ x + t = 0\}.$$

Las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{W}^{\perp}$ son

$$\begin{cases} x = -\mu, \\ y = -\lambda, \\ z = \lambda, \\ t = \mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

por lo que $(x, y, z, t) = \lambda(0, -1, 1, 0) + \mu(-1, 0, 0, 1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y por lo tanto una base de $\mathcal{W}$ será $\mathcal{B}_{\mathcal{W}} = \{(0, -1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$.

La aplicación lineal buscada satisface las relaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(0, 1, 1, 0) &= (0, 0, 0, 0), \\ \mathbf{f}(1, 0, 0, 1) &= (0, 0, 0, 0), \\ \mathbf{f}(0, -1, 1, 0) &= (0, -3, 3, 0), \\ \mathbf{f}(-1, 0, 01) &= (-3, 0, 0, 3), \end{aligned}$$

por lo que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y $\mathcal{B} = \{(0,1,1,0),(1,0,0,1),(0,-1,1,0),(-1,0,0,1)\}$. La matriz pedida es

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}),$$

donde

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Haciendo los cálculos

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \times F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 - F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_4 - F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{\frac{1}{2}F_3 \\ \frac{1}{2}F_2}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{F_1 + F_3 \\ F_2 + F_4}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right),$$

por lo que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Capítulo 10

4–2–2002

Enunciado

1. **(2.5 puntos)** Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{f}(x, y, z) = (x + y - z, 2y, -x + y + z)$. Se pide:

   (a) Calcular la matriz asociada a $\mathbf{f}$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Hallar una base, dimensión y ecuaciones del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$.

   (c) Si denotamos por $\mathbf{A}$ la matriz obtenida en el primer apartado, demostrar que ésta es diagonalizable y calcular su potencia n–ésima.

2. **(2.5 puntos)** Consideremos $\mathbb{R}^4$ equipado con el producto escalar usual y sea

$$\mathcal{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0,\ x = y\}.$$

   Se pide:

   (a) Calcular el subespacio ortogonal a $\mathcal{W}$.

   (b) Hallar la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ de manera que $\mathcal{W} = \mathrm{Ker}(\mathbf{f})$ y $\mathcal{W}^\perp$ es un subespacio propio del valor propio -1.

3. **(2.5 puntos)** Se considera el espacio euclídeo $\mathcal{V}$ de las funciones reales continuas definidas sobre $[1, 2]$, con el producto escalar

$$\langle f, g\rangle := \int_1^2 f(x)g(x)dx.$$

   Se pide:

   (a) Hallar el ángulo entre $f(x) = 1$ y $g(x) = x$.

   (b) ¿Para qué valores de a son ortogonales los vectores $x - a$ y $x + a$?

   (c) Sea $\mathcal{W}$ el subespacio de los polinomios reales de grado menor o igual que 2. Ortonormalizar la base de dicho subespacio $\{1, x, x^2\}$.

   (d) ¿Cuál es el polinomio de grado menor o igual que 2 que mejor aproxima la función $f(x) = \log x$.

   (e) Enuncia y demuestra el Teorema de la mejor aproximación en espacios euclídeos.

4. **(2.5 puntos)** Responder a las siguientes cuestiones:

   (a) Probar que una aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ es inyectiva si y sólo si $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{\mathbf{0}\}$.

   (b) Probar que si $\dim \mathcal{V}$ es finita, entonces una aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ es inyectiva si y sólo si es suprayectiva.

   (c) Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual que 2. Consideremos la aplicación

   $$\mathbf{T} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$$

   definida por

   $$\mathbf{T}(p(x)) := \frac{d}{dx}\left((ax+b)p(x)\right)$$

   con a y b constantes reales. Se pide:

   (i) Probar que $\mathbf{T}$ es lineal.

   (ii) Hallar la matriz asociada a $\mathbf{T}$ en la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$.

   (iii) ¿Es diagonalizable la matriz obtenida en el apartado anterior?

Examen resuelto

Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{f}(x, y, z) = (x + y - z, 2y, -x + y + z)$. Se pide:

(a) Calcular la matriz asociada a $\mathbf{f}$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) Hallar una base, dimensión y ecuaciones del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$.

(c) Si denotamos por $\mathbf{A}$ la matriz obtenida en el primer apartado, demostrar que ésta es diagonalizable y calcular su potencia n–ésima.

Solución. (a) Si denotamos por $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Empezamos calculando el núcleo mediante el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to_{F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

de donde obtenemos que $\operatorname{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0,\ x = z\}$. Las ecuaciones paramétricas del núcleo son

$$\begin{cases} x = \lambda, \\ y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^3, \\ z = \lambda, \end{cases}$$

por lo que $(x, y, z) = \lambda(1, 0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}^3$, y entonces una base es $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker}(\mathbf{f})} = \{(1, 0, 1)\}$. Así $\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{f}) = 1$.

Calculamos ahora la imagen. Para ello démonos cuenta que $(x, y, z) \in \operatorname{Im} \mathbf{f}$ si y sólo si existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

por lo que al calcular los rangos de las matrices del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & 2 & 0 & y \\ -1 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \to_{F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & 2 & 0 & y \\ 0 & 2 & 0 & z + x \end{array}\right) \to_{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & 2 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & z + x - y \end{array}\right),$$

y ambos rangos son iguales si $x - y + z = 0$, y entonces $\operatorname{Im}\mathbf{f} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$. Las ecuaciones paramétricas son

$$\left\{ \begin{array}{r} x = \lambda - \mu, \\ y = \lambda, \\ z = \mu, \end{array} \right. \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}^3,$$

y así $(x, y, z) = \lambda(1, 1, 0) + \mu(-1, 0, 1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^3$ y una base es $\mathcal{B}_{\operatorname{Im}\mathbf{f}} = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ y la dimensión es dos.

(c) Calculamos los valores propios de la matriz mediante la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & -1 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -1 & 1 & 1-t \end{vmatrix} = -t(t-2)^2 = 0,$$

de donde los valores propios son 2, de multiplicidad dos, y 0. La matriz será diagonalizable si $\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3) = 2$. Calculamos entonces las ecuaciones de este subespacio propio mediante el sistema

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que nos da $\operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\} = \operatorname{Im}\mathbf{f}$, por lo que $\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3) = 2$ y una base es $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker}(\mathbf{A}-2\mathbf{I}_3)} = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$. Por tanto la matriz es diagonalizable. Como $\operatorname{Ker}(\mathbf{A}) = \operatorname{Ker}(\mathbf{f})$ y una base es $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker}(\mathbf{f})} = \{(1, 0, 1)\}$, se tiene que $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 0, 1)\}$ es una base de vectores propios. Entonces

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1},$$

donde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y calculando su inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 - F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 - F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\frac{1}{2}F_3}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{F_2+F_3\\F_1-F_3}}{\longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1+F_2}{\longrightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right),$$

de donde

$$\mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^n &= \mathbf{P}\cdot\mathbf{D}^n\cdot\mathbf{P}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Consideremos $\mathbb{R}^4$ equipado con el producto escalar usual y sea

$$\mathcal{W}=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+y+z+t=0,\ x=y\}.$$

Se pide:

(a) Calcular el subespacio ortogonal a $\mathcal{W}$.

(b) Hallar la aplicación lineal $\mathbf{f}:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ de manera que $\mathcal{W}=\mathrm{Ker}(\mathbf{f})$ y $\mathcal{W}^\perp$ es un subespacio propio del valor propio -1.

Solución. (a) Tomamos el sistema proporcionado por las ecuaciones de $\mathcal{W}$ y lo resolvemos

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\rightarrow_{F_2-F_1}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

de donde obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}\mu, \\ y=-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{2}\mu, \\ z=\lambda, \\ t=\mu, \end{array}\right. \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R},$$

y así $(x,y,z,t)=-\frac{\lambda}{2}(1,1,-2,0)-\frac{\mu}{2}(1,1,0,-2)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, por lo que una base de $\mathcal{W}$ es $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}=\{(1,1,-2,0),(1,1,0,-2)\}$.

Un vector $(x,y,z,t)\in\mathcal{W}^\perp$ si y sólo si

$$\left\{\begin{array}{l} 0=\langle(x,y,z,t),(1,1,-2,0)\rangle=x+y-2z, \\ 0=\langle(x,y,z,t),(1,1,0,-2)\rangle=x+y-2t, \end{array}\right.$$

por lo que $\mathcal{W}^\perp = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y-2z=0,\ x+y-2t=0\}$.

(b) Hallamos una base de $\mathcal{W}^\perp$ resolviendo el sistema formado a partir de las ecuaciones de $\mathcal{W}^\perp$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \to_{F_2-F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

de donde

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu, \\ y = \lambda, \\ z = \mu, \\ t = \mu, \end{array}\right. \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

así que $(x,y,z,t) = \lambda(-1,1,0,0)+\mu(2,0,1,1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, y una base es $\mathcal{B}_{\mathcal{W}^\perp} = \{(-1,1,0,0),(2,0,1,1)\}$. Entonces $\mathcal{B} = \{(1,1,-2,0),(1,1,0,-2),(-1,1,0,0),(2,0,1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

La aplicación lineal que debemos calcular cumple las siguientes condiciones

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{f}(1,1,-2,0) & = & (0,0,0,0), \\ \mathbf{f}(1,1,0,-2) & = & (0,0,0,0), \\ \mathbf{f}(-1,1,0,0) & = & (1,-1,0,0), \\ \mathbf{f}(2,0,1,1) & = & (-2,0,-1,-1), \end{array}$$

y entonces

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$. Entonces

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}),$$

donde

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

y calculando la inversa

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to_{\substack{F_2-F_1 \\ F_3+2F_1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to_{F_2\times F_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to_{F_3+F_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\xrightarrow[F_4+F_3]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow[\substack{F_3-2F_4 \\ F_2-\frac{1}{2}F_4 \\ F_1-F_4}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow[\substack{-\frac{1}{2}F_2 \\ -\frac{1}{2}F_3 \\ \frac{1}{2}F_4}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \\
&\xrightarrow[\substack{F_1+F_3 \\ F_1-F_2}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

por lo que

$$
\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

y

$$
\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.
$$

Entonces la aplicación lineal buscada es

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}(x,y,z,t) &= \left(\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right)^t \\
&= \left(\begin{pmatrix} -1 & -2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right)^t \\
&= \left(-x-2y-\frac{z}{2}-\frac{t}{2}, y-\frac{z}{2}-\frac{t}{2}, -\frac{1}{2}(x+y+z+t), -\frac{1}{2}(x+y+z+t)\right).
\end{aligned}
$$

Se considera el espacio euclídeo $\mathcal{V}$ de las funciones reales continuas definidas sobre $[1,2]$, con el producto escalar

$$\langle f, g\rangle := \int_1^2 f(x)g(x)dx.$$

Se pide:

(a) Hallar el ángulo entre $f(x) = 1$ y $g(x) = x$.

(b) ¿Para qué valores de a son ortogonales los vectores $x - a$ y $x + a$?

(c) Sea $\mathcal{W}$ el subespacio de los polinomios reales de grado menor o igual que 2. Ortonormalizar la base de dicho subespacio $\{1, x, x^2\}$.

(d) ¿Cuál es el polinomio de grado menor o igual que 2 que mejor aproxima la función $f(x) = \log x$.

(e) Enuncia y demuestra el Teorema de la mejor aproximación en espacios euclídeos.

Solución. (a) Dicho ángulo α verifica

$$\cos\alpha = \frac{\langle 1, x\rangle}{||1||\cdot||x||} = \frac{\int_1^2 xdx}{\sqrt{\int_1^2 dx}\sqrt{\int_1^2 x^2dx}} = \frac{3/2}{\sqrt{7/3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}},$$

de donde

$$\alpha = \arccos\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \approx 0.19.$$

(b) Imponemos la condición de ortogonalidad

$$0 = \langle x - a, x + a\rangle = \langle x, x\rangle - a^2\langle 1, 1\rangle = \frac{7}{3} - a^2,$$

de donde

$$a = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

(c) Caculamos en primer lugar una base ortogonal $\mathcal{O} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, donde $\mathbf{v}_1 = 1$ y

$$\mathbf{v}_2 = x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}1 = x - \frac{3}{2},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_3 &= x^2 - \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}1 - \frac{\left\langle x, x - \frac{3}{2}\right\rangle}{\left\langle x - \frac{3}{2}, x - \frac{3}{2}\right\rangle}\left(x - \frac{3}{2}\right) \\ &= x^2 - \frac{7}{3} - \left(x - \frac{3}{2}\right) = x^2 + x - \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

Obtenemos ahora la base ortonormal $\mathcal{N} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, donde

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{||\mathbf{v}_1||}\mathbf{v}_1 = 1,$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_2 &= \frac{1}{||\mathbf{v}_2||}\mathbf{v}_2 = \sqrt{12}\left(x - \frac{3}{2}\right), \\
\mathbf{u}_3 &= \frac{1}{||\mathbf{v}_3||}\mathbf{v}_3 = \sqrt{\frac{180}{1861}}\left(x^2 + x - \frac{5}{6}\right).
\end{aligned}$$

(d) Ese polinomio será la proyección ortogonal de $\log x$ sobre el subespacio $\mathcal{W}$ dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(\log x) &= \langle \log x, \mathbf{u}_1\rangle\, \mathbf{u}_1 + \langle \log x, \mathbf{u}_2\rangle\, \mathbf{u}_2 + \langle \log x, \mathbf{u}_3\rangle\, \mathbf{u}_3 \\
&= \langle \log x, 1\rangle\, 1 + \left\langle \log x, \sqrt{12}\left(x - \frac{3}{2}\right)\right\rangle \sqrt{12}\left(x - \frac{3}{2}\right) \\
&\quad + \left\langle \log x, \sqrt{\frac{180}{1861}}\left(x^2 + x - \frac{5}{6}\right)\right\rangle \sqrt{\frac{180}{1861}}\left(x^2 + x - \frac{5}{6}\right) \\
&= \langle \log x, 1\rangle + 12\left\langle \log x, x - \frac{3}{2}\right\rangle \left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{180}{1861}\left\langle \log x, x^2 + x - \frac{5}{6}\right\rangle \left(x^2 + x - \frac{5}{6}\right) \\
&= 2\log 2 - 1 + 3(3 - 4\log 2)\left(x - \frac{3}{2}\right) + 5\frac{108\log 2 - 5}{1861}\left(x^2 + x - \frac{5}{6}\right) \\
&= \frac{36770}{1861}\log 2 - \frac{80641}{5583} + \frac{1}{1861}(16624 - 21792\log 2)x + \frac{1}{1861}(540\log 2 - 125)x^2.
\end{aligned}$$

(e) Teoría.

Probar que una aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ es inyectiva si y sólo si $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{\mathbf{0}\}$.

Solución. Teoría.

Probar que si $\dim \mathcal{V}$ es finita, entonces una aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ es inyectiva si y sólo si es suprayectiva.

Solución. Si $\mathbf{f}$ es inyectiva, entonces $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{\mathbf{0}\}$ y por tanto $\dim \mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = 0$. Entonces

$$\dim \mathrm{Im}\, \mathbf{f} = \dim \mathcal{V} - \dim \mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \dim \mathcal{V}$$

y por lo tanto $\mathbf{f}$ es sobreyectiva.

Recíprocamente, si $\mathbf{f}$ es sobreyectiva, entonces $\mathrm{Im}\, \mathbf{f} = \mathcal{V}$, y por lo tanto $\dim \mathrm{Im}\, \mathbf{f} = \dim \mathcal{V}$. Entonce

$$\dim \mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \dim \mathcal{V} - \dim \mathrm{Im}\, \mathbf{f} = 0,$$

con lo que $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{\mathbf{0}\}$, y así $\mathbf{f}$ es inyectiva.

Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual que 2. Consideremos la aplicación

$$\mathbf{T} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$$

definida por

$$\mathbf{T}(p(x)) := \frac{d}{dx}\left((ax+b)p(x)\right)$$

con a y b constantes reales. Se pide:

(i) Probar que $\mathbf{T}$ es lineal.

(ii) Hallar la matriz asociada a $\mathbf{T}$ en la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$.

(iii) ¿Es diagonalizable la matriz obtenida en el apartado anterior?

Solución. (i) Sean $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(\alpha p(x) + \beta q(x)) &= \frac{d}{dx}\left((ax+b)(\alpha p(x) + \beta q(x))\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\alpha(ax+b)p(x) + \beta(ax+b)q(x)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\alpha(ax+b)p(x)\right) + \frac{d}{dx}\left(\beta(ax+b)q(x)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\alpha\left((ax+b)p(x)\right) + \beta\frac{d}{dx}\left((ax+b)q(x)\right) \\
&= \alpha\mathbf{T}(p(x)) + \beta\mathbf{T}(q(x)),
\end{aligned}$$

por lo que $\mathbf{T}$ es lineal.

(ii) Dado que

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(1) &= \frac{d}{dx}(ax+b) = a, \\
\mathbf{T}(x) &= \frac{d}{dx}\left(ax^2+bx\right) = 2ax+b, \\
\mathbf{T}(x^2) &= \frac{d}{dx}\left(ax^3+bx^2\right) = 3ax^2+2bx,
\end{aligned}$$

se tiene que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\mathbf{T}) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 2a & 2b \\ 0 & 0 & 3a \end{pmatrix}.$$

(iii) Calculamos los valores propios de l amatriz mediante la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} a-t & b & 0 \\ 0 & 2a-t & 2b \\ 0 & 0 & 3a-t \end{vmatrix} = (a-t)(2a-t)(3a-t) = 0,$$

de donde los valores propios son a, $2a$ y $3a$. Se distinguen entonces los siguientes casos:

- Si $a \neq 0$ los tres valores propios son distintos y por tanto la matriz es diagonalizable.

- Si $a = 0$ entonces hay un único valor propio 0 que tendrá multiplicidad tres. Para que la matriz sea diagonalizable el subespacio propio de 0 ha de tener dimensión 3. Supongamos que $p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ y calculamos entonces $\operatorname{Ker}(\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\mathbf{T}))$ mediante el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

  que nos proporciona los siguientes casos:

  - Si $b \neq 0$, entonces $\operatorname{Ker}(\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\mathbf{T})) = \{\gamma x^2 : \gamma \in \mathbb{R}\}$ y por tanto $\{x^2\}$ es una base del subespacio propio por lo que $\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\mathbf{T})) = 1$ y la matriz no es diagonalizable.
  - Si $b = 0$, la matriz es nula que trivialmente es diagonalizable.

Capítulo 11

4–6–2002

Enunciado

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales y problemas de condiciones iniciales:

   (a) **(1 punto)** $2x + y^2 + 2xyy' - e^y y' - (1 + y')\cos(x + y) = 0$.

   (b) **(1 punto)** $y' = x\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = y_0$, donde $y_0 \in (-1, 1)$.

   (c) **(2 puntos)** $x' = y + z$; $y' = x + z$; $z' = x + y$. Estudiar la estabilidad del punto crítico del sistema.

   (d) **(1.5 puntos)** $3x^2y'' + 11xy' - 3y = 8 - 3\log x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 4/3$.

2. Dado el sistema

$$\begin{cases} x' = y^2 - 3y + 2, \\ y' = (1 - x)(y - 2), \end{cases}$$

   se pide

   (a) **(2 puntos)** Obtener el diagrama de fases del mismo.

   (b) **(0.5 puntos)** ¿Son estables los puntos críticos aislados? ¿Son asintóticamente estables?

3. **(2 puntos)** Tenemos un tanque que contiene 1000 litros de agua pura. Vertemos en el mismo una solución de salmuera con una concentración de $1\,Kg/l$ a una velocidad de $6\,l/\min$. Si el agua mezclada sale del tanque a una velocidad de $7\,l/\min$, determinar la cantidad de sal que habrá en el tanque al cabo de 999 y 1001 minutos. ¿Te parecen razonables los resultados obtenidos? Razona tu respuesta.

Examen resuelto

> Resolver
> $$2x + y^2 + 2xyy' - e^y y' - (1 + y')\cos(x + y) = 0.$$

Solución. Reescribimos la ecuación como

$$2x + y^2 - \cos(x + y) + (2xy - e^y - \cos(x + y))y' = 0$$

y siendo $P(x, y) = 2x + y^2 - \cos(x + y)$ y $Q(x, y) = 2xy - e^y - \cos(x + y)$ se tiene que

$$2y + \sin(x + y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 2y + \sin(x + y),$$

por lo que la ecuación es exacta y existe $f(x, y)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x + y^2 - \cos(x + y), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2xy - e^y - \cos(x + y), \end{aligned}$$

e integrando respecto de x en la primera condición

$$f(x, y) = \int (2x + y^2 - \cos(x + y))dx = x^2 + xy^2 - \sin(x + y) + g(y),$$

y derivando esta expresión respecto de y y sustituyendo en la segunda condición

$$2xy - e^y - \cos(x + y) = 2xy - \cos(x + y) + g'(y),$$

de donde

$$g(y) = \int -e^y dy = -e^y$$

y por lo tanto $f(x, y) = x^2 + xy^2 - \sin(x + y) - e^y$. Entonces la solución general de la ecuación es

$$x^2 + xy^2 - \sin(x + y) - e^y = c.$$

> Resolver
> $$\begin{cases} y' = x\sqrt{1 - y^2}, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$
> donde $y_0 \in (-1, 1)$.

Solución. Resolvemos la ecuación que es de variables separadas integrando

$$\int \frac{y'(x)}{\sqrt{1 - y(x)^2}}dx = \int xdx,$$

de donde

$$\arcsin y(x) = \frac{x^2}{2} + c,$$

o equivalentemente

$$y(x) = \sin\left(\frac{x^2}{2} + c\right).$$

Utilizando la condición inicial

$$y(0) = y_0 = \sin c,$$

de donde

$$y(x) = \sqrt{1 - y_0^2}\sin\left(\frac{x^2}{2}\right) + y_0\cos\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Resolver $x' = y + z$; $y' = x + z$; $z' = x + y$. Estudiar la estabilidad del punto crítico del sistema.

Solución. Escribimos el sistema en foema matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores propios de dicha matriz con la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & -t \end{vmatrix} = -t^3 + 3t + 2 = 0,$$

y por el método de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & & 1 & -1 & 2 \\ \hline & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

y la ecuación restante $t^2 - 2t - 2 = 0$ nos da

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Calculamos a_1, a_2 y a_3 mediante

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(t)} &= \frac{a_1}{t+1} + \frac{a_2}{t-1-\sqrt{3}} + \frac{a_3}{t-1+\sqrt{3}} \\ &= \frac{(a_1+a_2+a_3)t^2 - (2a_1 + (2-\sqrt{3})a_2 + (2+\sqrt{3})a_3)t - 2a_1 + (1-\sqrt{3})a_2 + (1+\sqrt{3})a_3}{-p(t)}, \end{aligned}$$

e igualando coeficientes obtenemos el sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ 2a_1 + (2-\sqrt{3})a_2 + (2+\sqrt{3})a_3 = 0, \\ 2a_1 - (1-\sqrt{3})a_2 - (1+\sqrt{3})a_3 = 1, \end{cases}$$

y al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2-\sqrt{3} & 2+\sqrt{3} & 0 \\ 2 & \sqrt{3}-1 & -1-\sqrt{3} & 1 \end{array}\right) \quad \to_{\substack{F_2-2F_1 \\ F_3+F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 3 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 1 \end{array}\right) \to_{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to_{\frac{1}{\sqrt{3}}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to_{F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

de donde $a_1 = 1/3$, $a_2 = a_3 = -1/6$. Por otro lado

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t+1} = -t^2 + 2t + 2, \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{t-1-\sqrt{3}} = -t^2 + (2-\sqrt{3})t - 1 + \sqrt{3}, \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{t-1+\sqrt{3}} = -t^2 + (2+\sqrt{3})t - 1 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^{-t}a_1(\mathbf{A})\cdot q_1(\mathbf{A}) + e^{t(1+\sqrt{3})}a_2(\mathbf{A})\cdot q_2(\mathbf{A}) + e^{t(1-\sqrt{3})}a_3(\mathbf{A})\cdot q_3(\mathbf{A}) \\ &= \frac{e^{-t}}{3}(-\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_3) - \frac{e^{t(1+\sqrt{3})}}{6}(-\mathbf{A}^2 + (2-\sqrt{3})\mathbf{A} - (1-\sqrt{3})\mathbf{I}_3) \\ &\quad - \frac{e^{t(1-\sqrt{3})}}{6}(-\mathbf{A}^2 + (2+\sqrt{3})\mathbf{A} - (1+\sqrt{3})\mathbf{I}_3) \\ &= \frac{e^{-t}}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{e^{t(1+\sqrt{3})}}{6}\begin{pmatrix} 3-\sqrt{3} & \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}-1 & 3-\sqrt{3} & \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}-1 & 3-\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{e^{t(1-\sqrt{3})}}{6}\begin{pmatrix} -3-\sqrt{3} & \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}+1 \\ \sqrt{3}+1 & -3-\sqrt{3} & \sqrt{3}+1 \\ \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}+1 & -3-\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

donde

$$a = (3-\sqrt{3})\frac{e^{t(1+\sqrt{3})}}{6} + (3+\sqrt{3})\frac{e^{t(1-\sqrt{3})}}{6}$$

y

$$b = \frac{e^{-t}}{3} + (\sqrt{3}-1)\frac{e^{t(1+\sqrt{3})}}{6} - (\sqrt{3}+1)\frac{e^{t(1-\sqrt{3})}}{6}.$$

Así la solución del sistema es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Como el valor propio $1+\sqrt{3}$ es positivo, tenemos que el punto crítico $(0,0,0)$ es inestable.

Resolver

$$\begin{cases} 3x^2y'' + 11xy' - 3y = 8 - 3\log x, \\ y(1) = 1,\ y'(1) = 4/3. \end{cases}$$

Solución. Se trata de una ecuación de Cauchy–Euler que con el cambio $x = e^t$ y denotando por $\dot{y}$ la derivada de y respecto de t, se tiene

$$y' = \dot{y}\,\frac{dt}{dx} = \dot{y}\,\frac{1}{x} = \dot{y}\,e^{-t},$$

$$y'' = \frac{d}{dt}(\dot{y}\,e^{-t})\frac{dt}{dx} = \ddot{y}\,e^{-2t} - \dot{y}\,e^{-2t},$$

y entonces tenemos el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} 3\,\ddot{y} + 8\,\dot{y} - 3y = 8 - t, \\ y(0) = 1, y'(0) = 4/3. \end{cases}$$

Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea mediante la ecuación característica

$$3t^2 + 8t - 3 = 0,$$

de donde

$$t = \frac{-8 \pm \sqrt{64+36}}{6} = \frac{-8 \pm 10}{6}$$

por lo que las raíces son -3 y $1/3$ y la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^{t/3}.$$

Proponemos como solución de la ecuación no homogénea $y_p(t) = At + B$, de donde $y_p'(t) = A$ e $y_p''(t) = 0$ y sustituyendo y simplificando en la ecuación

$$-3At + 8A - 3B = 8 - t,$$

e igulando coeficientes tenemos el sistema

$$\begin{cases} -3A = -1, \\ 8A - 3B = 8, \end{cases}$$

que nos da $A = 1/3$ y $B = -16/9$ y la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^{t/3} + \frac{1}{3}t - \frac{16}{9}.$$

Derivando una vez
$$y'(t) = -3c_1 e^{-3t} + \frac{c_2}{3} e^{t/3} + \frac{1}{3},$$
y utilizando las condiciones iniciales
$$\begin{cases} y(0) = 1 = c_1 + c_2 - \frac{16}{9}, \\ y'(0) = \frac{4}{3} = -3c_1 + \frac{c_2}{3} + \frac{1}{3}, \end{cases}$$
de donde $c_1 = -2/90$ y $c_2 = 124/45$ y la solución del problema de condiciones iniciales es
$$y(t) = -\frac{2}{90} e^{-3t} + \frac{124}{45} e^{t/3} + \frac{1}{3} t - \frac{16}{9}.$$
Deshaciendo el cambio y simplificando
$$y(x) = -\frac{2}{90} \frac{1}{x^3} + \frac{124}{45} \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3} \log x - \frac{16}{9}.$$

Dado el sistema homogéneo
$$\begin{cases} x' = y^2 - 3y + 2, \\ y' = (1-x)(y-2), \end{cases}$$
se pide

(a) Obtener el diagrama de fases del mismo.

(b) ¿Son estables los puntos críticos aislados? ¿Son asintóticamente estables?

Solución. (a) Calculamos los puntos críticos mediante el sistema
$$\begin{cases} y^2 - 3y + 2 = 0, \\ (1-x)(y-2) = 0. \end{cases}$$
De la primera ecuación
$$y = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{1} = \frac{3 \pm 1}{1},$$
de donde las soluciones son $y = 2$ e $y = 1$. De la segunda ecuación tenemos trivialmente que $x = 1$ e $y = 2$, por lo que combinando ambas tenemos que $y = 2$ es una recta de puntos críticos y además $(1, 1)$ es un punto crítico aislado.

Las isoclinas son por tanto las rectas $y = 1$ y $x = 1$. En la primera vemos que $x' = 0$ e $y' = x-1$, por lo que el vector tangente es paralelo al eje y y apuntará hacia arriba si $x > 1$ y hacia abako en caso contrario. La segunda isoclina verifica que $y' = 0$ y $x' = y^2 - 3y + 2 = (y-2)(y-1)$, por lo que el vector tangente será paralelo al eje x y apuntará a la izquierda si $y \in (1, 2)$ y a la derecha en otro caso. Si $y > 2$, entonces $y' > 0$ si $x < 1$ e $y' < 0$ en otro caso.

Calculamos ahora las integrales primeras mediante la ecuación
$$y' = \frac{(1-x)(y-2)}{y^2 - 3y + 2} = -\frac{x-1}{y-1},$$
de donde integrando
$$\int (y(x) - 1) y'(x) dx = -\int (x-1) dx,$$

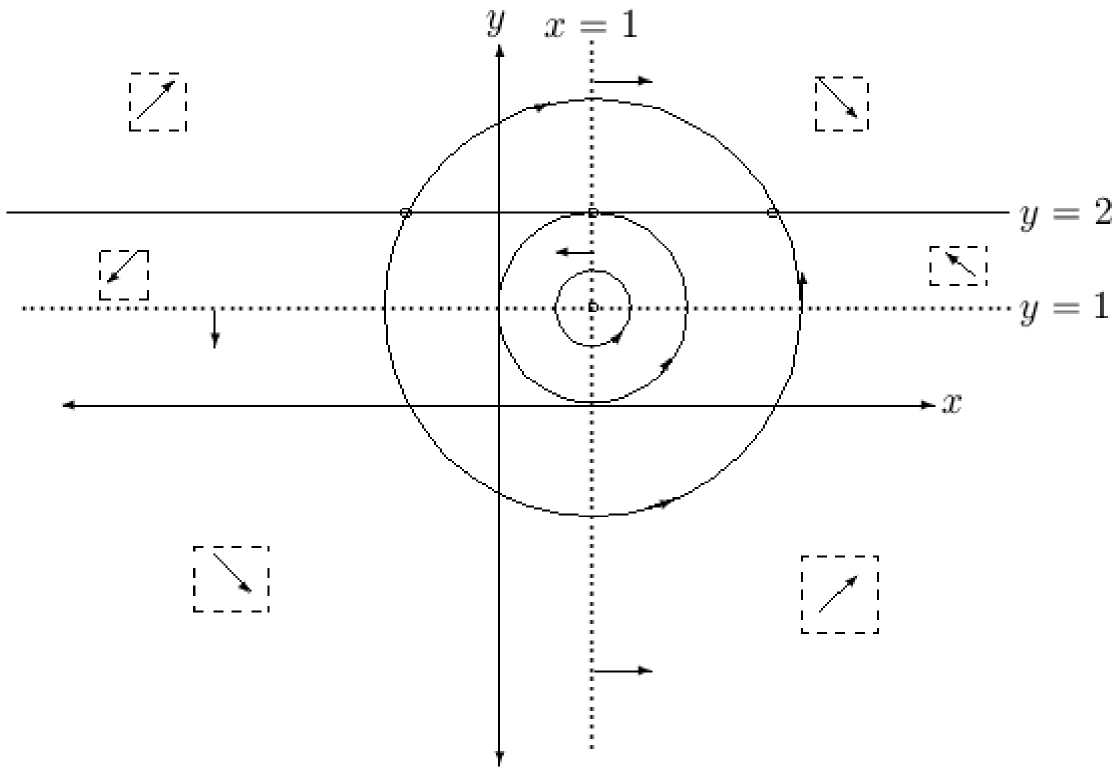
y así

$$\frac{(y-1)^2}{2} = -\frac{(x-1)^2}{2} + c,$$

que es la circunferencia de ecuación

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2c,$$

que no cortará a la recta de puntos críticos si $c < 1/2$, será tangente con dicha recta si $c = 1/2$ y será secante si $c > 1/2$. Con esta información tenemos el diagrama de fases



(b) A partir del diagrama de fases vemos que cerca del único punto crítico aislado $(1,1)$ las soluciones son periódicas, por lo que el punto crítico será estable. Como ninguna solución converge a $(1,1)$ por ser éstas periódicas, concluimos que no es asintóticamente estable.

Tenemos un tanque que contiene 1000 litros de agua pura. Vertemos en el mismo una solución de salmuera con una concentración de $1\,Kg/l$ a una velocidad de $6\,l/\min$. Si el agua mezclada sale del tanque a una velocidad de $7\,l/\min$, determinar la cantidad de sal que habrá en el tanque al cabo de 999 y 1001 minutos. ¿Te parecen razonables los resultados obtenidos? Razona tu respuesta.

Solución. Sea $x(t)$ la cantidad de sal en el tanque en el instante de tiempo t. Entonces

$$x'(t) = v_e - v_s,$$

donde v_e y v_s son la velocidad de entrada y salida de la sal. Como

$$v_e = 1 \cdot 6$$

y

$$v_s = 7 \cdot \frac{x(t)}{V(t)},$$

donde el volumen $V(t) = 1000 - t$. Así tenemos la ecuación

$$x' = 6 - 7\frac{x}{1000 - t}.$$

Resolvemos la ecuación homogénea

$$x' = -7\frac{x}{1000 - t}$$

integrando

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int -\frac{7}{1000 - t} dt,$$

de donde

$$\log x(t) = 7 \log(1000 - t) + c,$$

o equivalentemente

$$x(t) = k(1000 - t)^7, \ k = e^c.$$

Proponemos como solución de la ecuación no homogénea

$$x(t) = k(t)(1000 - t)^7,$$

y derivando

$$x'(t) = k'(t)(1000 - t)^7 - 7k(t)(1000 - t)^6,$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea y simplificando

$$k'(t)(1000 - t)^7 = 6,$$

y entonces

$$k(t) = \int \frac{6}{(1000 - t)^7} dt = \frac{1}{(1000 - t)^6} + c,$$

por lo que la solución general de la ecuación no homogénea es

$$x(t) = c(1000 - t)^7 + 1000 - t.$$

Como el agua al principio era pura se tiene que

$$x(0) = 0 = c1000^7 + 1000,$$

de donde $c = -1000^{-6} = -10^{-18}$. Así

$$x(t) = -10^{18}(1000 - t)^7 + 1000 - t.$$

Entonces

$$x(999) = -10^{-18} + 1 \approx 1.$$

No es posible calcular $x(1001)$ porque el tanque estará vacío.

Capítulo 12

14–6–2002

Enunciado

1. **(3 puntos)** Sea la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (-x + 3y - 3z, y, -3x + 3y - z).$$

   Se pide:

   (a) Calcular la matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

   (b) Utilizar el apartado anterior para calcular la matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Hallar el núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$.

   (d) ¿Es diagonalizable la matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica? En caso afirmativo hallar su forma diagonal.

   (e) Utilizar el ejercicio anterior para obtener la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   donde $\mathbf{A}$ es la matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

2. (**2 puntos**) Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el conjunto de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3. Se pide:

   (a) Demostrar que

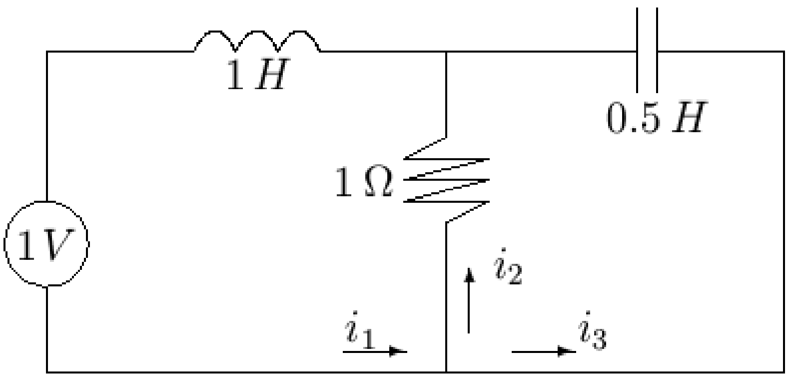
$$\langle p(x), q(x) \rangle := \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

   $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_3[x]$, es un producto escalar.

   (b) Hallar el subespacio ortogonal al subespacio vectorial $\mathcal{W}$ generado por $\{x, x - x^2\}$.

   (c) Hallar la proyección ortogonal de $x^3 + x^2 + x + 1$ sobre $\mathcal{W}$.

3. (**2 puntos**) Se considera el circuito de la figura



Calcular las intensidades i_1, i_2, e i_3 si inicialmente el circuito estaba descargado $[i_j(0) = 0]$.

4. **(1 punto)** Hallar la trayectoria ortogonal a la familia de curvas $x^2 - y^2 = kx$, $k \in \mathbb{R}$, que pasa por el punto $(1, 1)$.

5. (**2 puntos**) Obtener el diagrama de fases del sistema

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + y. \end{cases}$$

¿Es estable el punto crítico del sistema?

Examen resuelto

Sea la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (-x + 3y - 3z, y, -3x + 3y - z).$$

Se pide:

(a) Calcular la matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

(b) Utilizar el apartado anterior para calcular la matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(c) Hallar el núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$.

(d) ¿Es diagonalizable la matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica? En caso afirmativo hallar su forma diagonal.

(e) Utilizar el ejercicio anterior para obtener la solución del sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

donde $\mathbf{A}$ es la matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Solución. (a) Calculamos

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(1,1,1) &= (-1,1,-1) = a_{11}(1,1,1) + a_{21}(1,1,0) + a_{31}(1,0,0) \\ &= (a_{11} + a_{21} + a_{31}, a_{11} + a_{21}, a_{11}), \end{aligned}$$

de donde tenemos el sistema

$$\begin{cases} a_{11} + a_{21} + a_{31} = -1, \\ a_{11} + a_{21} = 1, \\ a_{11} = -1, \end{cases}$$

de donde $a_{11} = -1$, $a_{21} = 2$ y $a_{31} = -2$. Ahora

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(1,1,0) &= (2,1,0) = a_{12}(1,1,1) + a_{22}(1,1,0) + a_{32}(1,0,0) \\ &= (a_{12} + a_{22} + a_{32}, a_{12} + a_{22}, a_{12}), \end{aligned}$$

de donde tenemos el sistema

$$\begin{cases} a_{12} + a_{22} + a_{32} = 2, \\ a_{12} + a_{22} = 1, \\ a_{12} = 0, \end{cases}$$

de donde $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$ y $a_{32} = 1$. Finalmente

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(1,0,0) &= (-1,0,-3) = a_{13}(1,1,1) + a_{23}(1,1,0) + a_{33}(1,0,0) \\ &= (a_{13} + a_{23} + a_{33}, a_{13} + a_{23}, a_{13}), \end{aligned}$$

de donde tenemos el sistema
$$\begin{cases} a_{13} + a_{23} + a_{33} = -1, \\ a_{13} + a_{23} = 0, \\ a_{13} = -3, \end{cases}$$
y entonces $a_{13} = -3$, $a_{23} = 3$ y $a_{33} = -1$. La matriz es por tanto
$$\mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Si denotamos por $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$, la matriz pedida es
$$\mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}),$$
donde
$$\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
y $\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})]^{-1}$ y calculando la inversa
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow_{F_1 \times F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow_{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$
$$\rightarrow_{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$
y así
$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
por lo que
$$\mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Calculamos el núcleo con el sistema
$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
que al resolverlo
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow_{F_3-3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 8 & 0 \end{array}\right) \rightarrow_{F_3+6F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right),$$
nos da que $z = y = x = 0$ y por tanto $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(0,0,0)\}$.

Respecto a la imagen, tenemos que

$$\dim \operatorname{Im} \mathbf{f} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker}(\mathbf{f}) = 3 - 0 = 3,$$

de donde $\operatorname{Im}(\mathbf{f}) = \mathbb{R}^3$.

(d) Calculamos los valores propios de la matriz mediante la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} -1-t & 3 & -3 \\ 0 & 1-t & 0 \\ -3 & 3 & -1-t \end{vmatrix} = (1-t)(t^2+2t+10) = 0,$$

de donde $t = 1$ es solución y las dos restantes son

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = -1 \pm 3i,$$

por lo que hay valores propios complejos y por tanto la matriz no es diagonalizable.

(e) Dado que conocemos los valores propios de la matriz, calculamos

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(t)} &= \frac{a_1}{t-1} + \frac{a_2}{t+1-3i} + \frac{a_3}{t+1+3i} \\ &= \frac{(a_1+a_2+a_3)t^2 + (2a_1+3ia_2-3ia_3)t + 10a_1 - (1+3i)a_2 - (1-3i)a_3}{-p(t)} \end{aligned}$$

de donde obtenemos el sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ 2a_1 + 3ia_2 - 3ia_3 = 0, \\ 10a_1 - (1+3i)a_2 - (1-3i)a_3 = -1, \end{cases}$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3i & -3i & 0 \\ 10 & -1-3i & -1+3i & -1 \end{array} \right) \to_{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3i & -3i & 0 \\ 12 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \to_{F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3i & -3i & 0 \\ 13 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$\to_{F_2+3iF_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2+3i & 6i & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

con lo que $a_1 = -1/13$, $a_2 = (3-2i)/78$ y $a_3 = (3+2i)/78$ y

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t-1} = -(t^2+2t+10), \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{t+1-3i} = -(t^2+3it-1-3i), \\ q_3(t) &= \frac{p(t)}{t+1+3i} = -(t^2-3it-1+3i). \end{aligned}$$

Entonces

$$e^{t\mathbf{A}} = e^t a_1(\mathbf{A}) \cdot q_1(\mathbf{A}) + e^{-t(1-3i)} a_2(\mathbf{A}) \cdot q_2(\mathbf{A}) + e^{-t(1+3i)} a_3(\mathbf{A}) \cdot q_3(\mathbf{A})$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^t}{13}(\mathbf{A}^2+2\mathbf{A}-10\mathbf{I}_3)+e^{-t(1-3i)}\frac{i-3}{78}(\mathbf{A}^2+3i\mathbf{A}-(1+3i)\mathbf{I}_3)\\
&\quad -e^{-t(1+3i)}\frac{i+3}{78}(\mathbf{A}^2-3i\mathbf{A}-(1-3i)\mathbf{I}_3)\\
&= \frac{e^t}{13}\begin{pmatrix}-2&-3&0\\0&-7&0\\0&-3&-2\end{pmatrix}+\frac{e^{-t(1-3i)}}{78}\begin{pmatrix}-33+11i&36-12i&-27+9i\\0&0&0\\-27+9i&36-12i&-33+11i\end{pmatrix}\\
&\quad -\frac{e^{-t(1+3i)}}{78}\begin{pmatrix}33+11i&-36-12i&27+9i\\0&0&0\\27+9i&-36-12i&33+11i\end{pmatrix}\\
&= \frac{e^t}{13}\begin{pmatrix}-2&-3&0\\0&-7&0\\0&-3&-2\end{pmatrix}\\
&\quad +\frac{e^{-t}}{39}\begin{pmatrix}-33\cos(3t)-11\sin(3t)&36\cos(3t)+12\sin(3t)&-27\cos(3t)+9\sin(3t)\\0&0&0\\-27\cos(3t)+9\sin(3t)&36\cos(3t)+12\sin(3t)&-33\cos(3t)-11\sin(3t)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}a&b&c\\0&-\frac{7e^t}{13}&0\\c&b&a\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
a &= -\frac{2e^t}{13}-\frac{e^{-t}}{39}(-33\cos(3t)-11\sin(3t))\\
b &= -\frac{3e^t}{13}+\frac{e^{-t}}{39}(36\cos(3t)+12\sin(3t)),
\end{aligned}
$$

y

$$c=\frac{e^{-t}}{39}(-27\cos(3t)+9\sin(3t)).$$

Entonces la solución del sistema es

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&-\frac{30e^{-t}}{17}\sin(6t)\\0&0&0\\-\frac{30e^{-t}}{17}\sin(6t)&b&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}.$$

Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el conjunto de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 3. Se pide:

(a) Demostrar que

$$\langle p(x),q(x)\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

$p(x),q(x)\in\mathbb{R}_3[x]$, es un producto escalar.

(b) Hallar el subespacio ortogonal al subespacio vectorial $\mathcal{W}$ generado por $\{x,x-x^2\}$.

(c) Hallar la proyección ortogonal de x^3+x^2+x+1 sobre $\mathcal{W}$.

Solución. (a) Se verifican las siguentes propiedades:

- Dados $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned}\langle \alpha p(x) + \beta q(x), r(x) \rangle &= \int_0^1 (\alpha p(x) + \beta q(x)) r(x) dx \\ &= \alpha \int_0^1 p(x) r(x) dx + \beta \int_0^1 q(x) r(x) dx = \alpha \langle p(x), r(x) \rangle + \beta \langle q(x), r(x) \rangle ,\end{aligned}$$

  por lo que es lineal respecto de la primera coordenada.

- Dados $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ se tiene

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x) q(x) dx = \int_0^1 q(x) p(x) dx = \langle q(x), p(x) \rangle ,$$

  por lo que es simétrica.

- Finalmente, dado $p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ se tiene

$$\langle p, p \rangle = \int_0^1 p(x)^2 dx \geq 0$$

  dado que $p(x)^2 \geq 0$ para todo $x \in [0, 1]$. Además,

$$\int_0^1 p(x)^2 dx = 0$$

  si y sólo si $p(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$ al ser los polinomios funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$.

(b) Un polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x]$ si y sólo si

$$0 = \left\langle ax^3 + bx^2 + cx + d, x \right\rangle = \int_0^1 (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx) dx = \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3} + \frac{d}{2},$$

y

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle ax^3 + bx^2 + cx + d, x - x^2 \right\rangle \\ &= \left\langle ax^3 + bx^2 + cx + d, x \right\rangle - \left\langle ax^3 + bx^2 + cx + d, x^2 \right\rangle \\ &= \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3} + \frac{d}{2} - \int_0^1 (ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2) dx \\ &= \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3} + \frac{d}{2} - \left(\frac{a}{6} + \frac{b}{5} + \frac{c}{4} + \frac{d}{3} \right) \\ &= \frac{a}{30} + \frac{b}{20} + \frac{c}{12} + \frac{d}{6}. \end{aligned}$$

De donde

$$\mathcal{W}^{\perp} = \left\{ ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3 : \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3} + \frac{d}{2} = 0,\ \frac{a}{30} + \frac{b}{20} + \frac{c}{12} + \frac{d}{6} = 0 \right\}.$$

(c) Calculamos en primer lugar una base ortonormal de $\mathcal{W}$. Primero construimos una base ortogonal $\mathcal{O} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ dada por $\mathbf{v}_1 = x$ y

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_2 &= x - x^2 - \frac{\langle x - x^2, x\rangle}{\langle x, x\rangle}x \\ &= x - x^2 - \frac{\langle x, x\rangle - \langle x, x^2\rangle}{\langle x, x\rangle}x \\ &= x - x^2 - \frac{1/3 - 1/4}{1/3}x = \frac{3}{4}x - x^2.\end{aligned}$$

Posteriormente obtenemos una base ortonormal $\mathcal{N} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ mediante

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{||\mathbf{u}_1||}\mathbf{u}_1 = \sqrt{3}x,$$

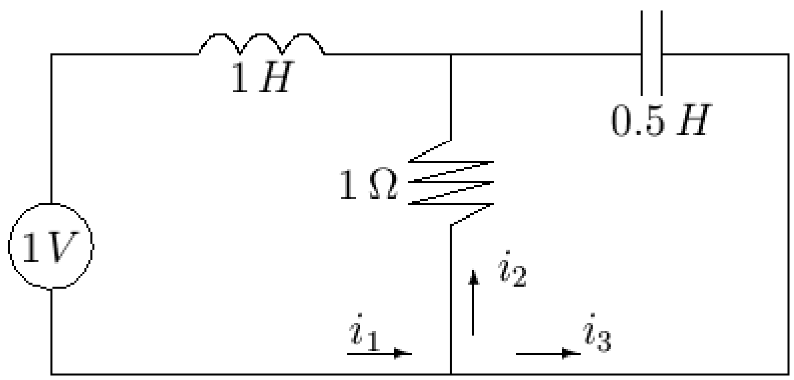
y

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{||\mathbf{u}_2||}\mathbf{u}_2 = 4\sqrt{5}\left(\frac{3}{4}x - x^2\right).$$

Entonces la proyección ortogonal es

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(x^3 + x^2 + x + 1) &= \left\langle x^3 + x^2 + x + 1, \sqrt{3}x\right\rangle \sqrt{3}x \\ &\quad + \left\langle x^3 + x^2 + x + 1, 4\sqrt{5}\left(\frac{3}{4}x - x^2\right)\right\rangle 4\sqrt{5}\left(\frac{3}{4}x - x^2\right) \\ &= \frac{77}{20}x + \frac{80}{3}\left(\frac{3}{4}x - x^2\right) = \frac{477}{20}x - \frac{80}{3}x^2.\end{aligned}$$

Se considera el circuito de la figura



Calcular las intensidades i_1, i_2, e i_3 si inicialmente el circuito estaba descargado [$i_j(0) = 0$].

Solución. Por la ley de los nudos tenemos la ecuación $i_1 = i_2 + i_3$. Por otra parte, si suponemos que la corriente recorre cada subcircuito en sentido contrario a las agujas del reloj, y teniendo en cuenta que el voltaje generado se consume en cada uno de los elementos del subcircuito, tenemos

$$V(t) = V_L + V_R,$$

para el subcircuito de la izquierda y

$$0 = V_C - V_R,$$

para el de la derecha por lo que, poniendo las fórmulas de cada elemento y sustituyendo los valores numéricos, construimos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = i_1' + i_2, \\ 0 = 2q_3 - i_2, \end{array} \right.$$

donde q_3 es la carga cuya derivada da lugar a la intensidad i_3. Derivando la segunda ecuación y sustituyendo i_3 por $i_1 - i_2$ tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} i_1' = 1 - i_2, \\ i_2' = 2i_1 - 3i_2. \end{array} \right.$$

Calculamos primero la solución del sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calculamos sus valores propios mediante la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} -t & -1 \\ 2 & -3-t \end{vmatrix} = t^2 + 3t + 2 = 0,$$

de donde

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2},$$

por lo que los valores propios son -2 y -1. Calculamos ahora

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{a_1}{t+2} + \frac{a_2}{t+1} = \frac{(a_1 + a_2)t + a_1 + 2a_2}{p(t)},$$

de donde igualando coeficientes construimos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 = 0, \\ a_1 + 2a_2 = 1, \end{array} \right.$$

cuyas soluciones son $a_1 = -a_2 = -1$. Por otra parte

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t+2} = t + 1, \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{t+1} = t + 2. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^{-2t} a_1(\mathbf{A}) \cdot q_1(\mathbf{A}) + e^{-t} a_2(\mathbf{A}) \cdot q_2(\mathbf{A}) \\ &= -e^{-2t}(\mathbf{A} + \mathbf{I}_2) + e^{-t}(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}_2) \\ &= -e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo que la solución del sistema homogéneo es

$$\begin{pmatrix} i_{1,h}(t) \\ i_{2,h}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Proponemos ahora como solución particular del sistema no homogéneo $i_{1,p}(t) = A$ e $i_{2,p}(t) = B$ cuyas derivadas son nulas y sustituyendo en el sistema no homogéneo tenemos

$$\begin{cases} 0 = 1 - B, \\ 0 = 2A - 3B, \end{cases}$$

de donde $B = 1$ y $A = 3/2$ y la solución general del sistema no homogéneo es

$$\begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizando las condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} i_1(0) \\ i_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2 \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

de donde $c_1 = 3/2$ y $c_2 = 1$. Así

$$\begin{cases} i_1(t) = 2e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2}, \\ i_2(t) = 2e^{-t} - e^{-2t} + 1, \end{cases}$$

y finalmente

$$i_3(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}.$$

Hallar la trayectoria ortogonal a la familia de curvas $x^2 - y^2 = kx$, $k \in \mathbb{R}$, que pasa por el punto $(1, 1)$.

Solución. Derivamos implícitamente la ecuación de las curvas

$$2x - 2yy' = k,$$

sustituimos y' por $-1/y'$,

$$2x + \frac{2y}{y'} = k,$$

y sustituimos k en la ecuación original

$$x^2 - y^2 = \left(2x + \frac{2y}{y'}\right) x,$$

de donde obtenemos la ecuación

$$2xy + (x^2 + y^2)y' = 0.$$

Sean entonces $P(x, y) = 2xy$ y $Q(x, y) = x^2 + y^2$, de donde

$$2x = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 2x,$$

por lo que la ecuación es exacta y por tanto existe $f(x,y)$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2xy,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x^2+y^2.\end{aligned}$$

Utilizando la primera condición obtenemos que

$$f(x,y)=\int 2xydx = x^2y+g(y),$$

y derivando ésta última identidad respecto de y y utilizando la segunda condición

$$x^2+y^2=x^2+g'(y),$$

y simplificando e integrando

$$g(y)=\int y^2dy=\frac{y^3}{3}.$$

Entonces $f(x,y)=x^2y+\frac{y^3}{3}$ y la ecuación algebraica de la familia ortogonal es

$$x^2y+\frac{y^3}{3}=c.$$

Obtener el diagrama de fases del sistema

$$\begin{cases} x'=x-y,\\ y'=x+y.\end{cases}$$

¿Es estable el punto crítico del sistema?

Solución. Es fácil ver que $(0,0)$ es el único punto crítico del sistema y que las rectas $x=y$ e $y=-x$ son las isoclinas. En la pimera tenemos que $x'=0$ e $y'=2x$, por lo que el vector tangente será paralelo al eje y y apuntará hacia arriba si $x>0$ y hacia abajo en otro caso. La segunda isoclina verifica que $y'=0$ y $x'=2x$, por lo que el vector tangente será paralelo al eje x y apuntará a la derecha si $x>0$ y a la izquierda en caso contrario.

Por otra parte los valores propios de la matriz del sistema los obtenemos mediante la ecuación

$$p(t)=\begin{vmatrix} 1-t & -1\\ 1 & 1-t\end{vmatrix}=t^2-2t+2=0,$$

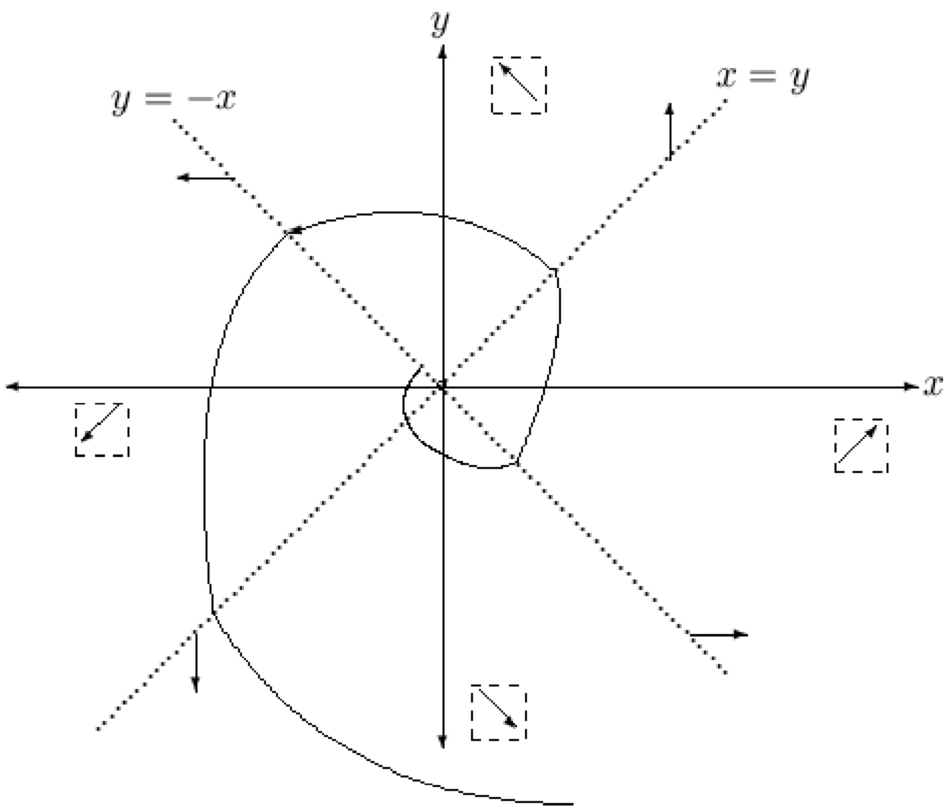
y entonces

$$t=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=1\pm i,$$

por lo que las soluciones del sistema son de la forma

$$\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=e^t\mathbf{M}_1\cdot\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t\end{pmatrix}+e^t\mathbf{M}_2\cdot\begin{pmatrix}\sin t\\ \sin t\end{pmatrix},$$

y así las soluciones son espirales que van creciendo en módulo debido al factor e^t. Entonces esbozamos el diagrama



Capítulo 13

4–9–2002

Enunciado

1. **(2 puntos)** Dada $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x + 2y + 3z, -x + y, x + y + 2z),$$

se pide:

(a) Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ en la base canónica y decidir si es diagonalizable.

(b) Hallar bases y dimensiones del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$.

(c) Averiguar si $(8, 1, 5)$ pertenece a la imagen de $\mathbf{f}$. ¿Pertenece $(3, 0, 1)$ al núcleo?

(d) Utilizando el primer apartado y las matrices de cambio de base, hallar la matriz de $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

2. **(2 puntos)** Sean $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual y $\mathcal{W}$ el subespacio vectorial generado por los vectores $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 0)$ y $(0, 1, 0, 1)$. Se pide:

(a) Calcular las ecuaciones implícitas y la dimensión de $\mathcal{W}$.

(b) Dada una base obtenida a partir de los vectores generadores de $\mathcal{W}$, obtener una base ortonormal.

(c) Hallar el subespacio ortogonal a $\mathcal{W}$.

(d) Obtener la proyección ortogonal del vector $(1, 2, 3, 4)$ sobre $\mathcal{W}$.

3. Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) **(1 punto)** $y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2$ sabiendo que $y_1(x) = \frac{1}{x}$ es solución particular de la misma.

(b) **(1 punto)** $y^{4)} - 2y'' + y = e^x + \sin x$.

(c) **(2 puntos)** $\left\{\begin{array}{l} x' = x + 2y + 3z \\ y' = -x + y \\ z' = x + y + 2z \\ y(0) = x(0) = z(0) = 1. \end{array}\right\}$ ¿Es estable el punto crítico del sistema lineal anterior?

4. **(1 punto)** Esbozar el diagrama de fases de la ecuación autónoma $y' = \frac{y}{y^2-4}$.

5. **(1 punto)** Hallar la familia de curvas que cumple que para todo punto (x, y) de la misma, la distancia entre (x, y) y el origen de coordenadas es igual a la longitud del segmento de la recta normal comprendido entre (x, y) y el punto de corte de la recta normal con el eje x.

Examen resuelto

Dada $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x + 2y + 3z, -x + y, x + y + 2z),$$

se pide:

(a) Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ en la base canónica y decidir si es diagonalizable.

(b) Hallar bases y dimensiones del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$.

(c) Averiguar si $(8, 1, 5)$ pertenece a la imagen de $\mathbf{f}$. ¿Pertenece $(3, 0, 1)$ al núcleo?

(d) Utilizando el primer apartado y las matrices de cambio de base, hallar la matriz de $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

Solución. (a) Si denotamos por $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$, se tiene que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para ver si es diagonalizable planteamos la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ -1 & 1-t & 0 \\ 1 & 1 & 2-t \end{vmatrix} = -t(t^2 - 4t + 4) = 0,$$

de donde un valor propio es 0 y el otro es

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2,$$

con multiplicidad dos. Así la matriz será diagonalizable si y sólo si $\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(\mathbf{f}) - 2\mathbf{I}_3) = 2$. Este subespacio propio está definido por el sistema

$$(\mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(\mathbf{f}) - 2\mathbf{I}_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que al resolverlo nos da

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to_{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to_{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

de donde $\operatorname{Ker}(\mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(\mathbf{f}) - 2\mathbf{I}_3) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0,\ x = 3z\}$, con ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 3\lambda, \\ y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = \lambda, \end{cases}$$

por lo que $(x, y, z) = \lambda(3, 0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y por tanto una base es $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f})-2\mathbf{I}_3)} = \{(3, 0, 1)\}$. Entonces $\dim \mathrm{Ker}(\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) - 2\mathbf{I}_3) = 1$ y consecuentemente la matriz no es diagonalizable.

(b) Calculamos el núcleo que satisfará el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to_{\substack{F_2+F_1 \\ F_3-F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

de donde obtenemos tras algunas simplificaciones que $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0,\ y + z = 0\}$. Las ecuaciones paramétricas son por tanto

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\lambda, \\ y = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = \lambda, \end{array} \right.$$

y entonces un vector del núcleo es de la forma $(x, y, z) = -\lambda(1, 1, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, por lo que una base del núcleo es $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(\mathbf{f})} = \{(1, 1, -1)\}$ y su dimensión es 1.

Procedemos ahora al cálculo de la imagen teniendo en cuenta que $(x, y, z) \in \mathrm{Im}\,\mathbf{f}$ si y sólo si existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

por lo que al calcular los rangos de las matrices del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ -1 & 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & 2 & z \end{array}\right) \to_{\substack{F_2+F_1 \\ F_3-F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 3 & 3 & y+x \\ 0 & -1 & -1 & z-x \end{array}\right) \to_{F_2+3F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 0 & 0 & y-2x+3z \\ 0 & -1 & -1 & z-x \end{array}\right)$$

con lo que para que ambas matrices tengan rango dos debe cumplirse que $y - 2x + 3z = 0$ y así

$$\mathrm{Im}\,\mathbf{f} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - 2x + 3z = 0\}.$$

Las ecuaciones paramétricas son

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda, \\ y = 2\lambda - 3\mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\ z = \mu, \end{array} \right.$$

y entonces $(x, y, z) = \lambda(1, 2, 0) + \mu(0, -3, 1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.y así una base será $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}\,\mathbf{f}} = \{(1, 2, 0), (0, -3, 1)\}$ y la dimensión es dos.

(c) Dado que

$$1 - 2 \cdot 8 + 3 \cdot 5 = 0,$$

se tiene que $(8, 1, 5) \in \mathrm{Im}\,\mathbf{f}$. Por otra parte

$$0 + 1 = 1 \neq 0,$$

y por tanto $(3,0,1)$ no satisface la segunda ecuación del núcleo y consecuentemente no pertenece a este subespacio.

(d) La matriz pedida es

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}),$$

donde

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y $\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})]^{-1}$, por lo que calculando la inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to_{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to_{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to_{\substack{\frac{1}{2}F_3 \\ (-1)F_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \to_{F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\to_{F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right),$$

de donde

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

y entonces

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -5 & -\frac{5}{2} \\ \frac{11}{2} & 9 & \frac{15}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

Sean $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual y $\mathcal{W}$ el subespacio vectorial generado por los vectores $(1,1,1,1)$, $(1,0,1,0)$ y $(0,1,0,1)$. Se pide:

(a) Calcular las ecuaciones implícitas y la dimensión de $\mathcal{W}$.

(b) Dada una base obtenida a partir de los vectores generadores de $\mathcal{W}$, obtener una base ortonormal.

(c) Hallar el subespacio ortogonal a $\mathcal{W}$.

(d) Obtener la proyección ortogonal del vector $(1,2,3,4)$ sobre $\mathcal{W}$.

Solución. (a) Calculamos el rango de los tres vectores que generan $\mathcal{W}$ para hallar una base.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to_{F_1-F_2-F_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que el rango es dos y $\mathcal{B}_{\mathcal{W}} = \{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$ es una base de $\mathcal{W}$. Entonces $(x,y,z,t) \in \mathcal{W}$ si y sólo si existen $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$(x,y,z,t) = \alpha(1,0,1,0) + \beta(0,1,0,1),$$

por lo que las ecuaciones paramétricas son

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha, \\ y = \beta, \\ z = \alpha, \\ t = \beta, \end{array} \right. \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R},$$

siendo un sistema compatible. Calculando los rangos de las matrices del sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & t \end{array} \right) \to_{\substack{F_3-F_1 \\ F_4-F_2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-x \\ 0 & 0 & t-y \end{array} \right)$$

y para que ambos rangos coincidan $z = x$ e $y = t$, por lo que

$$\mathcal{W} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 . x = z, \ y = t\}.$$

(b) Dado que

$$\langle (1,0,1,0),(0,1,0,1) \rangle = 0,$$

se tiene que la base $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ es ortogonal. Obtenemos una base ortonormal $\mathcal{O} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ donde

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{1}{||(1,0,1,0)||}(1,0,1,0) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1,0), \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{1}{||(0,1,0,1)||}(0,1,0,1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,0,1). \end{aligned}$$

(c) Un vector $(x,y,z,t) \in \mathcal{W}^\perp$ si y sólo si

$$0 = \langle (x,y,z,t),(1,0,1,0) \rangle = x + z,$$

y

$$0 = \langle (x,y,z,t),(0,1,0,1) \rangle = y + t,$$

por lo que

$$\mathcal{W}^\perp = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 . x + z = 0, \ y + t = 0\}.$$

(d) La proyección viene dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(1,2,3,4) &= \left\langle (1,2,3,4), \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1,0) \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1,0) \\ &\quad + \left\langle (1,2,3,4), \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,0,1) \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,0,1) \\ &= 2(1,0,1,0) + 3(0,1,0,1) = (2,3,2,3). \end{aligned}$$

Resolver
$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2$$
sabiendo que $y_1(x) = \frac{1}{x}$ es solución particular de la misma.

Solución. Se trata de una ecuación de Riccati que con el cambio de variable dependiente $z = y - \frac{1}{x}$ se transforma en

$$z' = y' + \frac{1}{x^2} = -\frac{y}{x} + y^2 = y\left(y - \frac{1}{x}\right) = z^2 + \frac{z}{x},$$

que es de Bernoulli que con el cambio $u = \frac{1}{z}$ se convierte en

$$u' = -\frac{z'}{z^2} = -\frac{1}{z^2}\left(z^2 + \frac{z}{x}\right) = -1 - \frac{u}{x},$$

que es una ecuación lineal. Resolvemos primero la ecuación homogénea

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = -\int \frac{1}{x}dx,$$

de donde

$$\log u(x) = -\log x + c,$$

o equivalentemente

$$u(x) = \frac{k}{x},\ k = e^c.$$

Proponemos como solución de la ecuación no homogénea $u(x) = \frac{k(x)}{x}$, que derivándose

$$u'(x) = \frac{k'(x)}{x} - \frac{k(x)}{x^2}$$

y sustituyéndose en la ecuación no homogénea nos da

$$\frac{k'(x)}{x} = -1,$$

de donde

$$k(x) = \int -x dx = -\frac{x^2}{2} + c,$$

y por tanto la solución de la ecuación no homogénea es

$$u(x) = \frac{c}{x} - \frac{x}{2}.$$

Deshaciendo los cambios

$$z(x) = \frac{1}{\frac{c}{x} - \frac{x}{2}} = \frac{2x}{2c - x^2}$$

y finalmente

$$y(x) = \frac{2x}{2c - x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 2c}{2cx - x^3}.$$

Resolver
$$y^{4)} - 2y'' + y = e^x + \sin x.$$

Solución. Resolvemos primero la ecuación homogénea
$$y^{4)} - 2y'' + y = 0$$
mediante la ecuación característica
$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$
que nos da
$$x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1,$$
de donde $x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$, ambos de multiplicidad dos, por lo que la solución de la ecuación homogénea es
$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x}.$$
Proponemos la solución particular $y_p(x) = Ax^2e^x + B\cos x + C\sin x$, que derivando cuatro veces
$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= (Ax^2 + 2Ax)e^x - B\sin x + C\cos x,\\
y_p''(x) &= (Ax^2 + 4Ax + 2A)e^x - B\cos x - C\sin x,\\
y_p^{3)}(x) &= (Ax^2 + 6Ax + 6A)e^x + B\sin x - C\cos x,\\
y_p^{4)}(x) &= (Ax^2 + 8Ax + 12A)e^x + B\cos x + C\sin x,
\end{aligned}$$
y sustituyendo en la ecuación no homogénea y simplificando
$$8Ae^x + 4B\cos x + 4C\sin x = e^x + \sin x$$
e igualando coeficientes
$$\begin{cases} 8A = 1,\\ 4B = 0,\\ 4C = 1, \end{cases}$$
de donde $A = 1/8$, $B = 0$ y $C = 1/4$, de donde la solución general de la ecuación no homogénea es
$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x} + \frac{1}{8}x^2 e^x + \frac{1}{4}\sin x.$$

Resolver
$$\left\{\begin{array}{l} x' = x + 2y + 3z,\\ y' = -x + y,\\ z' = x + y + 2z,\\ y(0) = x(0) = z(0) = 1. \end{array}\right\}$$
¿Es estable el punto crítico del sistema lineal anterior?

Solución. Sea la matriz del sistema

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

la matriz obtenida en le primer ejercicio. Entonces sus valores propios son 0 y 2, éste último de multiplicidad dos. Buscamos entonces a_1, y $a_2(t) = b_2 t + a_2$ tales que

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{a_1}{t} + \frac{b_2 t + a_2}{(t-2)^2} = \frac{(a_1 + b_2)t^2 + (a_2 - 4a_1)t + 4a_1}{-p(t)},$$

e igualando coeficientes tenemos el sistema

$$\begin{cases} a_1 + b_2 = 0, \\ a_2 - 4a_1 = 0, \\ 4a_1 = -1, \end{cases}$$

de donde $a_1 = -1/4$, $a_2 = -1$ y $b_2 = 1/4$. Por otra parte

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t} = -(t-2)^2, \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{(t-2)^2} = -t. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= a_1(\mathbf{A}) \cdot q_1(\mathbf{A}) + e^{2t} a_2(\mathbf{A}) \cdot q_2(\mathbf{A}) \cdot \sum_{i=0}^{1} (\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3)^i \frac{t^i}{i!} \\ &= \frac{1}{4}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3)^2 - e^{2t}\left(\frac{1}{4}\mathbf{A} - \mathbf{I}_3\right) \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{I}_3 + (\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3)t) \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \frac{e^{2t}}{4}\left(\begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 2 & -5 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & -6 & -6 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 + 2e^{2t} & -1 + e^{2t} + 6te^{2t} & -3 + 3e^{2t} + 6te^{2t} \\ 2 - 2e^{2t} & -1 + 5e^{2t} - 6te^{2t} & -3 + 3e^{2t} - 6te^{2t} \\ -2 + 2e^{2t} & 1 - e^{2t} + 6te^{2t} & 3 + e^{2t} + 6te^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces la solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 + 2e^{2t} & -1 + e^{2t} + 6te^{2t} & -3 + 3e^{2t} + 6te^{2t} \\ 2 - 2e^{2t} & -1 + 5e^{2t} - 6te^{2t} & -3 + 3e^{2t} - 6te^{2t} \\ -2 + 2e^{2t} & 1 - e^{2t} + 6te^{2t} & 3 + e^{2t} + 6te^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Utilizando la condición inicial

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_3 \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

y por tanto la solución al problema de condiciones iniciales es

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{2t} + 3te^{2t}, \\ y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{2t} - 3te^{2t}, \\ z(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t} + 3te^{2t}. \end{cases}$$

Al tener la matriz del sistema un valor propio positivo se tiene que el punto crítico es inestable.

Esbozar el diagrama de fases de la ecuación autónoma $y' = \frac{y}{y^2-4}$.

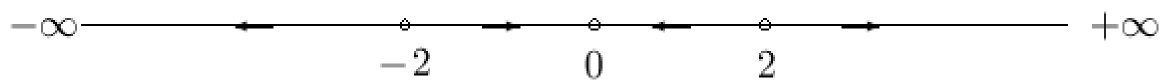
Solución. La función que define la ecuación es

$$f(y) = \frac{y}{y^2-4}$$

que estará definida en $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$, que será por tanto el espacio de fases. Es fácil ver por otra parte que 0 es el único punto crítico. Además:

- Si $y \in (-\infty, -2)$, entonces $f(y) < 0$ y por tanto $y' < 0$, esto la solución es decreciente.
- Si $y \in (-2, 0)$, entonces $f(y) > 0$ y por tanto $y' > 0$, esto la solución es creciente.
- Si $y \in (0, 2)$, entonces $f(y) < 0$ y por tanto $y' < 0$, esto la solución es decreciente.
- Si $y \in (2, \infty)$, entonces $f(y) > 0$ y por tanto $y' > 0$, esto la solución es creciente.

Con esta información esbozamos el siguiente diagrama de fases



Hallar la familia de curvas que cumple que para todo punto (x, y) de la misma, la distancia entre (x, y) y el origen de coordenadas es igual a la longitud del segmento de la recta normal comprendido entre (x, y) y el punto de corte de la recta normal con el eje x.

Solución. La recta tangente en cada punto $P = (x, y)$ de la curva es

$$Y - y = y'(X - x),$$

y la recta normal es por tanto

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x).$$

Hallamos el punto de corte de la recta normal con el eje x mediante el sistema

$$\begin{cases} Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x), \\ Y = 0, \end{cases}$$

de donde $X = yy' + x$ y el punto de corte $C = (yy' + x, 0)$. Entonces

$$\sqrt{x^2 + y^2} = d((0,0), P) = d((0,0), C) = \sqrt{(yy' + x)^2},$$

o equivalentemente

$$0 = y^2(y')^2 + 2xyy' - y^2,$$

y así

$$y' = \frac{-2xy \pm \sqrt{4x^2y^2 - 4y^2}}{2y^2} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 1}}{y}.$$

Resolvemos la primera ecuación integrando

$$\int y(x)y'(x)dx = \int (-x + \sqrt{x^2 - 1})dx,$$

de donde

$$\frac{y(x)^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\mathrm{arcch}x + c,$$

y la segunda ecuación

$$\int y(x)y'(x)dx = \int (-x - \sqrt{x^2 - 1})dx,$$

obteniéndose

$$\frac{y(x)^2}{2} = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{2}\mathrm{arcch}x + c.$$

Nota:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2 - 1}dx &= \left\{ \begin{array}{c} x = \mathrm{ch}t \\ dx = \mathrm{sh}t dt \end{array} \right\} = \int \mathrm{sh}^2 t dt = \int \frac{e^{2t} + e^{-2t} - 2}{4} dt \\
&= \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{8} - \frac{t}{2} = \frac{1}{4}\mathrm{sh}(2t) - \frac{t}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{sh}t\,\mathrm{ch}t - \frac{t}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{ch}^2 t - 1}\,\mathrm{ch}t - \frac{t}{2} \\
&= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\mathrm{arcch}x.
\end{aligned}$$

Capítulo 14

3–2–2003

Enunciado

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales y problemas de condiciones iniciales:

   (a) **(1 punto)** $xy' = (-\frac{3}{2}y^2 + x^{-\alpha} - 1)/y$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (b) **(1 punto)** $y''' - y'' + y' - y = \cos t$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

   (c) **(2 puntos)** $x' = 2x + y$; $y' = x + 2y$; $z' = -z$. Estudiar además la estabilidad del punto crítico del sistema.

2. (**3 Puntos**) Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el conjunto de los polinomios con coeficientes reales de grado a lo sumo tres. Definimos para todo $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_3[x]$,

$$\langle p(x), q(x) \rangle := \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

   (a) Comprobar que se trata de un producto escalar.

   (b) Obtener una base ortonormal a partir de la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$.

   (c) Calcular el valor del parámetro a para que los polinomios $ax^3 + x^2 + 1$ y $x + 1$ sean ortogonales.

   (d) Calcular el valor de a para que $ax^2 + 1$ sea normal o unitario.

3. (**3 Puntos**) Sea la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$dada por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (2x + y, x + 2y, \lambda z).$$

   (a) Calcular la matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Hallar el núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$ dependiendo de los valores del parámetro λ.

   (c) Calcular para qué valores de λ la matriz obtenida en el primer apartado del ejercicio es diagonalizable.

   (d) Obtener la matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0)\}$.

4. (**2 Puntos**) Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular $\mathbf{A}^n$ para todo $n \geq 0$. Dado

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

obtener $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$.

5. Decidir la validez o falsedad de las siguientes afirmaciones:

   (a) (**1 Punto**) Sea $\mathcal{C}[0,1]$ el conjunto de las funciones continuas reales definidas en el intervalo compacto $[0,1]$. Definimos la aplicación $I : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ tal que si la función $f \in \mathcal{C}[0,1]$, entonces $I(f)$ es la función continua definida para todo $x \in [0,1]$ por $I(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$. Entonces I es lineal.

   (b) (**1 Punto**) Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada con determinante no nulo. Si λ es un valor propio de $\mathbf{A}$, entonces $1/\lambda$ es un valor propio de A^{-1}.

Examen resuelto

Resolver
$$xy' = (-\frac{3}{2}y^2 + x^{-\alpha} - 1)/y,$$
con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solución. Reescribimos la ecuación de la forma
$$\frac{3}{2}y^2 - x^{-\alpha} + 1 + xyy' = 0.$$
Sean $P(x,y) = \frac{3}{2}y^2 - x^{-\alpha} + 1$ y $Q(x,y) = xy$, y entonces
$$3y = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = y,$$
por lo que la ecuación no es exacta y por tanto hemos de buscar un factor integrante $\mu(x,y)$ mediante la ecuación
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\mu(x,y) + P(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\mu(x,y) + Q(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y)$$
que nos da
$$3y\mu(x,y) + \left(\frac{3}{2}y^2 - x^{-\alpha} + 1\right)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) = y\mu(x,y) + xy\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y).$$
Suponiendo que $\mu(x)$ la ecuación queda de la forma
$$2\mu(x) = x\mu'(x),$$
que la resolvemos integrando
$$\int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}dx = \int \frac{2}{x}dx,$$
de donde
$$\mu(x) = x^2$$
y la ecuación
$$\frac{3}{2}y^2x^2 - x^{2-\alpha} + x^2 + x^3yy' = 0$$
es exacta por lo que existe $f(x,y)$ tal que
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{3}{2}y^2x^2 - x^{2-\alpha} + x^2, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x^3y. \end{aligned}$$
Utilizamos la primera condición e integramos respecto de x obteniendo
$$f(x,y) = \int \left(\frac{3}{2}y^2x^2 - x^{2-\alpha} + x^2\right)dx = \frac{1}{2}y^2x^3 - \frac{x^{3-\alpha}}{3-\alpha} + \frac{x^3}{3} + g(y)$$

si $\alpha \neq 3$ y

$$f(x,y) = \int \left(\frac{3}{2}y^2x^2 - \frac{1}{x} + x^2\right) dx = \frac{1}{2}y^2x^3 - \log x + \frac{x^3}{3} + g(y)$$

si $\alpha = 3$. Utilizando la segunda condición tenemos que

$$x^3y = yx^3 + g'(y)$$

en ambos casos, por lo que $g(y)$ es constante y por tanto

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y^2y^3 - \frac{x^{3-\alpha}}{3-\alpha} + \frac{x^3}{3} & \text{si } \alpha \neq 3, \\ \frac{1}{2}y^2y^3 - \log x + \frac{x^3}{3} & \text{si } \alpha = 3, \end{cases}$$

y la solución general de la ecuación es

$$\frac{1}{2}y^2y^3 - \frac{x^{3-\alpha}}{3-\alpha} + \frac{x^3}{3} = c$$

si $\alpha \neq 3$ y en otro caso

$$\frac{1}{2}y^2y^3 - \log x + \frac{x^3}{3} = c.$$

Resolver

$$\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = \cos t, \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$$

Solución. Calculamos en primer lugar la solución de la ecuación homogénea mediante la ecuación característica

$$t^3 - t^2 + t - 1 = 0,$$

que resolvemos mediante el método de Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

por lo que 1 es una solución y las otras dos salen de la ecuación $t^2 + 1 = 0$, de donde $t = \pm i$. Así, la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h(t) = c_1e^t + c_2\cos t + c_3\sin t.$$

Proponemos una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma $y_p(t) = At\cos t + Bt\sin t$, y derivando tres veces

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= (Bt + A)\cos t + (-At + B)\sin t, \\ y_p''(t) &= (-At + 2B)\cos t - (Bt + 2A)\sin t, \\ y_p'''(t) &= -(Bt - 3A)\cos t + (At - 3B)\sin t, \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea y simplificando

$$(4A - 2B)\cos t - (2A + 2B)\sin t = \cos t,$$

de donde obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 4A - 2B = 1, \\ 2A + 2B = 0, \end{cases}$$

con lo que $A = 1/6$ y $B = -1/6$ y la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t + \frac{1}{6} t \cos t - \frac{1}{6} t \sin t.$$

Utilizamos las condiciones iniciales, derivando previamente dos veces la solución general

$$\begin{aligned} y'(t) &= c_1 e^t - c_2 \sin t + c_3 \cos t + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6} t\right) \cos t - \left(\frac{1}{6} t + \frac{1}{6}\right) \sin t, \\ y''(t) &= c_1 e^t - c_2 \cos t - c_3 \sin t - \left(\frac{1}{6} t + \frac{1}{3}\right) \cos t + \left(\frac{1}{6} t - \frac{1}{3}\right) \sin t, \end{aligned}$$

para obtener el sistema

$$\begin{cases} y(0) = 0 = c_1 + c_2, \\ y'(0) = 0 = c_1 + c_3 + \frac{1}{6}, \\ y''(0) = 0 = c_1 - c_2 - \frac{1}{3}, \end{cases}$$

que resolvemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 1 & -1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \to_{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & -2 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right),$$

de donde $c_2 = -1/6$, $c_1 = 1/6$ y $c_3 = 0$ y así la solución del problema de condiciones iniciales es

$$y(t) = \frac{1}{6} e^t - \frac{1}{6} \cos t + \frac{1}{6} t \cos t - \frac{1}{6} t \sin t.$$

Resolver $x' = 2x + y$; $y' = x + 2y$; $z' = -z$. Estudiar además la estabilidad del punto crítico del sistema.

Solución. Dénomos cuenta que la tercera incógnita puede calcularse directamente con la tercera ecuación $z' = z$, que tiene la solución $z(t) = c_3 e^t$. Escribimos el sistema de forma matricial el sistema restante

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos los valoresp propios mediante la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 2 - t & 1 \\ 1 & 2 - t \end{vmatrix} = t^2 - 4t + 3 = 0,$$

con lo que

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1,$$

por lo que las raíces son 3 y 1. Calculamos ahora

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{a_1}{t-3} + \frac{a_2}{t-1} = \frac{(a_1+a_2)t-(a_1+3a_2)}{p(t)},$$

de donde igualando coeficiente escribimos el sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ a_1 + 3a_2 = -1, \end{cases}$$

y así $a_1 = 1/2$ y $a_2 = -1/2$. Por otra parte

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t-3} = t-1, \\ q_1(t) &= \frac{p(t)}{t-1} = t-3. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^{3t}a_1(\mathbf{A})\cdot q_1(\mathbf{A}) + e^t a_2(\mathbf{A})\cdot q_2(\mathbf{A}) \\ &= \frac{e^{3t}}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{I}_2) - \frac{e^{\,t}}{2}(\mathbf{A}-3\mathbf{I}_2) \\ &= \frac{e^{3t}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{e^{\,t}}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{3t}+e^t & e^{3t}-e^t \\ e^{3t}-e^t & e^{3t}+e^t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{3t}+e^t & e^{3t}-e^t \\ e^{3t}-e^t & e^{3t}+e^t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

y la solución del sistema es por tanto

$$\begin{cases} x(t) = \frac{c_1+c_2}{2}e^{3t} + \frac{c_1-c_2}{2}e^t, \\ y(t) = \frac{c_1+c_2}{2}e^{3t} + \frac{c_2-c_1}{2}e^t, \\ z(t) = c_3e^t. \end{cases}$$

Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el conjunto de los polinomios con coeficientes reales de grado a lo sumo tres. Definimos para todo $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_3[x]$,

$$\langle p(x), q(x)\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

(a) Comprobar que se trata de un producto escalar.

(b) Obtener una base ortonormal a partir de la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$.

(c) Calcular el valor del parámetro a para que los polinomios $ax^3 + x^2 + 1$ y $x + 1$ sean ortogonales.

(d) Calcular el valor de a para que $ax^2 + 1$ sea normal o unitario.

Solución. (a) Se verifican las siguentes propiedades:

- Dados $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned}\langle \alpha p(x) + \beta q(x), r(x) \rangle &= \int_0^1 (\alpha p(x) + \beta q(x)) r(x) dx \\ &= \alpha \int_0^1 p(x) r(x) dx + \beta \int_0^1 q(x) r(x) dx = \alpha \langle p(x), r(x) \rangle + \beta \langle q(x), r(x) \rangle ,\end{aligned}$$

  por lo que es lineal respecto de la primera coordenada.

- Dados $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ se tiene

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x) q(x) dx = \int_0^1 q(x) p(x) dx = \langle q(x), p(x) \rangle ,$$

  por lo que es simétrica.

- Finalmente, dado $p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ se tiene

$$\langle p, p \rangle = \int_0^1 p(x)^2 dx \geq 0$$

  dado que $p(x)^2 \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$. Además,

$$\int_0^1 p(x)^2 dx = 0$$

  si y sólo si $p(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$ al ser los polinomios funciones continuas en el intervalo $[0,1]$.

(b) Obtenemos en primer lugar una base ortogonal $\mathcal{O} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$, donde $\mathbf{u}_1 = 1$ y

$$\mathbf{u}_2 = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 = x - \frac{1}{2},$$

$$\mathbf{u}_3 = x^2 - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 - \frac{\left\langle x^2, x - \frac{1}{2} \right\rangle}{\left\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \right\rangle} \left(x - \frac{1}{2} \right) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_4 &= x^3 - \frac{\langle x^3, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 - \frac{\left\langle x^3, x - \frac{1}{2} \right\rangle}{\left\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \right\rangle} \left(x - \frac{1}{2} \right) - \frac{\left\langle x^3, x^2 - x + \frac{1}{6} \right\rangle}{\left\langle x^2 - x + \frac{1}{6}, x^2 - x + \frac{1}{6} \right\rangle} \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right) \\ &= x^3 - \frac{1}{4} - \frac{9}{10} \left(x - \frac{1}{2} \right) - \frac{3}{2} \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right) = x^3 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{5} x - \frac{1}{20}.\end{aligned}$$

Ahora obtenemos una base ortonormal $\mathcal{N} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ donde

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{||\mathbf{u}_1||} \mathbf{u}_1 = 1,$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{||\mathbf{u}_2||} \mathbf{u}_2 = \sqrt{12} \left(x - \frac{1}{2} \right) ,$$

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{||\mathbf{u}_3||}\mathbf{u}_3 = 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right),$$
$$\mathbf{v}_4 = \frac{1}{||\mathbf{u}_4||}\mathbf{u}_4 = 20\sqrt{7}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}\right).$$

(c) Ambos polinomios serán ortogonales si se satisface

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle ax^3 + x^2 + 1, x + 1\right\rangle \\ &= a\left\langle x^3, x+1\right\rangle + \left\langle x^2 + 1, x + 1\right\rangle = a\frac{9}{20} + \frac{25}{12}, \end{aligned}$$

de donde

$$a = -\frac{125}{27}.$$

(d) Dicho vector será normal si

$$\begin{aligned} 1 &= \left\langle ax^2 + 1, ax^2 + 1\right\rangle \\ &= a^2\left\langle x^2, x^2\right\rangle + 2a\left\langle x^2, 1\right\rangle + \langle 1, 1\rangle \\ &= \frac{1}{5}a^2 + \frac{2}{3}a + 1, \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1}{5}a^2 + \frac{2}{3}a = 0,$$

con lo que $a = 0$ ó $a = -\frac{10}{3}$.

Sea la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$dada por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (2x + y, x + 2y, \lambda z).$$

(a) Calcular la matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) Hallar el núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$ dependiendo de los valores del parámetro λ.

(c) Calcular para qué valores de λ la matriz obtenida en el primer apartado del ejercicio es diagonalizable.

(d) Obtener la matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0)\}$.

Solución. (a) Si denotamos por $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ se tiene que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

(b) El núcleo viene dado por el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right) \rightarrow_{F_2-\frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{array}\right),$$

nos da los siguientes casos:

- Si $\lambda \neq 0$, entonces $x = y = z = 0$ y por tanto $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(0,0,0)\}$.
- Si $\lambda = 0$, entonces $x = y = 0$ y $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$.

Calculamos ahora la imagen. Para ello notemos que si $\lambda \neq 0$, entonces

$$\dim \mathrm{Im}\, \mathbf{f} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = 3 - 0 = 3,$$

por lo que $\mathrm{Im}\, \mathbf{f} = \mathbb{R}^3$. Si $\lambda = 0$, entonces $(x,y,z) \in \mathrm{Im}\, \mathbf{f}$ si y sólo si existe $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & z \end{array}\right) \rightarrow_{F_2-\frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & x \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & y - \frac{1}{2}x \\ 0 & 0 & 0 & z \end{array}\right),$$

vemos que para que coincidan los rangos de las matrices del sistema ha de verificarse $z = 0$, por lo que

$$\mathrm{Im}\, \mathbf{f} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}.$$

(c) Se trata de una matriz simétrica para todo λ, por lo que siempre es diagonalizable.

(d) La matriz pedida es

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}),$$

donde

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y $\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})]^{-1}$, que al calcularla

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow_{F_2 \times F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow_{F_2 \times F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow_{F_3-F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right),$$

obtenemos que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

y así

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular $\mathbf{A}^n$ para todo $n \geq 0$. Dado

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

obtener $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$.

Solución. Calculamos los valores propios de la matriz mediante la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 2 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 2t - 3 = 0,$$

de donde

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = 1 \pm 2,$$

y obtenemos los valores propios 3 y -1. Calculamos los subespacios propios empezando por $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_2)$, que satisfará el sistema

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con lo que $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ y por tanto una base es $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-3\mathbf{I}_2)} = \{(1,1)\}$.

Calculamos ahora $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} + \mathbf{I}_2)$ mediante el sistema

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I}_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

obteniéndose que $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} + \mathbf{I}_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ y por tanto una base es $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-3\mathbf{I}_2)} = \{(1,-1)\}$.

Entonces existe una base de vectores propios $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$ de manera que

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$$

donde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

y calculando su inversa

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to_{F_2-F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \to_{-\frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$
$$\to_{F_1-F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right),$$

con lo que

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Entonces para todo $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{P}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3^n+(-1)^n}{2} & \frac{3^n-(-1)^n}{2} \\ \frac{3^n-(-1)^n}{2} & \frac{3^n+(-1)^n}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \mathbf{A}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3^n+(-1)^n}{2} & \frac{3^n-(-1)^n}{2} \\ \frac{3^n-(-1)^n}{2} & \frac{3^n+(-1)^n}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3^n+(-1)^n}{2} \\ \frac{3^n-(-1)^n}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n+(-1)^n}{2}}{\frac{3^n-(-1)^n}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n+(-1)^n}{3^n-(-1)^n} = 1.$$

Decidir la validez o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Sea $\mathcal{C}[0,1]$ el conjunto de las funciones continuas reales definidas en el intervalo compacto $[0,1]$. Definimos la aplicación $I : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ tal que si la función $f \in \mathcal{C}[0,1]$, entonces $I(f)$ es la función continua definida para todo $x \in [0,1]$ por $I(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$. Entonces I es lineal.

(b) Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada con determinante no nulo. Si λ es un valor propio de $\mathbf{A}$, entonces $1/\lambda$ es un valor propio de A^{-1}.

Solución. (a) Como sabemos la función $\int_0^x f(t)dt$ es continua para toda $f \in \mathcal{C}[0,1]$, por lo que la aplicación I está bien definida. Veamos que es lienal. Para ello sean $g, f \in \mathcal{C}[0,1]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces para todo $x \in [0,1]$ se tiene que

$$\begin{aligned} I(\alpha f + \beta g)(x) &= \int_0^x (\alpha f(t) + \beta g(t))dt \\ &= \int_0^x \alpha f(t)dt + \int_0^x \beta g(t)dt \\ &= \alpha \int_0^x f(t)dt + \beta \int_0^x g(t)dt = \alpha I(f)(x) + \beta I(g)(x), \end{aligned}$$

por lo que $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$, y consecuentemente I es lineal.

(b) Esta afirmación es verdadera. Para ello sea $\mathbf{v}$ un vector propio asociado a λ. Entonces

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v},$$

y multiplicando ambos lados de la igualdad por la inversa de $\mathbf{A}$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\lambda \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{v},$$

y así

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{v},$$

con lo que efectivamente $1/\lambda$ es valor propio de $\mathbf{A}^{-1}$.

Capítulo 15

10–6–2003

Enunciado

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales y problemas de condiciones iniciales:

   (a) **(1 punto)** $x^2 + y^2 + x + xyy' = 0$.

   (b) **(1 punto)** $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = \cos t$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

   (c) **(2 puntos)** $x' = x + y + z$; $y' = -z$; $z' = -y$. Estudiar además la estabilidad del punto crítico del sistema.

2. Dado el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x' = y^2 - 3y + 2, \\ y' = (2 - x)(y - 1), \end{cases}$$

   se pide

   (a) **(2 puntos)** Obtener el diagrama de fases del mismo.

   (b) **(1 punto)** ¿Son estables los puntos críticos aislados? ¿Son asintóticamente estables?

3. **(3 puntos)** Un cierto elemento radioactivo A se descompone en otro elemento radiactivo B con constante de proporcionalidad k_1 (recordar de la velocidad de la descomposición es proporcional a la cantidad del elemento radiactivo). A su vez, B se descompone en otro elemento C con constante de proporcionalidad k_2. Si llamamos $x(t)$ e $y(t)$ a las cantidades de A y B en el instante de tiempo t y $x(0) = 100$ gramos, calcular $y(t)$. (El resultado debe aparecer en función de k_1y k_2).

Examen resuelto

Resolver
$$x^2 + y^2 + x + xyy' = 0.$$

Solución. Sean $P(x,y) = x^2 + y^2 + x$ y $Q(x,y) = xy$. Entonces
$$2y = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = y,$$
por lo que la ecuación no es exacta y hemos de buscar un factor integrante $\mu(x,y)$ mediante la ecuación
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\mu(x,y) + P(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\mu(x,y) + Q(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y)$$
que nos da
$$2y\mu(x,y) + (x^2 + y^2 + x)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) = y\mu(x,y) + xy\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y).$$
Suponiendo que $\mu(x)$, la ecuación anterior se simplifica a
$$\mu(x) = x\mu'(x),$$
que integrando
$$\int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}dx = \int \frac{dx}{x},$$
con lo que obtenemos
$$\mu(x) = x.$$
Entonces la ecuación
$$x^3 + y^2x + x^2 + x^2yy' = 0$$
es exacta, por lo que existe $f(x,y)$ tal que
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= x^3 + y^2x + x^2, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x^2y. \end{aligned}$$
Utilizando la primera condición
$$f(x,y) = \int (x^3 + y^2x + x^2)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{y^2x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + g(y),$$
y derivando esta expresión respecto de y y sustituyendo en la segunda condición
$$x^2y + g'(y) = x^2y,$$

de donde $g'(y) = 0$ y por tanto $g(y)$ es constante y así la función buscada es $f(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^2x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ y la solución general de la ecuación diferencial es

$$\frac{x^4}{4} + \frac{y^2x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = c.$$

Resolver
$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 4y' - 2y = \cos t, \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$$

Solución. Resolvemos primero la ecuación homogénea mediante la ecuación característica

$$t^3 - 3t^2 + 4t - 2 = 0,$$

que haciendo uso del método de Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 4 & -2 \\ 1 & & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

por lo que 1 es una solución y las dos restantes se obtienen a partir de $t^2 - 2t + 2 = 0$, y así

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i.$$

Se obtiene así la solución de la ecuación homogénea

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^t \cos t + c_3 e^t \sin t.$$

Proponemos como solución particular de la ecuación no homogénea $y_p(t) = A\cos t + B\sin t$, y derivando tres veces

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= -A\sin t + B\cos t, \\ y_p''(t) &= -A\cos t - B\sin t, \\ y_p'''(t) &= A\sin t - B\cos t, \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea y simplificando

$$(A + 3B)\cos t + (-3A + B)\sin t = \cos t,$$

e igualando coeficientes obtenemos el sistema

$$\begin{cases} A + 3B = 1, \\ -3A + B = 0, \end{cases}$$

que nos da $A = 1/10$ y $B = 3/10$, de donde la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^t \cos t + c_3 e^t \sin t + \frac{1}{10}\cos t + \frac{3}{10}\sin t.$$

Utilizando las condiciones iniciales dervando previamente dos veces

$$y'(t) = c_1e^t + (c_2 + c_3)e^t \cos t + (c_3 - c_2)e^t \sin t - \frac{1}{10}\sin t + \frac{3}{10}\cos t,$$

$$y''(t) = c_1e^t + 2c_3e^t \cos t - 2c_2e^t \sin t - \frac{1}{10}\cos t - \frac{3}{10}\sin t,$$

obtenemos el sistema

$$\begin{cases} y(0) = 0 = c_1 + c_2 + \frac{1}{10}, \\ y'(0) = 0 = c_1 + c_2 + c_3 + \frac{3}{10}, \\ y''(0) = 0 = c_1 + 2c_3 - \frac{1}{10}, \end{cases}$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{10} \\ 1 & 1 & 1 & \frac{3}{10} \\ 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{10} \end{array} \right) \rightarrow_{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & -1 & 2 & -\frac{1}{5} \end{array} \right)$$

se tiene que $c_3 = 1/5$, $c_2 = 3/5$ y $c_1 = -1/2$, y entonces la solución del problema de condiciones iniciales son

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^t + \frac{3}{5}e^t \cos t + \frac{1}{5}e^t \sin t + \frac{1}{10}\cos t + \frac{3}{10}\sin t.$$

Resolver $x' = x + y + z$; $y' = -z$; $z' = -y$. Estudiar además la estabilidad del punto crítico del sistema.

Solución. Las dos últimas incógnitas pueden calcularse por separado a partir del sistema

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores propios a partir de la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} -t & -1 \\ -1 & -t \end{vmatrix} = t^2 - 1 = 0,$$

de donde $t = \pm 1$. Sea ahora

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{a_1}{t-1} + \frac{a_2}{t+1} = \frac{(a_1 + a_2)t + a_1 - a_2}{p(t)},$$

e igualando coeficientes

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ a_1 - a_2 = 1, \end{cases}$$

y $a_1 = 1/2$ y $a_2 = -1/2$. Por otra parte

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t-1} = t + 1, \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{t+1} = t - 1. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
e^{t\mathbf{A}} &= e^t a_1(\mathbf{A})\cdot q_1(\mathbf{A}) + e^{-t} a_2(\mathbf{A})\cdot q_2(\mathbf{A}) \\
&= \frac{e^t}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{I}_2) - \frac{e^{-t}}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{I}_2) \\
&= \frac{e^t}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{e^{-t}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t + e^{-t} & e^{-t} - e^t \\ e^{-t} - e^t & e^t + e^{-t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

La solución general es por tanto

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t + e^{-t} & e^{-t} - e^t \\ e^{-t} - e^t & e^t + e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

y así

$$\begin{cases} y(t) = \frac{c_2 - c_3}{2} e^t + \frac{c_2 + c_3}{2} e^{-t}, \\ z(t) = \frac{c_3 - c_2}{2} e^t + \frac{c_2 + c_3}{2} e^{-t}. \end{cases}$$

Por otra parte, la primera variable se calcula con la ecuación

$$x' = x + y + z = x + (c_2 + c_3)e^{-t}.$$

La solución de la ecuación homogénea es $x_h(t) = c_1 e^t$, y como solución particular proponemos $x_p(t) = Ae^{-t}$, que derivada, $x_p'(t) = -Ae^{-t}$ y sustituida en la ecuación no homogénea nos proporciona

$$-2Ae^{-t} = (c_2 + c_3)e^{-t},$$

de donde $-2A = c_2 + c_3$, y así

$$A = -\frac{c_2 + c_3}{2}.$$

Entonces la solución de la ecuación no homogénea es

$$x(t) = c_1 e^t - \frac{c_2 + c_3}{2} e^{-t}.$$

Dado el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x' = y^2 - 3y + 2, \\ y' = (2 - x)(y - 1), \end{cases}$$

se pide

(a) Obtener el diagrama de fases del mismo.

(b) ¿Son estables los puntos críticos aislados? ¿Son asintóticamente estables?

Solución. (a) Calculamos en primer lugar los puntos críticos mediante el sistema

$$\begin{cases} y^2 - 3y + 2 = 0, \\ (2 - x)(y - 1) = 0. \end{cases}$$

De la primera ecuación tenemos que

$$y = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2},$$

de donde obtenemos las soluciones 2 y 1. De la segunda ecuación deducimos fácilmente que $x = 2$ y $y = 1$ son soluciones. Juntando ambas soluciones tenemos que la recta $y = 1$ es de puntos críticos y existe otro punto crítico adicional $(2, 2)$.

Las isoclinas son las rectas $y = 2$ y $x = 2$. En la primera tenemos que $x' = 0$ e $y' = 2 - x$, por lo que el vector tangente es paralelo al eje y y apuntará hacia arriba si $x < 2$ y hacia abajo en caso contrario. La segunda isoclina verifica que $y' = 0$ y $x' = (y-2)(y-1)$, por lo que el vector tangente será paralelo al eje x y apuntará a la derecha si $y \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$ y a la izquierda en otro caso. Por otra parte, si $y < 1$ se verifica que $x' > 0$ e $y' > 0$ si $x > 2$ e $y' < 0$ si $x < 2$.

Finalmente las integrales primeras vienen dadas por la ecuación

$$y' = \frac{(2-x)(y-1)}{(y-2)(y-1)} = -\frac{x-2}{y-2},$$

de donde integrando

$$\int (y(x)-2)y'(x)dx = -\int (x-2)dx$$

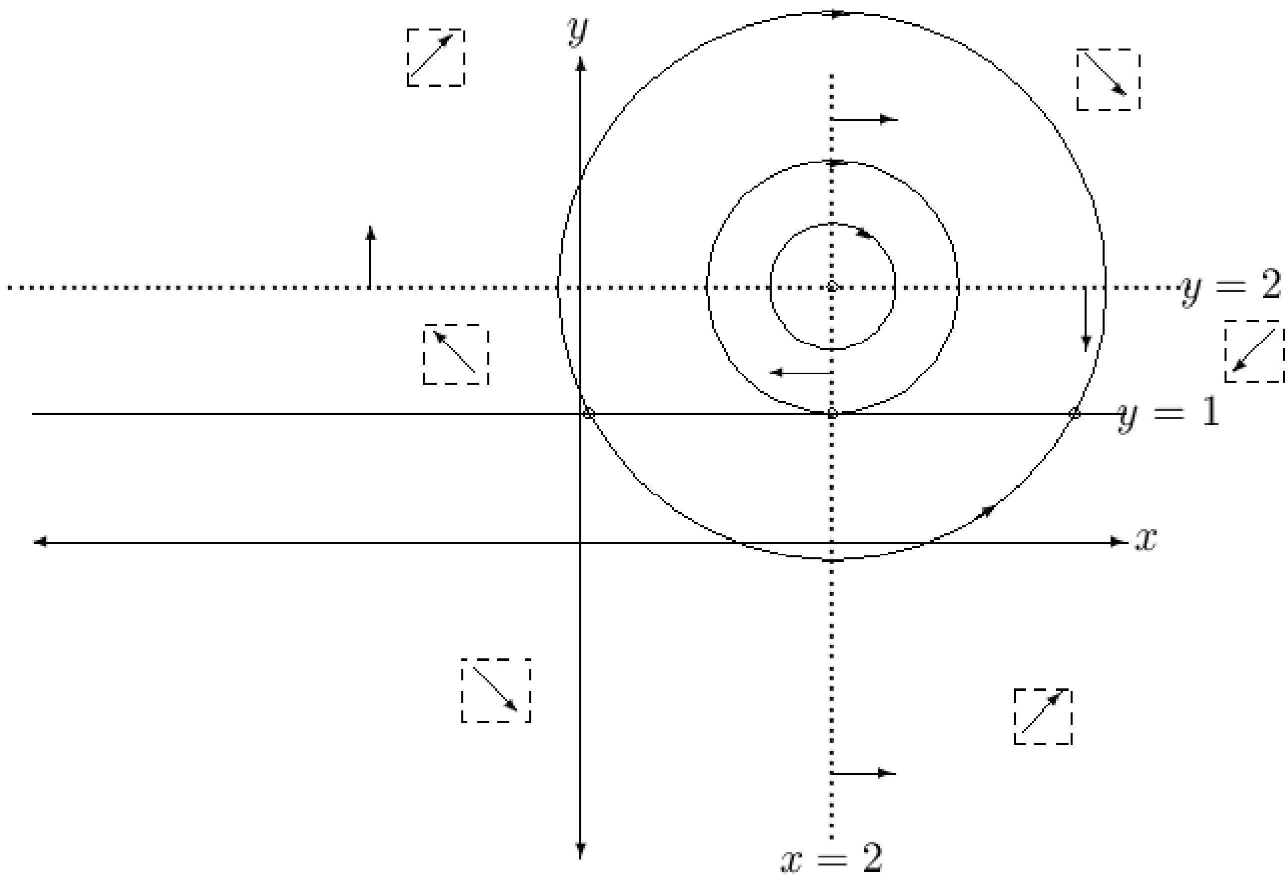
obtenemos

$$\frac{(y-2)^2}{2} = -\frac{(x-2)^2}{2} + c,$$

que es la familia de circunferencias concéntricas

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2c.$$

Entonces podemos esbozar el diagrama de fases, teniendo en cuenta que dichas circunferencias son disjuntas con la recta de puntos críticos si $c < 1/2$, tangente si $c = 1/2$ y secantes si $c > 1/2$.



(b) Vemos que las órbitas alrededor del punto crítico aislado son periódicas y por tanto dicho punto crítico es estable, pero no asintóticamente estable.

Un cierto elemento radioactivo A se descompone en otro elemento radiactivo B con constante de proporcionalidad k_1 (recordar de la velocidad de la descomposición es proporcional a la cantidad del elemento radiactivo). A su vez, B se descompone en otro elemento C con constante de proporcionalidad k_2. Si llamamos $x(t)$ e $y(t)$ a las cantidades de A y B en el instante de tiempo t y $x(0) = 100$ gramos, calcular $y(t)$. (El resultado debe aparecer en función de k_1y k_2).

Solución. Como sabemos por la ley de descomposición radiactiva

$$x'(t) = k_1 x(t),$$

que nos da la solución

$$x(t) = ce^{tk_1},$$

y usando la condición inicial

$$x(0) = 100 = c,$$

por lo que
$$x(t) = 100e^{tk_1}.$$
Por otra parte
$$y'(t) = v_c + v_d,$$
donde v_c es la velocidad de creación del elemento B a partir del A, que viene dado por
$$v_c = -k_1 x(t)$$
y v_d es la velocidad de descomposición de B que es
$$v_d = k_2 y(t),$$
que dan lugar a la ecuación
$$y'(t) = k_2 y(t) - 100k_1 e^{tk_1}.$$
La solución de la ecuación homogénea es
$$y_h(t) = Ce^{tk_2},$$
y como solución particular proponemos $y_p(t) = Ae^{tk_1}$, que se deriva $y_p'(t) = Ak_1e^{tk_1}$ y se sustituye en la ecuación no homogénea y simplificando
$$A(k_2 - k_2)e^{tk_1} = -100k_1e^{tk_1},$$
e igualando coeficientes
$$A = 100\frac{k_1}{k_2 - k_1},$$
y así la solución general de la ecuación no homogénea es
$$y(t) = Ce^{tk_2} + 100\frac{k_1}{k_2 - k_1}e^{tk_1}.$$
Usamos la condición inicial
$$y(0) = 0 = C + 100\frac{k_1}{k_2 - k_1},$$
y entonces
$$y(t) = 100\frac{k_1}{k_2 - k_1}(e^{tk_1} - e^{tk_2}).$$

Capítulo 16

11–7–2003

Enunciado

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales y problemas de condiciones iniciales:

   (a) **(3 puntos)** $xy'' - (x+1)y' + y = x^2$ sabiendo que $y_1(x) = e^x$ es una solución particular de la ecuación homogénea.

   (b) **(2 puntos)** $y' = 1 + \cos^2(x-y)$. (Ayuda: Hacer el cambio $z = x - y$).

   (c) **(5 puntos)**
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9t \\ 0 \\ -18t \end{pmatrix}.$$

2. Dado el sistema homogéneo
$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = 2x + y, \end{cases}$$
   se pide

   (a) **(9 puntos)** Obtener el diagrama de fases del mismo.

   (b) **(1 punto)** Estudiar la estabilidad del punto crítico del sistema.

3. **(10 puntos)** Hallar las curvas del plano que pasan por el punto $(1,1)$ y que cumplen que la distancia del origen de coordenadas con el punto de corte de la recta normal a la curva en cada punto con el eje X es igual a la primera coordenada de dicho punto.

4. Dada la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$\mathbf{f}(x,y,z) = (\alpha x + z, \alpha y + z, x + y + \alpha z)$$
   se pide:

   (a) **(1 punto)** Matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   (b) **(4 puntos)** Núcleo e imagen de $\mathbf{f}$ en función del parámatro α.

   (c) **(3 puntos)** Matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,0,0),(1,1,1)\}$.

(d) **(2 puntos)** Estudiar en función del parámetro α cuándo es diagonalizable la matriz obtenida en el apartado primero.

5. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el conjuto de polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales. Dados $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$, se define

$$< p(x), q(x) >= \int_{-1}^{1} x^2 p(x)q(x)dx.$$

Se pide:

(a) **(2 puntos)** Comprobar que se trata de un producto escalar.

(b) **(4 puntos)** Dada la base $\mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$, obtener a partir de ella un base ortonormal de $\mathbb{R}_2[x]$.

(c) **(2 puntos)** Calcular α para que el polinomio $x^2 + \alpha$ sea normal.

(d) **(2 puntos)** Calcular β para que los polinomios $\beta x^2 + 1$ y $1 + x + x^2$ sean ortogonales.

6. **(10 puntos)** Determinar una aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumple las siguientes condiciones: $\text{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0,\ x = 2y\}$, $\mathbf{f}(0, 1, 1) = (3, 0, 0)$ y $(1, 1, 1)$ es un vector propio de $\mathbf{f}$ asociado al valor propio -3. Determinar además si la matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica es o no diagonalizable, obteniendo en caso afirmativo su forma diagonal y las matrices de cambio de base.

Examen resuelto

Resolver
$$xy'' - (x+1)y' + y = x^2$$
sabiendo que $y_1(x) = e^x$ es una solución particular de la ecuación homogénea.

Solución. Proponemos otra solución de la ecuación homogénea de la forma $y_2(x) = k(x)e^x$, que derivada dos veces
$$y_2'(x) = k'(x)e^x + k(x)e^x,$$
$$y_2'(x) = k''(x)e^x + 2k'(x)e^x + k(x)e^x,$$
y sustituyendo en la ecuación homogénea y simplificando tenemos
$$xk''(x) + (x-1)k'(x) = 0,$$
e integrando
$$\int \frac{k''(x)}{k'(x)}dx = \int \frac{1-x}{x}dx,$$
obtenemos
$$\log k'(x) = \log x - x,$$
y así
$$\begin{aligned} k(x) &= \int xe^{-x}dx = \left\{ \begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{array} \right\} \\ &= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -(x+1)e^{-x}, \end{aligned}$$
por lo que la segunda solución $y_2(x) = -(x+1)$ y la solución general de la ecuación homogénea es
$$y_h(x) = c_1e^x + c_2(x+1).$$
Proponemos una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma $y_p(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)(x+1)$ y calculamos las incógnitas $c_1(x)$ y $c_2(x)$ mediante el sistema
$$\left\{ \begin{array}{l} c_1'(x)e^x + c_2'(x)(x+1) = 0, \\ c_1'(x)e^x + c_2'(x) = x, \end{array} \right.$$
de donde
$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x+1 \\ x & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & x+1 \\ e^x & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x^2+x}{xe^x} = e^{-x}(x+1),$$
y así
$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int e^{-x}(x+1)dx = \left\{ \begin{array}{l|l} u = x+1 & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{array} \right\} \\ &= -(x+1)e^{-x} + \int e^{-x}dx = -(x+2)e^{-x}, \end{aligned}$$

y similarmente

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & x+1 \\ e^x & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{xe^x}{xe^x} = -1,$$

con lo que

$$c_2(x) = -\int dx = -x,$$

y la solución particular es

$$y_p(x) = -(x+2) - x(x+1) = -x^2 - 2x - 2,$$

y la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y(x) = c_1 e^x + c_2(x+1) - x^2 - 2x - 2.$$

Resolver

$$y' = 1 + \cos^2(x-y).$$

(Ayuda: Hacer el cambio $z = x - y$).

Solución. Si hacemos el cambio sugerido tenemos que

$$z' = 1 - y' = \cos^2 z,$$

de donde integrando

$$\int \sec^2 z(x) z'(x) dx = \int dx$$

obtenemos

$$\tan z(x) = x + c,$$

de donde

$$z(x) = \arctan(x+c).$$

Deshaciendo el cambio

$$y(x) = x - \arctan(x+c).$$

Resolver

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9t \\ 0 \\ -18t \end{pmatrix}.$$

Solución. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y calculemos sus valores propios mediante la ecuación

$$p(t)=\begin{vmatrix} 1-t & -2 & 2 \\ -2 & 1-t & 2 \\ 2 & 2 & 1-t \end{vmatrix}=-t^3+3t^2+9t-27=0,$$

y utilizando el método de Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & -9 & 27 \\ 3 & & 3 & 0 & -27 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & 0 \end{array}$$

por lo que 3 es solución y obtenemos las otras dos de la ecuación $t^2-9=0$, con lo que $t=\pm 3$, y así 3 es un valor propio de multiplicidad dos y -3. Calculamos ahora

$$\frac{1}{p(t)}=\frac{a_1}{t+3}+\frac{b_2t+a_2}{(t-3)^2}=\frac{(a_1+b_2)t^2+(-6a_1+a_2+3b_2)t+9a_1+3a_2}{-p(t)}$$

con lo que construimos el sistema

$$\begin{cases} a_1+b_2=0, \\ -6a_1+a_2+3b_2=0, \\ 9a_1+3a_2=-1, \end{cases}$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 3 & 0 \\ 9 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right)\to_{\substack{F_2+6F_1 \\ F_3-9F_1}}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & -1 \end{array}\right)\to_{F_2+F_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

de donde $a_2=-1/4$, $b_2=1/36$ y $a_1=-1/36$ con lo que $a_1(t)=-1/36$ y $a_2(t)=t/36-1/4$. Por otra parte

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t+3}=-(t-3)^2, \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{(t-3)^2}=-(t+3). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^{-3t}a_1(\mathbf{A})\cdot q_1(\mathbf{A})+e^{3t}a_2(\mathbf{A})\cdot q_2(\mathbf{A})\cdot\sum_{i=0}^{1}(\mathbf{A}-3\mathbf{I}_3)^i\frac{t^i}{i!} \\ &= \frac{e^{-3t}}{36}(\mathbf{A}-3\mathbf{I}_3)^2-e^{3t}\left(\frac{1}{36}\mathbf{A}-\frac{1}{4}\mathbf{I}_3\right)\cdot(\mathbf{A}+3\mathbf{I}_3)\cdot(\mathbf{I}_3+(\mathbf{A}-3\mathbf{I}_3)t) \\ &= \frac{e^{-3t}}{36}\begin{pmatrix} 12 & 12 & -12 \\ 12 & 12 & -12 \\ -12 & -12 & 12 \end{pmatrix}-e^{3t}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{-3t}+2e^{3t} & e^{-3t}-e^{3t} & -e^{-3t}+e^{3t} \\ e^{-3t}-e^{3t} & e^{-3t}+2e^{3t} & -e^{-3t}+e^{3t} \\ -e^{-3t}+e^{3t} & -e^{-3t}+e^{3t} & e^{-3t}+2e^{3t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y así la solución de la ecuación homogénea

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \\ z_h(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-3t}+2e^{3t} & e^{-3t}-e^{3t} & -e^{-3t}+e^{3t} \\ e^{-3t}-e^{3t} & e^{-3t}+2e^{3t} & -e^{-3t}+e^{3t} \\ -e^{-3t}+e^{3t} & -e^{-3t}+e^{3t} & e^{-3t}+2e^{3t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Proponemos como soluciones particulares del sistema no homogéneo

$$(x_p(t), y_p(t), z_p(t)) = (At+B, Ct+D, Et+F),$$

cuya derivada es

$$(x_p'(t), y_p'(t), z_p'(t)) = (A, C, E),$$

y sustituyendo en el sistema no homogéneo

$$\begin{pmatrix} A \\ C \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} At+B \\ Ct+D \\ Et+F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9t \\ 0 \\ -18t \end{pmatrix},$$

y simplificando e igulando coeficientes

$$\begin{cases} A-2C+2E=-9, \\ -A+B-2D+2F=0, \\ -2A+C+2E=0, \\ -2B-C+D+2F=0, \\ 2A+2C+E=-18, \\ 2B+2D+-E+F=0, \end{cases}$$

y resolviendo el sistema por las ecuaciones primera, tercera y quinta

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -9 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -18 \end{array}\right) \to_{\substack{F_2+2F_1 \\ F_3-2F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -9 \\ 0 & -3 & 6 & -18 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \end{array}\right) \to_{F_3+2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -9 \\ 0 & -3 & 6 & -18 \\ 0 & 0 & 9 & -36 \end{array}\right),$$

con lo que $E=-4$, $C=-2$ y $A=-5$ y así utilizando las ecuaciones segunda, cuarta y sexta

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right) \to_{\substack{F_2+2F_1 \\ F_3-2F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & 6 & -12 \\ 0 & 6 & -3 & 6 \end{array}\right) \to_{F_3+2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 9 & -18 \end{array}\right),$$

y $F=-2$, $D=0$ y $B=-1$, con lo que la solución general del sistema no homogéneo es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-3t}+2e^{3t} & e^{-3t}-e^{3t} & -e^{-3t}+e^{3t} \\ e^{-3t}-e^{3t} & e^{-3t}+2e^{3t} & -e^{-3t}+e^{3t} \\ -e^{-3t}+e^{3t} & -e^{-3t}+e^{3t} & e^{-3t}+2e^{3t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5t-1 \\ -2t \\ -4t-2 \end{pmatrix},$$

y por tanto

$$\begin{cases} x(t) = \frac{c_1+c_2-c_3}{3}e^{-3t} + \frac{2c_1-c_2+c_3}{3}e^{3t} - 5t - 1, \\ y(t) = \frac{c_1+c_2-c_3}{3}e^{-3t} + \frac{-c_1+2c_2+c_3}{3}e^{3t} - 2t, \\ z(t) = -\frac{c_1+c_2-c_3}{3}e^{-3t} + \frac{c_1+c_2+2c_3}{3}e^{3t} - 4t - 2. \end{cases}$$

Dado el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = 2x + y, \end{cases}$$

se pide

(a) Obtener el diagrama de fases del mismo.

(b) Estudiar la estabilidad del punto crítico del sistema.

Solución. (a) Es sencillo ver que $(0,0)$ es el único punto crítico del sistema. Las isoclinas son las rectas $x = y$ e $y = -2x$. En la primera se tiene que $x' = 0$ e $y' = 2x$, por lo que $y' > 0$ si $x > 0$ e $y' < 0$ si $x < 0$. En la segunda isoclina se verifica que $y' = 0$ y $x' = 3x$, por lo que $x' > 0$ si $x > 0$ e $x' < 0$ si $x < 0$. Calculamos ahora los valores propios de la matriz del sistema con la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & -1 \\ 2 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 2t + 3 = 0,$$

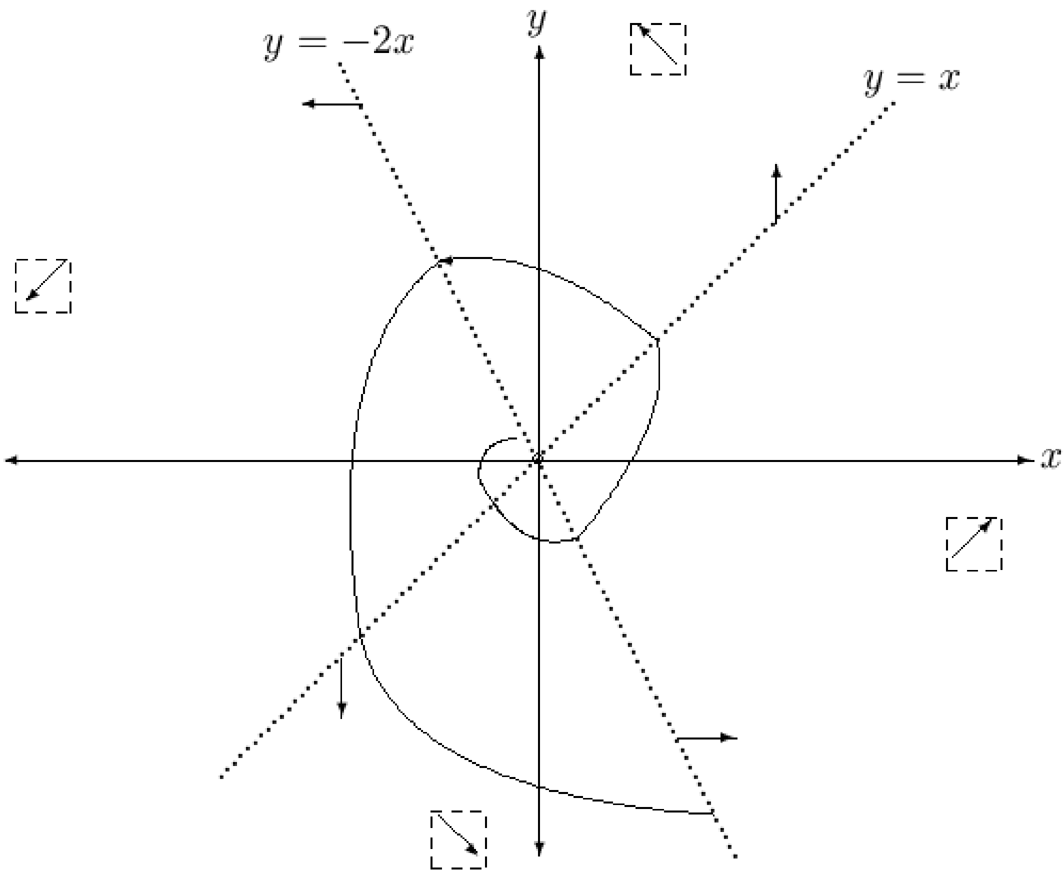
con lo que

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = 1 \pm i\sqrt{2},$$

por lo que las soluciones del sistema serán de la forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^t \mathbf{M}_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) \\ \cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} + e^t \mathbf{M}_2 \cdot \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{2}t) \\ \sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ son dos matrices reales de orden dos. Tenemos entonces que las soluciones son espirales que van aumentando en módulo debido al factor e^t. Entonces tenemos el diagrama de fases



(b) Dado que los valores propios de la matriz del sistema tienen parte real positiva, se verifica que el punto crítico es inestable.

Hallar las curvas del plano que pasan por el punto $(1, 1)$ y que cumplen que la distancia del origen de coordenadas con el punto de corte de la recta normal a la curva en cada punto con el eje X es igual a la primera coordenada de dicho punto.

Solución. Sea $y = y(x)$ la curva y calculamos su recta tangente en cada punto (x, y),

$$Y - y = y'(X - x),$$

y la recta normal

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x).$$

El punto de corte de la recta normal con el eje X se consigue mediante la resolución del sistema

$$\begin{cases} Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x), \\ Y = 0, \end{cases}$$

de donde $X = x + yy'$, con lo que dicho punto de corte es $(x + yy', 0)$. La distancia de este punto al origen, y que debe ser igual a x, es

$$\sqrt{(x + yy')^2} = x,$$

de donde simplificando tenemos la ecuación diferencial

$$yy' = 0$$

con lo que $y' = 0$ y por tanto $y(x) = c$. Utilizando las condiciones iniciales $y(1) = 1 = c$, con lo que

$$y(x) = 1.$$

Dada la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (\alpha x + z, \alpha y + z, x + y + \alpha z)$$

se pide:

(a) Matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) Núcleo e imagen de $\mathbf{f}$ en función del parámatro α.

(c) Matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$.

(d) Estudiar en función del parámetro α cuándo es diagonalizable la matriz obtenida en el apartado primero.

Solución. (a) Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Entonces

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(b) Calculamos en primer lugar el núcleo que ha de satisfacer el sistema

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha & 0 \end{array}\right) \rightarrow_{F_1 \times F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow_{F_3 - \alpha F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 1-\alpha^2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow_{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\alpha^2 & 0 \end{array}\right).$$

Distinguimos entonces los siguientes casos:

- Si $\alpha \notin \{0, \pm\sqrt{2}\}$, entonces el rango de la matriz $\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f})$ es tres y por tanto $x = y = z = 0$ y $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(0, 0, 0)\}$.
- Si $\alpha = 0$, entonces $z = 0$ y $x + y = 0$ y por tanto $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0,\ z = 0\}$.

- Si $\alpha = \sqrt{2}$, se tiene que el sistema se reduce a $x + y + z\sqrt{2} = 0$ y $\sqrt{2}y + z = 0$, y por tanto $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z\sqrt{2} = 0,\ \sqrt{2}y + z = 0\}$.
- Finalmente, si $\alpha = -\sqrt{2}$, entonces el sistema se reduce a $x + y - z\sqrt{2} = 0$ y $\sqrt{2}y - z = 0$, y por tanto $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z\sqrt{2} = 0,\ \sqrt{2}y - z = 0\}$.

Procedemos ahora a calcular la imagen. Distinguimos también los siguientes casos:

- Si $\alpha \notin \{0, \pm\sqrt{2}\}$, se verifica que

$$\dim \mathrm{Im}\, \mathbf{f} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = 3 - 0 = 3,$$

  y consecuentemente $\mathrm{Im}\, \mathbf{f} = \mathbb{R}^3$.

- Si $\alpha = 0$, entonces $(x, y, z) \in \mathrm{Im}\, \mathbf{f}$ si y sólo si existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix},$$

  y al calcular los rangos de las matrices del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right) \to_{F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & x - y \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right),$$

  tenemos que para que ambos rangos coincidan debe cumplirse que $x = y$, por lo que $\mathrm{Im}\, \mathbf{f} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$.

- Si $\alpha = \sqrt{2}$, entonces $(x, y, z) \in \mathrm{Im}\, \mathbf{f}$ si y sólo si existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ solución del sistema

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix},$$

  y al calcular los rangos de las matrices del sistema

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2} & 0 & 1 & x \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & y \\ 1 & 1 & \sqrt{2} & z \end{array}\right) &\to_{F_1 \times F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \sqrt{2} & z \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & y \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & x \end{array}\right) \\ &\to_{F_3 - \sqrt{2}F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \sqrt{2} & z \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & y \\ 0 & -\sqrt{2} & -1 & x - \sqrt{2}z \end{array}\right) \\ &\to_{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \sqrt{2} & z \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & x + y - \sqrt{2}z \end{array}\right), \end{aligned}$$

  por lo que para que ambos rangos coincidan debe cumplirse que $x + y - \sqrt{2}z = 0$, y esto último implica que $\mathrm{Im}\, \mathbf{f} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - \sqrt{2}z = 0\}$.

- Si $\alpha = -\sqrt{2}$, entonces $(x, y, z) \in \operatorname{Im} \mathbf{f}$ si y sólo si existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ solución del sistema

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix},$$

y al calcular los rangos de las matrices del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\sqrt{2} & 0 & 1 & x \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 & y \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & z \end{array}\right) \to_{F_1 \times F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\sqrt{2} & z \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 & y \\ -\sqrt{2} & 0 & 1 & x \end{array}\right)$$
$$\to_{F_3+\sqrt{2}F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\sqrt{2} & z \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 & y \\ 0 & \sqrt{2} & -1 & x+\sqrt{2}z \end{array}\right)$$
$$\to_{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\sqrt{2} & z \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & x+y+\sqrt{2}z \end{array}\right),$$

por lo que para que ambos rangos coincidan debe cumplirse que $x + y + \sqrt{2}z = 0$, y esto último implica que $\operatorname{Im} \mathbf{f} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + \sqrt{2}z = 0\}$.

(c) La matriz pedida es

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}),$$

donde

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})]^{-1}$, y al calcular la inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to_{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to_{(-1)F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to_{F_1-F_2-F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

tenemos que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha-2 & -1 & -1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 2 & 1 & \alpha+2 \end{pmatrix}.$$

(d) Como puede observarse, la matriz es simétrica por lo que será diagonalizable para todo valor del parámetro α.

Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el conjuto de polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales. Dados $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$, se define

$$< p(x), q(x) >= \int_{-1}^{1} x^2 p(x) q(x) dx.$$

Se pide:

(a) Comprobar que se trata de un producto escalar.

(b) Dada la base $\mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$, obtener a partir de ella un base ortonormal de $\mathbb{R}_2[x]$.

(c) Calcular α para que el polinomio $x^2 + \alpha$ sea normal.

(d) Calcular β para que los polinomios $\beta x^2 + 1$ y $1 + x + x^2$ sean ortogonales.

Solución. (a) Se verifican las siguentes propiedades:

- Dados $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle \alpha p(x) + \beta q(x), r(x) \rangle &= \int_{-1}^{1} x^2 (\alpha p(x) + \beta q(x)) r(x) dx \\ &= \alpha \int_{-1}^{1} x^2 p(x) r(x) dx + \beta \int_{-1}^{1} x^2 q(x) r(x) dx = \alpha \langle p(x), r(x) \rangle + \beta \langle q(x), r(x) \rangle, \end{aligned}$$

por lo que es lineal respecto de la primera coordenada.

- Dados $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ se tiene

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 p(x) q(x) dx = \int_{-1}^{1} x^2 q(x) p(x) dx = \langle q(x), p(x) \rangle,$$

por lo que es simétrica.

- Finalmente, dado $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ se tiene

$$\langle p, p \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 p(x)^2 dx \geq 0$$

dado que $x^2 p(x)^2 \geq 0$ para todo $x \in [-1, 1]$. Además,

$$\int_{-1}^{1} x^2 p(x)^2 dx = 0$$

si y sólo si $x^2 p(x)^2 = 0$ para todo $x \in [-1, 1]$ al ser los polinomios funciones continuas en el intervalo $[-1, 1]$. Como $x^2 \neq 0$, debe verificarse que $p(x) = 0$ para todo $x \in [-1, 1]$.

(b) Obtenemos primero una base ortogonal $\mathcal{O} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ donde $\mathbf{v}_1 = 1$ y

$$\mathbf{v}_2 = 1 + x - \frac{\langle 1+x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} 1 = 1 + x - \frac{\int_{-1}^{1} x^2(1+x)dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = x,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 &= 1 + x + x^2 - \frac{\langle 1+x+x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} 1 - \frac{\langle 1+x+x^2, x\rangle}{\langle x, x\rangle} x = \\ &= 1 + x + x^2 - \frac{16}{5} - x = x^2 - \frac{11}{5}. \end{aligned}$$

Obtenemos a continuación una base ortonormal $\mathcal{N} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ donde

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{||\mathbf{v}_1||} \mathbf{v}_1 = \sqrt{3},$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{||\mathbf{v}_2||} \mathbf{v}_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} x,$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{||\mathbf{v}_3||} \mathbf{v}_3 = \frac{\sqrt{4830}}{92} \left(x^2 - \frac{11}{5} \right).$$

(c) Hemos de imponer que

$$1 = \left\langle x^2 + \alpha, x^2 + \alpha \right\rangle = \left\langle x^2, x^2 \right\rangle + 2\alpha \left\langle x^2, 1 \right\rangle + a^2 \langle 1, 1\rangle = \frac{2}{7} + \frac{4}{5}\alpha + \frac{2}{3}\alpha^2,$$

de donde

$$-75 + 84\alpha + 70\alpha^2 = 0,$$

con lo que

$$\alpha = \frac{-84 \pm \sqrt{7056 + 21000}}{140} = \frac{-84 \pm 2\sqrt{7014}}{140} = \frac{-42 \pm \sqrt{7014}}{70}.$$

(d) Imponemos la condición

$$0 = \left\langle \beta x^2 + 1, 1 + x + x^2 \right\rangle = \beta \left\langle x^2, 1 + x + x^2 \right\rangle + \left\langle 1, 1 + x + x^2 \right\rangle,$$

con lo que

$$\beta = -\frac{\langle 1, 1 + x + x^2\rangle}{\langle x^2, 1 + x + x^2\rangle} = -\frac{14}{9}.$$

Determinar una aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumple las siguientes condiciones: $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0,\ x = 2y\}$, $\mathbf{f}(0, 1, 1) = (3, 0, 0)$ y $(1, 1, 1)$ es un vector propio de $\mathbf{f}$ asociado al valor propio -3. Determinar además si la matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica es o no diagonalizable, obteniendo en caso afirmativo su forma diagonal y las matrices de cambio de base.

Solución. Calculamos en primer lugar una base del núcleo resolviendo el sistema que definen sus ecuaciones

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) \to_{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{array} \right),$$

de donde las ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = 2\lambda, \\ y = \lambda, \\ z = -3\lambda, \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

y por tanto $(x, y, z) = \lambda(2, 1, -3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y consecuentemente una base del núcleo es $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(\mathbf{f})} = \{(2, 1, -3)\}$.

Sea $\mathcal{B} = \{(2, 1, -3), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ y comprobemos que se trata de una base de $\mathbb{R}^3$ calculando el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow_{F_1 \times F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow_{F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow_{F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

por lo que el rango es tres y los tres vectores son linealmente independientes y forman una base.

La aplicación lineal que buscamos ha de satisfacer

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(2, 1, -3) &= (0, 0, 0), \\ \mathbf{f}(0, 1, 1) &= (3, 0, 0), \\ \mathbf{f}(1, 1, 1) &= (-3, -3, -3), \end{aligned}$$

por lo que si denotamos por $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ se verifica que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

y la matriz respecto a la base canónica es

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}),$$

donde

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})]^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

y obteniendo la inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \times F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 + 3F_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 + 2F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{-\frac{1}{2}F_2 \\ \frac{1}{2}F_3}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\rightarrow_{\substack{F_2-\frac{1}{2}F_3\\F_1-F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\rightarrow_{F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right),$$

y así

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & \frac{21}{4} & -\frac{9}{4} \\ -3 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -3 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

La aplicación lineal tiene la expresión

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x,y,z) &= \left(\begin{pmatrix} -6 & \frac{21}{4} & -\frac{9}{4} \\ -3 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -3 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)^t \\ &= \left(-6x + \frac{21}{4}y - \frac{9}{4}z, -3x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z, -3x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z\right). \end{aligned}$$

Para ver si la matriz asociada en la base canónica es diagonalizable calculamos en primer lugar sus valores propios mediante la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} -6-t & \frac{21}{4} & -\frac{9}{4} \\ -3 & \frac{3}{2}-t & -\frac{3}{2} \\ -3 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2}-t \end{vmatrix} = -t(t^2+6t+9) = 0,$$

que nos da 0 como solución además de

$$t = \frac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = -3,$$

que será doble. La matriz será diagonalizable si $\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) + 3\mathbf{I}_3) = 2$. Calculamos dicho subespacio propio mediante el sistema

$$(\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) + 3\mathbf{I}_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & \frac{21}{4} & -\frac{9}{4} \\ -3 & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \\ -3 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & \frac{21}{4} & -\frac{9}{4} & 0 \\ -3 & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -3 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{array}\right) \rightarrow_{\substack{F_2-F_1\\F_3-F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & \frac{21}{4} & -\frac{9}{4} & 0 \\ & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{15}{4} & \frac{15}{4} & 0 \end{array}\right) \rightarrow_{F_3-5F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & \frac{21}{4} & -\frac{9}{4} & 0 \\ & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

de donde $\operatorname{Ker}(\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) + 3\mathbf{I}_3) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y,\ 12x - 21y + 9z = 0\}$, cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda, \\ y = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = \lambda, \end{array} \right.$$

por lo que $(x, y, z) = \lambda(1, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y por lo tanto una base es $\{(1, 1, 1)\}$ y consecuentemente $\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) + 3\mathbf{I}_3) = 1$, por lo que la matriz no es diagonalizable.

Capítulo 17

16–9–2003

Enunciado

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales y problemas de condiciones iniciales:

   (a) **(2.5 puntos)** $y'' - 2y' + y = x^2 + e^x$.

   (b) **(2.5 puntos)** $2x^2 + y + (x^2y - x)y' = 0$, $y(1) = 1$.

   (c) **(5 puntos)**
   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Dado el sistema homogéneo
   $$\begin{cases} x' = 4x + 2y, \\ y' = 2x + y, \end{cases}$$
   se pide

   (a) **(8 puntos)** Obtener el diagrama de fases del mismo.

   (b) **(2 puntos)** Estudiar la estabilidad de los puntos críticos del sistema.

3. **(10 puntos)** La absorción (variación de la concentración) de una determinada droga por los tejidos es proporcional a la concentración de dicha sustancia en dicho tejido. La Thoephylina es administrada para tratar el asma. Una concentración en sangre por debajo de 5 miligramos por litro apenas produce efectos beneficiosos al paciente, mientras que si la concentración supera los 20 miligramos por litro aparecen efectos secundarios nocivos. Se administra al paciente una dosis inicial de 14 miligramos por litro, y una hora después se mide una concentración de 10 miligramos por litro. Determinar a qué hora se debe administrar una segunda dosis para evitar que la acción de la medicación sea ineficaz.

4. Dada la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por
   $$\mathbf{f}(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 2y + 2z, 2y + 3z)$$
   se pide:

   (a) **(1 punto)** Matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) **(2 puntos)** Núcleo e imagen de $\mathbf{f}$.

(c) **(3 puntos)** Matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,0,0),(1,1,1)\}$.

(d) **(4 puntos)** Estudiar si la matriz obtenida en el apartado primero es diagonalizable y obtener en caso afirmativo su forma diagonal.

5. Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones:

(a) **(2 puntos)**Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el conjuto de polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales. Dados $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$, se define

$$< p(x), q(x) >= \int_{-1}^{1} x^4 p(x) q(x) dx.$$

Probar que se trata de un producto escalar.

(b) **(3 puntos)** Dada la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$, obtener a partir de ella un base ortonormal de $\mathbb{R}_2[x]$ (usando el producto escalar anterior).

(c) **(2 puntos)** Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada tal que $|\mathbf{A}^4| = 0$, demostrar que 0 es un valor propio de dicha matriz.

(d) **(3 puntos)** Sean λ y μ dos valores propios de una matriz cuadrada. ¿Es cierto que $\lambda + \mu$ es también un valor propio de $\mathbf{A}$?

6. **(10 puntos)** Determinar una aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que cumple las siguientes condiciones: $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z=0,\ x=2y\}$, $\mathbf{f}(0,1,1,0) = (3,0,1,1)$ y $(1,1,1,0)$ es un vector propio de $\mathbf{f}$ asociado al valor propio 2. Determinar además si la matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica es o no diagonalizable.

Examen resuelto

Resolver
$$y'' - 2y' + y = x^2 + e^x.$$

Solución. Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea mediante su ecuación característica
$$x^2 - 2x + 1 = 0 = (x-1)^2,$$
por lo que 1 es la única raíz y entonces la solución de la ecuación homogénea es
$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$
Proponemos como solución particular de la ecuación no homogénea $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C + Dx^2 e^x$, y derivando dos veces
$$y_p'(x) = 2Ax + B + (Dx^2 + 2Dx)e^x,$$
$$y_p''(x) = 2A + (Dx^2 + 4Dx + 2D)e^x,$$
y sustituyendo en la ecuación no homogénea y simplificando
$$2A - 2B + C + (-4A + B)x + Ax^2 + 2De^x = x^2 + e^x,$$
e igualando coeficientes
$$\begin{cases} 2A - 2B + C = 1, \\ -4A + B = 0, \\ A = 1, \\ 2D = 1, \end{cases}$$
y $D = 1/2$, $A = 1$, $B = 4$ y $C = 7$, y la solución general de la ecuación no homogénea es
$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + x^2 + 4x + 7 + \frac{1}{2}x^2 e^x.$$

Resolver
$$\begin{cases} 2x^2 + y + (x^2 y - x)y' = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Solución. Sean $P(x,y) = 2x^2 + y$ y $Q(x,y) = x^2 y - x$. Entonces
$$1 = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 2xy - 1,$$
por lo que hemos de buscar un factor integrante $\mu(x,y)$ mediante la ecuación
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\mu(x,y) + P(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\mu(x,y) + Q(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y)$$

que sustituyendo los datos

$$\mu(x,y)+(2x^2+y)\frac{\partial\mu}{\partial y}(x,y)=(2xy-1)\mu(x,y)+(x^2y-x)\frac{\partial\mu}{\partial x}(x,y),$$

y suponiendo que $\mu(x)$ y simplificando

$$-2(xy-1)\mu(x)=x(xy-1)\mu'(x),$$

cuya solución la calculamos integrando

$$\int\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}dx=-\int\frac{2}{x}dx,$$

que nos da

$$\log\mu(x)=-2\log x,$$

por lo que el factor integrante es $\mu(x)=1/x^2$ y la ecuación

$$2+\frac{y}{x^2}+\left(y-\frac{1}{x}\right)y'=0$$

es exacta. Existe por tanto $f(x,y)$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=2+\frac{y}{x^2},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=y-\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Integrando respecto de x la primera condición tenemos

$$f(x,y)=\int\left(2+\frac{y}{x^2}\right)dx=2x-\frac{y}{x}+g(y).$$

Derivando esta expresión respecto de y y sustituyendo en la segunda condción

$$-\frac{1}{x}+g'(y)=y-\frac{1}{x},$$

por lo que

$$g(y)=\int ydy=\frac{y^2}{2}$$

y $f(x,y)=2x-\frac{y}{x}+\frac{y^2}{2}$. La solución general de la ecuación es

$$2x-\frac{y}{x}+\frac{y^2}{2}=c,$$

y utilizando las condiciones iniciales

$$c=2-1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

por lo que

$$2x-\frac{y}{x}+\frac{y^2}{2}=\frac{3}{2}.$$

Nota. Despejando la variable dependiente obtenemos las soluciones

$$y(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 2\left(2x - \frac{3}{2}\right)}$$

y

$$y(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - 2\left(2x - \frac{3}{2}\right)}.$$

Notar que no se satisface el Teorema de existencia y unicidad de soluciones de problemas de condiciones iniciales.

Resolver

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solución. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

y calculemos sus valores propios mediante la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & -4 & -3 \\ 3 & 4-t & -1 \\ 1 & 4 & 5-t \end{vmatrix} = -t^3 + 10t^2 - 48t + 64 = 0,$$

que mediante el método de Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 10 & -48 & 64 \\ 2 & & -2 & 16 & -64 \\ \hline & -1 & 8 & -32 & 0 \end{array}$$

vemos que 2 es solución y resolviendo la ecuación $t^2 - 8t + 32 = 0$,

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 128}}{2} = 4 \pm 8i.$$

Calculamos ahora

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(t)} &= \frac{a_1}{t-2} + \frac{a_2}{t-4-8i} + \frac{a_3}{t-4+8i} \\ &= \frac{(a_1+a_2+a_3)t^2 - (8a_1 + (6-8i)a_2 + (6+8i)a_3)t + 32a_1 + (8-16i)a_2 + (8+16i)a_3}{-p(t)}, \end{aligned}$$

e igualando coeficientes

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ 8a_1 + (6-8i)a_2 + (6+8i)a_3 = 0, \\ 32a_1 + (8-16i)a_2 + (8+16i)a_3 = -1, \end{cases}$$

y resolvéndolo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 6-8i & 6+8i & 0 \\ 32 & 8-16i & 8+16i & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2-8F_1 \\ F_3-32F_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2-8i & -2+8i & 0 \\ 0 & -24-16i & -24+16i & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3-2F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2-8i & -2+8i & 0 \\ 0 & -20 & -20 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_2-\frac{1}{20}(2+8i)F_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16i & \frac{1}{10}+\frac{2}{5}i \\ 0 & -20 & -20 & -1 \end{array}\right),$$

con lo que

$$a_3 = \frac{1}{16i}\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{5}i\right) = -\frac{i}{16}\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{5}i\right) = \frac{1}{40}-\frac{1}{160}i,$$
$$a_2 = \frac{1}{20}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}i\right) = \frac{1}{40}+\frac{1}{160}i,$$
$$a_1 = -\frac{1}{20}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t-2} = -(t^2-8t+32), \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{t-4-8i} = -(t^2-(6-8i)t+8-16i), \\ q_1(t) &= \frac{p(t)}{t-4-8i} = -(t^2-(6+8i)t+8+16i). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^{2t}a_1(\mathbf{A})\cdot q_1(\mathbf{A}) + e^{(4+8i)t}a_2(\mathbf{A})\cdot q_2(\mathbf{A}) + e^{(4-8i)t}a_3(\mathbf{A})\cdot q_3(\mathbf{A}) \\ &= \frac{e^{2t}}{20}(\mathbf{A}^2-8\mathbf{A}+32\mathbf{I}_3) - \frac{e^{(4+8i)t}}{40}\left(1+\frac{i}{4}\right)(\mathbf{A}^2-(6-8i)\mathbf{A}+(8-16i)\mathbf{I}_3) \\ &\quad -\frac{e^{(4-8i)t}}{40}\left(1-\frac{i}{4}\right)(\mathbf{A}^2-(6+8i)\mathbf{A}+(8+16i)\mathbf{I}_3) \\ &= \frac{e^{2t}}{20}\begin{pmatrix} 10 & 0 & 10 \\ -10 & 0 & -10 \\ 10 & 0 & 10 \end{pmatrix} - \frac{e^{4t}}{40}e^{8it}\begin{pmatrix} -10-11i & -34i & 10-23i \\ -10+23i & -20+12i & -10-11i \\ 10+11i & 34i & -10+23i \end{pmatrix} \\ &\quad -\frac{e^{4t}}{40}e^{-8it}\begin{pmatrix} -10+11i & 34i & 10+23i \\ -10-23i & -20-12i & -10+11i \\ 10-11i & -34i & -10-23i \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^{2t}}{20}\begin{pmatrix} 10 & 0 & 10 \\ -10 & 0 & -10 \\ 10 & 0 & 10 \end{pmatrix} \\ &\quad +\frac{e^{4t}}{20}\begin{pmatrix} 10\cos(8t)-11\sin(8t) & -34\sin(8t) & -10\cos(8t)-23\sin(8t) \\ 10\cos(8t)+23\sin(8t) & 20\cos(8t)+12\sin(8t) & 10\cos(8t)-11\sin(8t) \\ -10\cos(8t)+11\sin(8t) & 34\sin(8t) & 10\cos(8t)+23\sin(8t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 10e^{2t}+e^{4t}a & -34\sin(8t) & 10e^{2t}-e^{4t}b \\ -10e^{2t}+e^{4t}b & 20\cos(8t)+12\sin(8t) & -10e^{2t}+e^{4t}a \\ 10e^{2t}-e^{4t}a & 34\sin(8t) & 10e^{2t}+e^{4t}b \end{pmatrix}$$

donde

$$a = 10\cos(8t) - 11\sin(8t)$$

y

$$b = 10\cos(8t) + 23\sin(8t)$$

y por lo tanto la solución de la ecuación homogénea es

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \\ z_h(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 10e^{2t}+e^{4t}a & -34\sin(8t) & 10e^{2t}-e^{4t}b \\ -10e^{2t}+e^{4t}b & 20\cos(8t)+12\sin(8t) & -10e^{2t}+e^{4t}a \\ 10e^{2t}-e^{4t}a & 34\sin(8t) & 10e^{2t}+e^{4t}b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Proponemos una solución particular del sistema no homogéneo $(x_p(t), y_p(t), z_p(t)) = (A, B, C)$, cuya derivada es $(0, 0, 0)$ y sustituyendo en el sistema no homogeneo y simplificando tenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \to_{\substack{F_2-3F_1 \\ F_3-F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -3 & -1 \\ 0 & 16 & 8 & 3 \\ 0 & 8 & 8 & 1 \end{array}\right) \to_{\substack{F_2-2F_3 \\ F_3-F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 8 & 8 & 1 \end{array}\right),$$

de donde $C = -1/8$, $B = 1/4$ y $A = -3/8$, y por tanto la solución general del sistema

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 10e^{2t}+e^{4t}a & -34\sin(8t) & 10e^{2t}-e^{4t}b \\ -10e^{2t}+e^{4t}b & 20\cos(8t)+12\sin(8t) & -10e^{2t}+e^{4t}a \\ 10e^{2t}-e^{4t}a & 34\sin(8t) & 10e^{2t}+e^{4t}b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Dado el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x' = 4x + 2y, \\ y' = 2x + y, \end{cases}$$

se pide

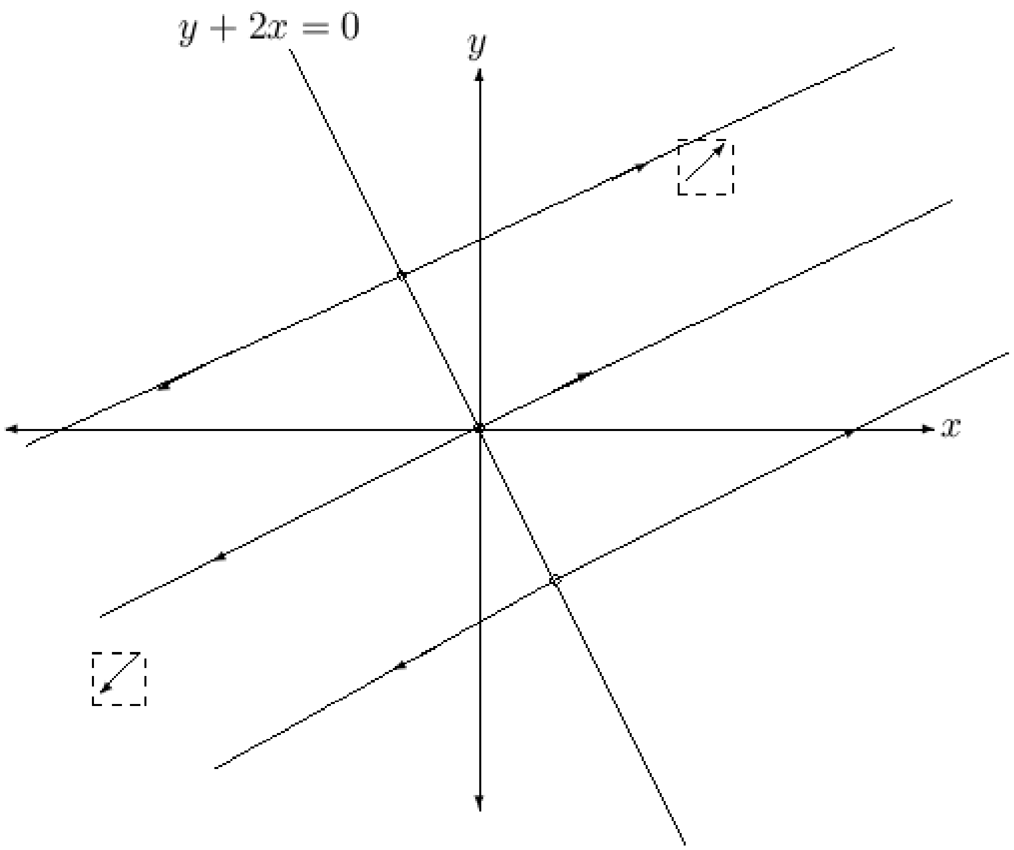
(a) Obtener el diagrama de fases del mismo.

(b) Estudiar la estabilidad de los puntos críticos del sistema.

Solución. (a) Es fácil ver que $2x + y = 0$ es una recta de puntos críticos del sistema. Por tanto no hay isoclinas. Vemos que en la región $2x + y > 0$ se verifica que $x' > 0$ e $y' > 0$. Lo contrario ocurre en la región $2x + y < 0$. Finalmente las integrales primeras son

$$y' = \frac{2x+y}{4x+2y} = \frac{1}{2},$$

por lo que integrando tenemos las rectas $y = \frac{x}{2} + c$, que cortarán a la recta de puntos críticos en un punto, dividiendo cada integral primera en tres órbitas: dos semirrectas separadas por un punto crítico. Con esta información esbozamos el diagrama



(b) Vemos a partir del dibujo que las órbitas se alejan de la recta de puntos críticos, por lo que éstos serán inestables.

La absorción (variación de la concentración) de una determinada droga por los tejidos es proporcional a la concentración de dicha sustancia en dicho tejido. La Thoephylina es administrada para tratar el asma. Una concentración en sangre por debajo de 5 miligramos por litro apenas produce efectos beneficiosos al paciente, mientras que si la concentración supera los 20 miligramos por litro aparecen efectos secundarios nocivos. Se administra al paciente una dosis inicial de 14 miligramos por litro, y una hora después se mide una concentración de 10 miligramos por litro. Determinar a qué hora se debe administrar una segunda dosis para evitar que la acción de la medicación sea ineficaz.

Solución. Sea $x(t)$ la concentración de medicación por unidad de tiempo. Entonces

$$x'(t) = kx(t),$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 14$ y $x(1) = 10$. Entonces integrando la ecuación diferencial

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int k dt,$$

de donde
$$x(t) = ce^{kt}.$$
de la primera condción inicial
$$x(0) = 14 = c,$$
y de la segunda
$$x(1) = 10 = 14e^{c},$$
con lo que
$$c = \log \frac{5}{7},$$
y la concentración sigue la ley
$$x(t) = 14e^{t \log \frac{5}{7}}.$$
Dicha función es estrictamente decreciente al verificarse que $x'(t) < 0$, por lo que calculamos el tiempo t_0 tal que $x(t_0) = 5$, momento a partir del cual la acción del medicamento es ineficaz. Resolviendo la ecuación
$$5 = 14e^{t_0 \log \frac{5}{7}},$$
obtenemos
$$t_0 = \frac{\log \frac{5}{14}}{\log \frac{5}{7}} = 3.06,$$
por lo que la siguiente dosis ha de suministrase a las tres horas aproximadamente.

Dada la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 2y + 2z, 2y + 3z)$$
se pide:

(a) Matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) Núcleo e imagen de $\mathbf{f}$.

(c) Matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$.

(d) Estudiar si la matriz obtenida en el apartado primero es diagonalizable y obtener en caso afirmativo su forma diagonal.

Solución. (a) Si denotamos por $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$,tenemos que
$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
(b) El núcleo satisface el sistema
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow_{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right),$$

por lo que $\operatorname{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0,\ 2y+3z=0\}$.

Por otra parte, un vector $(x,y,z) \in \operatorname{Im}\mathbf{f}$ si y sólo si existe $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Calculamos los rangos de las matrices del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 2 & 2 & 2 & y \\ 0 & 2 & 3 & z \end{array}\right) \rightarrow_{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & y-2x \\ 0 & 2 & 3 & z \end{array}\right),$$

y para que ambas matrices tengan rango dos debe de cumplirse que $y - 2x = 0$, por lo que $\operatorname{Im}\mathbf{f}\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y-2x=0\}$.

(c) La matriz pedida es

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}),$$

donde

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y $\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})]^{-1}$, y al calcular la inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow_{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow_{F_1-F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow_{(-1)F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

tenemos que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(d) Calculamos los valores propios mediante la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 1 \\ 2 & 2-t & 2 \\ 0 & 2 & 3-t \end{vmatrix} = -t(t^2-6t+5) = 0,$$

por lo que 0 es valor propio y los otros dos se calculan

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = 3 \pm 2,$$

por lo que los otros valores propios son 5 y 1. Al ser los tres valores propios distintos se verifica que la matriz es diagonalizable y su forma diagonal es

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones:

(a) Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el conjuto de polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales. Dados $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$, se define

$$< p(x), q(x) >= \int_{-1}^{1} x^4 p(x) q(x) dx.$$

Probar que se trata de un producto escalar.

(b) Dada la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$, obtener a partir de ella un base ortonormal de $\mathbb{R}_2[x]$ (usando el producto escalar anterior).

Solución. (a) Se verifican las siguentes propiedades:

- Dados $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle \alpha p(x) + \beta q(x), r(x) \rangle &= \int_{-1}^{1} x^4 (\alpha p(x) + \beta q(x)) r(x) dx \\ &= \alpha \int_{-1}^{1} x^4 p(x) r(x) dx + \beta \int_{-1}^{1} x^4 q(x) r(x) dx = \alpha \langle p(x), r(x) \rangle + \beta \langle q(x), r(x) \rangle, \end{aligned}$$

por lo que es lineal respecto de la primera coordenada.

- Dados $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ se tiene

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} x^4 p(x) q(x) dx = \int_{-1}^{1} x^4 q(x) p(x) dx = \langle q(x), p(x) \rangle,$$

por lo que es simétrica.

- Finalmente, dado $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ se tiene

$$\langle p, p \rangle = \int_{-1}^{1} x^4 p(x)^2 dx \geq 0$$

dado que $x^4p(x)^2 \geq 0$ para todo $x \in [-1,1]$. Además,

$$\int_{-1}^{1} x^4 p(x)^2 dx = 0$$

si y sólo si $x^4p(x)^2 = 0$ para todo $x \in [-1,1]$ al ser los polinomios funciones continuas en el intervalo $[-1,1]$. Como $x^4 \neq 0$, debe verificarse que $p(x) = 0$ para todo $x \in [-1,1]$.

(b) Construimos en primer lugar una base ortogonal $\mathcal{O} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ donde $\mathbf{v}_1 = 1$, y

$$\mathbf{v}_2 = x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}1 = x - \frac{\int_{-1}^{1} x^5 dx}{\int_{-1}^{1} x^4 dx} = x - \frac{5}{6},$$

$$\mathbf{v}_3 = x^2 - \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}1 - \frac{\langle x^2, x - \frac{5}{6}\rangle}{\langle x - \frac{5}{6}, x - \frac{5}{6}\rangle}\left(x - \frac{5}{6}\right) = x^2 - \frac{5}{7} + \frac{30}{71}\left(x - \frac{5}{6}\right) = x^2 + \frac{30}{71}x - \frac{530}{497}.$$

A continuación obtenemos una base ortonormal $\mathcal{N} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ donde

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{||\mathbf{v}_1||}\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{||\mathbf{v}_2||}\mathbf{v}_2 = 3\frac{\sqrt{994}}{71}\left(x - \frac{5}{6}\right),$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{||\mathbf{v}_3||}\mathbf{v}_3 = \frac{21}{286}\sqrt{1562}\left(x^2 + \frac{30}{71}x - \frac{530}{497}\right).$$

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada tal que $|\mathbf{A}^4| = 0$, demostrar que 0 es un valor propio de dicha matriz.

Solución. Como $|\mathbf{A}^4| = |\mathbf{A}|^4 = 0$, se tiene que $|\mathbf{A}| = 0$. Entonces

$$p(0) = |\mathbf{A} - 0\mathbf{I}_n| = |\mathbf{A}| = 0,$$

por lo que 0 es raíz del polinomio característico y por lo tanto valor propio de $\mathbf{A}$.

Sean λ y μ dos valores propios de una matriz cuadrada. ¿Es cierto que $\lambda + \mu$ es también un valor propio de $\mathbf{A}$?

Solución. Falso, basta tomar una matriz diagonal, por ejemplo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que tiene por valores propios ± 1 y su suma que es cero no es valor propio ya que el determinante de la matriz es distinto de cero.

Determinar una aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que cumple las siguientes condiciones: $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z=0,\ x=2y\}$, $\mathbf{f}(0,1,1,0) = (3,0,1,1)$ y $(1,1,1,0)$ es un vector propio de $\mathbf{f}$ asociado al valor propio 2. Determinar además si la matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica es o no diagonalizable.

Solución. Calculamos en primer lugar una base del núcleo mediante sus ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 2\lambda, \\ y = \lambda, \\ z = -3\lambda, \\ t = \mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

por lo que $(x,y,z,t) = \lambda(2,1,-3,0) + \mu(0,0,0,1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, y por lo tanto una base del núcleo es $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(\mathbf{f})} = \{(2,1,-3,0),(0,0,0,1)\}$. Tomamos $\mathcal{B} = \{(2,1,-3,0),(0,0,0,1),(0,1,1,0),(1,1,1,0)\}$ y veamos que se trata de una base de $\mathbb{R}^4$ comprobando que son linealmente independientes mediante el cálculo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to_{F_1 \times F_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \to_{F_4 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\to_{F_4 \times F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to_{F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de donde se ve que el rango de la matriz es cuatro y por lo tanto $\mathcal{B}$ es una base. Entonces la aplicación lineal que buscamos satisface

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(2,1,-3,0) &= (0,0,0,0), \\ \mathbf{f}(0,0,0,1) &= (0,0,0,0), \\ \mathbf{f}(0,1,1,0) &= (3,0,1,1), \\ \mathbf{f}(1,1,1,0) &= (2,2,2,0), \end{aligned}$$

por lo que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\mathcal{C}$ denota la base canónica de $\mathbb{R}^4$. Buscamos

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i})$$

con

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})]^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1},$$

y al calcular la inversa

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[F_2\times F_1]{}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\substack{F_2-2F_1\\ F_3+3F_1}]{}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 3 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[F_2\times F_4]{}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 3 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -2 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[F_3+2F_4]{}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -2 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}F_3\\ -\frac{1}{2}F_4}]{}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[F_3\times F_4]{}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\substack{F_3-\frac{1}{2}F_4\\ F_1-F_4}]{}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[F_1-F_3]{}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0
\end{array}\right),
$$

por lo que

$$
\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\
1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0
\end{pmatrix}
$$

y

$$
\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 3 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
-1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\
1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
-1 & \frac{11}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\
2 & -1 & 1 & 0 \\
1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\
-1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 0
\end{pmatrix}.
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}(x,y,z,t) &= \left(\begin{pmatrix} -1 & \frac{11}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ -1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \right)^t \\
&= \left(-x + \frac{11}{4}y + \frac{1}{4}z, 2x - y + z, x + \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z, -x + \frac{5}{4}y - \frac{1}{4}z \right).
\end{aligned}
$$

Para ver si la matriz es diagonalizable calculamos sus valores propios mediante la ecuación

$$
p(t) = \begin{vmatrix} -1-t & \frac{11}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 2 & -1-t & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}-t & 0 \\ -1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -t \end{vmatrix} = t^2 \left(t^2 + \frac{5}{4}t - \frac{13}{2} \right) = 0,
$$

de tonde 0 es valor propio de multiplicidad dos y los otros valores propios son

$$
t = \frac{-\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{26} + 26}}{2} = -\frac{5}{8} \pm \frac{\sqrt{701}}{2\sqrt{26}},
$$

que son distintas. Como $\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{A}) = \dim \operatorname{Ker}(\mathbf{f}) = 2$, se tiene que la matriz es diagonalizable.

Capítulo 18

14–2–2004

Enunciado

1. Dada la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x - y - z, 2y, -x - y + z)$$

se pide:

   (a) **(1 punto)** Matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   (b) **(2 puntos)** Núcleo e imagen de $\mathbf{f}$.

   (c) **(3 puntos)** Matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, -1, 1)\}$.

   (d) **(4 puntos)** Estudiar si la matriz del apartado primero es diagonalizable y en caso afirmativo hallar su forma diagonal junto con las matrices de cambio.

2. Sea $\mathbb{R}^4$ dotado con el producto escalar usual. Sean

$$\mathcal{W}_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$$

y

$$\mathcal{W}_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0, \;\; z - t = 0\}.$$

Se pide

   (a) **(5 puntos)** Comprobar que $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ y calcular los subespacios $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ y $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$. ¿Es la suma directa? Obtener ademas bases y dimensiones de $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$, $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ y $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.

   (b) **(5 puntos)** Obtener una base ortonornal de $\mathcal{W}_1$ y hallar las coordenadas en dicha base del vector $(1, -1, 1, -1)$.

3. **(10 puntos)** Determinar una aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumple las siguientes condiciones: $(1, 1, 1)$ es un vector propio asociado al valor propio -1, y para todo $(x, y, z) \in \mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y\}$ se cumple que $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, 0, x)$. Obtener la matriz asociada a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, determinar si es diagonalizable, y en caso afirmativo obtener su forma diagonal.

4. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales y problemas de condiciones iniciales:

(a) **(3 puntos)** $y'' - 6y' + 5y = t + e^{5t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

(b) **(2 puntos)** $(x^2 + y^2 + x) + xyy' = 0$. (**Repetido 10–6–2003**)

(c) **(5 puntos)** Resolver el sistema

$$\begin{cases} x' = 2x + y + e^{2t}, \\ y' = x + 2y, \end{cases}$$

con las condiciones iniciales $x(0) = y(0) = 1$. ¿Es estable el punto crítico del sistema homogéneo?

5. **(10 puntos)** Dado el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x' = 2y, \\ y' = x + y, \end{cases}$$

estudiar su diagrama de fases. Estudiar la estabilidad del punto crítico del sistema.

Examen resuelto

Dada la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x - y - z, 2y, -x - y + z)$$

se pide:

(a) Matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) Núcleo e imagen de $\mathbf{f}$.

(c) Matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, -1, 1)\}$.

(d) Estudiar si la matriz del apartado primero es diagonalizable y en caso afirmativo hallar su forma diagonal junto con las matrices de cambio.

Solución. (a) Si denotamos por $\mathcal{C}$ la base cacnónica de $\mathbb{R}^3$, se tiene que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Los vectores del núcleo satisfacen el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to_{F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

nos da que $y = 0$ y $x = z$, por lo que $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0,\ x = z\}$.

Por otra parte, un vector $(x, y, z) \in \mathrm{Im}\,\mathbf{f}$ si y sólo si existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

y al calcular los rangos de las matrices del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & x \\ 0 & 2 & 0 & y \\ -1 & -1 & 1 & z \end{array}\right) \to_{F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & x \\ 0 & 2 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & z+x \end{array}\right) \to_{F_2-2F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & x \\ 0 & 0 & 0 & y-2x-2z \\ 0 & 1 & 0 & z+x \end{array}\right),$$

tenemos que para que ambos rangos sean dos debe verificarse que $y - 2x - 2z = 0$, por lo que $\mathrm{Im}\,\mathbf{f} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - 2x - 2z = 0\}$.

(c) La matriz pedida es

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}),$$

donde

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})]^{-1}$, y al calcular la inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to_{F_1 \times F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to_{\substack{F_1+F_3 \\ F_2-F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

tenemos que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}).$$

(d) Calculamos en primer lugar los valores propios a partir de la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & -1 & -1 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -1 & -1 & 1-t \end{vmatrix} = -t(t-2)^2 = 0,$$

por lo que los valores propios son 0 y 2, que tendrá multiplicidad dos. Para ver si es diagonalizable calculamos $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3)$ mediante el sistema

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

por lo que $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$, y por tanto las ecuaciones paramétricas son

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\lambda - \mu, \\ y = \lambda, \qquad\qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\ z = \mu, \end{array} \right.$$

por lo que $(x, y, z) = \lambda(-1, 1, 0) + \mu(-1, 0, 1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, y así una base del subespacio propio es $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-2\mathbf{I}_3)} = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$. Por tanto la dimensión de dicho espacio propio es dos y la matriz es diagonalizable con forma diagonal

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para calcular las matrices de cambio de base, hemos de obtener además una base de $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0,\ x = z\}$, cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda, \\ y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = \lambda, \end{array} \right.$$

y $(x,y,z) = \lambda(1,0,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y una base es $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(\mathbf{A})} = \{(1,0,1)\}$, y una base de vectores propios que da lugar a la forma diagonal $\mathbf{D}$ es $\mathcal{B} =\{(-1,1,0),(-1,0,1),(1,0,1)\}$. Entonces

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1},$$

donde

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

y calculando su inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \times F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow_{F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3+F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow_{\substack{(-1)F_2 \\ \frac{1}{2}F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{F_2+F_3}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

tenemos que

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Sea $\mathbb{R}^4$ dotado con el producto escalar usual. Sean

$$\mathcal{W}_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t=0\}$$

y

$$\mathcal{W}_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x-y=0, \;\; z-t=0\}.$$

Se pide

(a) Comprobar que $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ y calcular los subespacios $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ y $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$. ¿Es la suma directa? Obtener ademas bases y dimensiones de $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$, $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ y $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.

(b) Obtener una base ortonornal de $\mathcal{W}_1$ y hallar las coordenadas en dicha base del vector $(1,-1,1,-1)$.

Solución. (a) Veamos que $\mathcal{W}_1$ es subespacio vectorial. Para ello sean $(x_1,y_1,z_1,t_1),(x_2,y_2,z_2,t_2) \in \mathcal{W}_1$ y $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ y calculemos

$$\alpha(x_1,y_1,z_1,t_1)+\beta(x_2,y_2,z_2,t_2) = (\alpha x_1+\beta x_2, \alpha y_1+\beta y_2, \alpha z_1+\beta z_2, \alpha t_1+\beta t_2)$$

y

$$\begin{aligned} & (\alpha x_1+\beta x_2)+(\alpha y_1+\beta y_2)+(\alpha z_1+\beta z_2)+(\alpha t_1+\beta t_2) \\ = \;& \alpha(x_1+y_1+z_1+t_1)+\beta(x_2+y_2+z_2+t_2) = 0+0=0, \end{aligned}$$

por lo que $\mathcal{W}_1$ es subespacio vectorial.

Comprobemos lo mismo para $\mathcal{W}_2$. Sean $(x_1,y_1,z_1,t_1),(x_2,y_2,z_2,t_2) \in \mathcal{W}_2$ y $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ y calculemos

$$\alpha(x_1,y_1,z_1,t_1)+\beta(x_2,y_2,z_2,t_2) = (\alpha x_1+\beta x_2, \alpha y_1+\beta y_2, \alpha z_1+\beta z_2, \alpha t_1+\beta t_2)$$

y

$$(\alpha x_1+\beta x_2)-(\alpha y_1+\beta y_2) = \alpha(x_1-y_1)+\beta(x_2-y_2) = 0+0=0,$$

$$(\alpha z_1+\beta z_2)-(\alpha t_1+\beta t_2) = \alpha(z_1-t_1)+\beta(z_2-t_2) = 0+0=0,$$

y así $\mathcal{W}_2$ también es subespacio vectorial.

Un vector $(x,y,z,t) \in \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ si y sólo si satisface las ecuaciones de $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$, esto es satisfaciendo el sistema

$$\begin{cases} x+y+z+t=0, \\ x-y=0, \\ z-t=0, \end{cases}$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to_{F_2-F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

y por tanto $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+t=0,\ x-y=0,\ z-t=0\}$. Las ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = -\lambda, \\ y = -\lambda, \\ z = \lambda, \\ t = \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

y entonces $(x,y,z,t) = \lambda(-1-1,1,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y una base es $\mathcal{B}_{\mathcal{W}_1\cap\mathcal{W}_2} = \{(-1,-1,1,1)\}$ y $\dim \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = 1$.

Por otra parte, las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{W}_1$ son

$$\begin{cases} x = -\lambda-\mu-\nu, \\ y = \lambda, \\ z = \mu, \\ t = \nu, \end{cases} \quad \lambda,\mu,\nu \in \mathbb{R},$$

por lo que un vector de $\mathcal{W}_1$ satisface

$$(x,y,z,t) = -\lambda(1,-1,0,0) - \mu(1,0,-1,0) - \nu(1,0,0,-1),\ \lambda,\mu,\nu \in \mathbb{R},$$

por lo que una base de $\mathcal{W}_1$ es $\mathcal{B}_{\mathcal{W}_1} = \{(1,-1,0,0),(1,0,-1,0),(1,0,0,-1)\}$. Similarmente

$$\begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = \mu, \\ t = \mu, \end{cases} \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R},$$

son las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{W}_2$ y entonces todo vector de este subespacio es de la forma

$$(x,y,z,t) = \lambda(1,1,0,0) + \mu(0,0,1,1),\ \lambda,\mu \in \mathbb{R},$$

y así una base es $\mathcal{B}_{\mathcal{W}_2} = \{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$. Entonces

$$\dim(\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2) = \dim \mathcal{W}_1 + \dim \mathcal{W}_2 - \dim(\mathcal{W}_1\cap\mathcal{W}_2) = 3+2-1 = 4,$$

por lo que $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \mathbb{R}^4$.

(b) Partimos de la base $\mathcal{B}_{\mathcal{W}_1} = \{(1,-1,0,0),(1,0,-1,0),(1,0,0,-1)\}$ y construyamos en primer lugar una base ortogonal $\mathcal{O} = \{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ donde $\mathbf{v}_1 = (1,-1,0,0)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= (1,0,-1,0) - \frac{\langle (1,0,-1,0),(1,-1,0,0)\rangle}{\langle (1,-1,0,0),(1,-1,0,0)\rangle}(1,-1,0,0) \\ &= (1,0,-1,0) - \frac{1}{2}(1,-1,0,0) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1,0\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 &= (1,0,0,-1) - \frac{\langle (1,0,0,-1),(1,-1,0,0)\rangle}{\langle (1,-1,0,0),(1,-1,0,0)\rangle}(1,-1,0,0) \\ &\quad - \frac{\left\langle (1,0,0,-1),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1,0\right)\right\rangle}{\left\langle \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1,0\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1,0\right)\right\rangle}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1,0\right) \\ &= (1,0,0,-1) - \frac{1}{2}(1,-1,0,0) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1,0\right) = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},-1\right). \end{aligned}$$

Obtenemos ahora una base ortonormal $\mathcal{N} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ con

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{||\mathbf{v}_1||}\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1, 0, 0),$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{||\mathbf{v}_2||}\mathbf{v}_2 = \frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0\right),$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{||\mathbf{v}_3||}\mathbf{v}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1\right).$$

Tengamos en cuenta que

$$(1, -1, 1, -1) = \alpha\frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1, 0, 0) + \beta\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0\right) + \gamma\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1\right),$$

de donde obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \alpha\frac{\sqrt{2}}{2} + \beta\frac{\sqrt{6}}{6} + \gamma\frac{\sqrt{3}}{6} = 1, \\ -\alpha\frac{\sqrt{2}}{2} + \beta\frac{\sqrt{6}}{6} + \gamma\frac{\sqrt{3}}{6} = -1, \\ -\beta\frac{\sqrt{6}}{3} + \gamma\frac{\sqrt{3}}{6} = 1, \\ -\gamma\frac{\sqrt{3}}{2} = -1, \end{cases}$$

donde

$$\gamma = \frac{2\sqrt{3}}{3},\ \beta = -\frac{\sqrt{6}}{3},\ \alpha = \sqrt{2},$$

y las coordenadas son $\left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)_{\mathcal{N}}$.

Determinar una aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumple las siguientes condiciones: $(1, 1, 1)$ es un vector propio asociado al valor propio -1, y para todo $(x, y, z) \in \mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y\}$ se cumple que $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, 0, x)$. Obtener la matriz asociada a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, determinar si es diagonalizable, y en caso afirmativo obtener su forma diagonal.

Solución. Las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{W}$ son

$$\begin{cases} x = -\lambda, \\ y = \lambda, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\ z = \mu, \end{cases}$$

por lo que $(x, y, z) = \lambda(-1, 1, 0) + \mu(0, 0, 1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, y una base es $\mathcal{B}_{\mathcal{W}} = \{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y comprobamos que $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ calculando el rango

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to_{F_3+F_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to_{F_3 \times F_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que el rango es tres y $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ sobre la cual la aplicación lineal actúa de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(-1,1,0) &= (1,0,-1),\\ \mathbf{f}(0,0,1) &= (0,0,0),\\ \mathbf{f}(-1,1,0) &= (-1,-1,-1),\end{aligned}$$

por lo que si $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ se verifica que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}),$$

donde

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})]^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

y haciendo los cálculos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow_{F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow_{F_2\times F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow_{\substack{\frac{1}{2}F_3\\(-1)F_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \rightarrow_{\substack{F_2-F_3\\F_1+F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right),$$

con lo que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

y así

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(x,y,z) &= \left(\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)^t = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)^t \\ &= \left(-x, -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y, -y\right).\end{aligned}$$

Para ver si la matriz $\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f})$ es diagonalizable calculamos los valores propios mediante la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} -1-t & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}-t & 0 \\ 0 & -1 & -t \end{vmatrix} = -t(t+1)\left(t+\frac{1}{2}\right) = 0,$$

con lo que los tres valores propios son 0, -1 y $-\frac{1}{2}$, que al ser distintos implica que la matriz es diagonalizable y que su forma diagonal es

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Resolver

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 5y = t + e^{5t}, \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Solución. Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea por medio de la ecuación característica

$$t^2 - 6t + 5 = 0,$$

de donde

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = 3 \pm 2,$$

que nos da 5 y 1 como soluciones y la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^t.$$

Proponemos como solución de la ecuación no homogénea $y_p(t) = At + B + Cte^{5t}$, y derivando dos veces

$$y_p'(t) = A + (5Ct + C)e^{5t},$$
$$y_p''(t) = (25Ct + 10C)e^{5t},$$

sustituyendo en la ecuación no homogénea y simplificando

$$4Ce^{5t} + 5At + 5B - 6A = t + e^{5t},$$

e igulando coeficientes obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 4C = 1, \\ 5A = 1, \\ 5B - 6A = 0, \end{cases}$$

de donde $C = 1/4$, $A = 1/5$ y $B = 6/25$ y la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y(t) = c_1 e^{5t} + c_2 e^t + \frac{1}{5}t + \frac{6}{25} + \frac{1}{4}te^{5t}.$$

Usando las condiciones iniciales derivando previamente la solución general

$$y'(t) = 5c_1 e^{5t} + c_2 e^t + \frac{1}{5} + \left(\frac{5}{4}t + \frac{1}{4}\right)e^{5t},$$

obtenemos el sistema

$$\begin{cases} y(0) = 0 = c_1 + c_2 + \frac{6}{25}, \\ y'(0) = 1 = 5c_1 + c_2 + \frac{1}{5} + \frac{1}{4}, \end{cases}$$

y fácilmente $c_1 = 79/400$ y $c_2 = -7/16$ y la solución del problema de condiciones iniciales

$$y(t) = \frac{79}{400}e^{5t} - \frac{7}{16}e^{t} + \frac{1}{5}t + \frac{6}{25} + \frac{1}{4}te^{5t}.$$

Resolver

$$(x^2 + y^2 + x) + xyy' = 0.$$

(**Repetido 10–6–2003**)

Solución. Sean $P(x,y) = x^2 + y^2 + x$ y $Q(x,y) = xy$. Entonces

$$2y = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = y,$$

por lo que la ecuación no es exacta y hemos de buscar un factor integrante $\mu(x,y)$ mediante la ecuación

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\mu(x,y) + P(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\mu(x,y) + Q(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y)$$

que nos da

$$2y\mu(x,y) + (x^2 + y^2 + x)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) = y\mu(x,y) + xy\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y).$$

Suponiendo que $\mu(x)$, la ecuación anterior se simplifica a

$$\mu(x) = x\mu'(x),$$

que integrando

$$\int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}dx = \int \frac{dx}{x},$$

con lo que obtenemos

$$\mu(x) = x.$$

Entonces la ecuación

$$x^3 + y^2x + x^2 + x^2yy' = 0$$

es exacta, por lo que existe $f(x,y)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= x^3 + y^2x + x^2, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x^2y. \end{aligned}$$

Utilizando la primera condición

$$f(x,y) = \int (x^3 + y^2x + x^2)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{y^2x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + g(y),$$

y derivando esta expresión respecto de y y sustituyendo en la segunda condición

$$x^2y + g'(y) = x^2y,$$

de donde $g'(y) = 0$ y por tanto $g(y)$ es constante y así la función buscada es $f(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^2x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ y la solución general de la ecuación diferencial es

$$\frac{x^4}{4} + \frac{y^2x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = c.$$

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x' = 2x + y + e^{2t}, \\ y' = x + 2y, \end{cases}$$

con las condiciones iniciales $x(0) = y(0) = 1$. ¿Es estable el punto crítico del sistema homogéneo?

Solución. Escribimos el sistema de forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix},$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores propios de la matriz del sistema mediante la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & 2-t \end{vmatrix} = t^2 - 4t + 3 = 0,$$

de donde

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = 2 \pm 1,$$

por lo que los valores propios son 3 y 1. Calculamos ahora

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{a_1}{t-3} + \frac{a_2}{t-1} = \frac{(a_1+a_2)t - a_1 - 3a_2}{p(t)},$$

e igualando coeficientes tenemos el sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ -a_1 - 3a_2 = 1, \end{cases}$$

de donde fácilmente obtenemos que $a_1 = -a_2 = 1/2$. Por otra parte

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t-3} = t - 1, \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{t-1} = t - 3. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^{3t}a_1(\mathbf{A}) \cdot q_1(\mathbf{A}) + e^t a_2(\mathbf{A}) \cdot q_2(\mathbf{A}) \\ &= \frac{e^{3t}}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) - \frac{e^t}{2}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_2) \\ &= \frac{e^{3t}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{e^t}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{3t}+e^t & e^{3t}-e^t \\ e^{3t}-e^t & e^{3t}+e^t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y la solución general del sistema homogéneo es

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \end{pmatrix} = e^{t\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^t & e^{3t} - e^t \\ e^{3t} - e^t & e^{3t} + e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Proponemos ahora como solución particular del sistema no homogéneo $x_p(t) = Ae^{2t}$ y $y_p(t) = Be^{2t}$, calculamos sus derivadas $x_p'(t) = 2Ae^{2t}$ y $y_p'(t) = 2Be^{2t}$, sustituimos en el sistema no homogéneo

$$\begin{cases} 2Ae^{2t} = 2Ae^{2t} + Be^{2t} + e^{2t}, \\ 2Be^{2t} = Ae^{2t} + 2Be^{2t}, \end{cases}$$

y simplificando e igualando doeficientes construimos el sistema

$$\begin{cases} B = -1, \\ A = 0, \end{cases}$$

que obviamente está resuelto y nos proporciona la solución general del sistema no homogéneo

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^t & e^{3t} - e^t \\ e^{3t} - e^t & e^{3t} + e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{2t} \end{pmatrix},$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} x(t) = \frac{c_1+c_2}{2}e^{3t} + \frac{c_1-c_2}{2}e^t, \\ y(t) = \frac{c_1+c_2}{2}e^{3t} - \frac{c_1-c_2}{2}e^t - e^{2t}. \end{cases}$$

El punto crítico del sistema homogéneo es inestable al ser los dos valores propios de la matriz del sistema positivos.

Dado el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x' = 2y, \\ y' = x + y, \end{cases}$$

estudiar su diagrama de fases. Estudiar la estabilidad del punto crítico del sistema.

Solución. Es sencillo ver que $(0,0)$ es el único punto crítico del sistema. Las isoclinas son las rectas $y = 0$ e $y = -x$. En la primera se tiene que $x' = 0$ e $y' = x$, por lo que $y' > 0$ si $x > 0$ e $y' < 0$ si $x < 0$. En la segunda isoclina se verifica que $y' = 0$ y $x' = 2y$, por lo que $x' > 0$ si $y > 0$ e $x' < 0$ si $y < 0$. Calculamos ahora los valores propios de la matriz del sistema con la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} -t & 2 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - t - 2 = 0,$$

con lo que

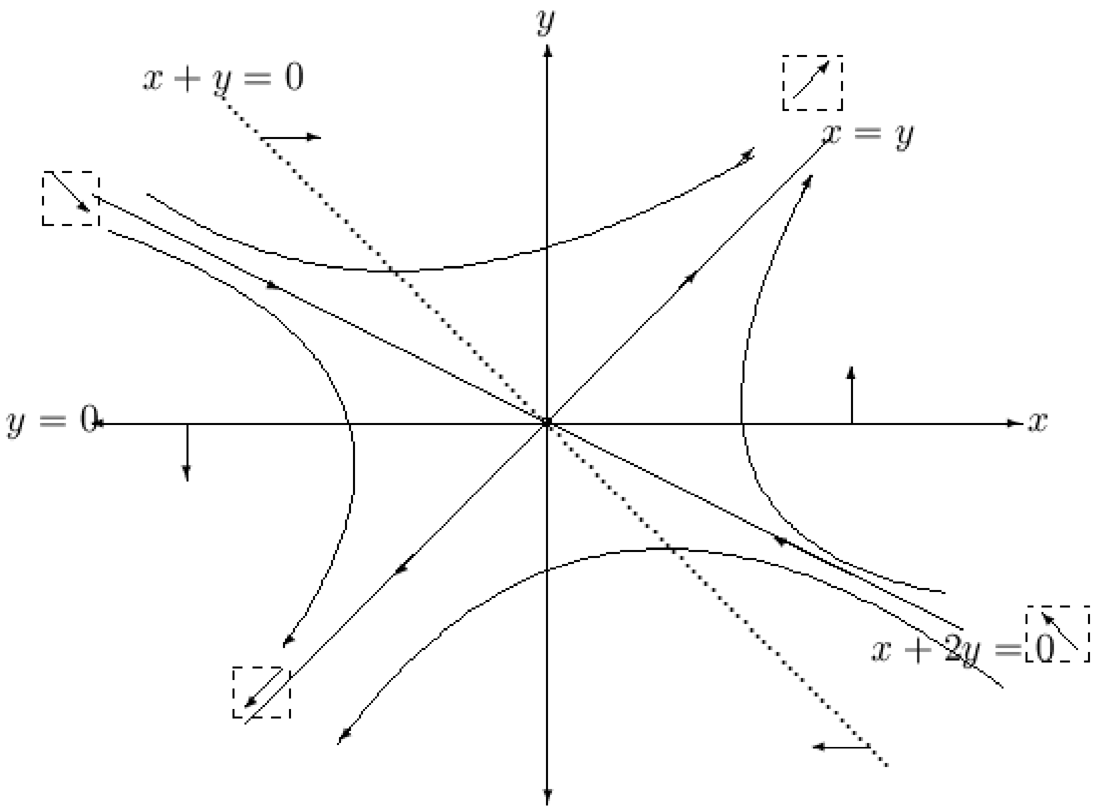
$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2},$$

por lo que los valores propios son 2 y -1. Calculamos los subespacios propios

$$\operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\},$$

$$\operatorname{Ker}(\mathbf{A} + \mathbf{I}_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}.$$

Tenemos entonces el diagrama de fases



Capítulo 19

3–6–2004

Enunciado

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales y problemas de condiciones iniciales:

   (a) **(1 punto)** $2xy^4e^y + 2xy^3 + y + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)y' = 0$.

   (b) **(1 punto)** $y'' + 2y' + y = x + e^{-x},\ y(0) = y'(0) = 0$.

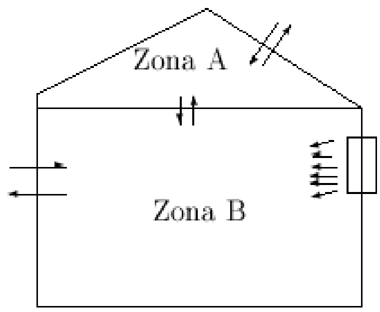
   (c) **(2 puntos)** $x' = x + y$; $y' = y + e^{-t}$; $x(0) = y(0) = 0$.

2. **(2.5 puntos)** Esbozar el diagrama de fases del siguiente sistema autónomo, indicando si el punto crítico es o no estable.

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -x. \end{cases}$$

3. **(1 punto)** Determinar una curva que pasa por el punto $(1, 1)$ y su recta tangente en cada punto corta al eje Y en el punto $2xy^2$.

4. **(2.5 puntos)** Para fines de refrigeración una casa consta de dos zonas: la zona de ático A y la zona B o habitacional. El área habitacional es refrigerada por medio de una unidad de aire acondicionado que disipa 12000 kilocalorias por hora. La capacidad calorífica de la zona B es de 1/4 grado centígrado por cada 1000 kilocalorias. La constantes de transferencia de calor son 2 horas entre la zona A y el exterior, 4 horas entre la zona B y el exterior y 4 horas entre ambas zonas. Si la temperatura exterior permanece a 35 grados centígrados, ¿a qué temperatura puede llegar a calentarse la zona del ático?



Nota: las constantes de transferencia de calor son las inversas de las constantes que aparecen el la ley de enfriamiento de Newton.

5. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales y problemas de condiciones iniciales:

   (a) **(1 punto)** $\dfrac{y^2}{2} + 2ye^x + (y + e^x)y' = 0$.

   (b) **(1 punto)** $x^2y'' + 4xy' + 2y = x \log x$.

   (c) **(2 puntos)** $x' = y$; $y' = -x - y$; $x(0) = y(0) = 1$.

6. **(2.5 puntos)** Esbozar el diagrama de fases del siguiente sistema autónomo, indicando si el punto crítico es o no estable.

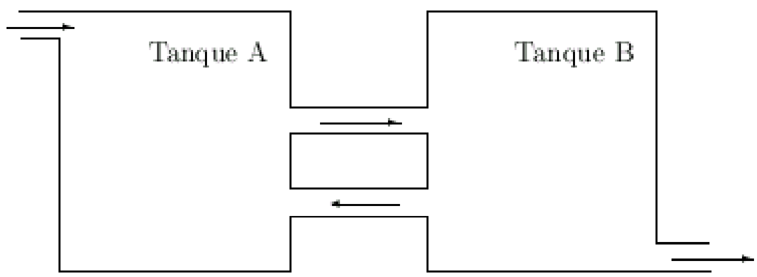
$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = -x. \end{cases}$$

7. **(1 punto)** Cuál es la única ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes de orden 4 que tiene las siguientes funciones linealmente independientes

$$\{y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^x + xe^x, y_3(x) = x + e^x + xe^x\}.$$

   Razonar la respuesta.

8. **(2.5 puntos)** Dos tanques de 60 litros de capacidad están conectados entre sí y con el exterior según muestra la siguiente figura:



   Del exterior fluye hacia el tanque A una disolución de agua salada con una concentración de $3\,kg/l$ a una velocidad de $4\,l/m$. A la misma velocidad sale el agua hacia el exterior por el tanque B. El líquido fluye del tanque A hacia el tanque B a $6\,l/m$ y del tanque B al tanque A a $2\,l/m$. Las disoluciones en ambos tanques están permanentemente bien agitadas. Inicialmente había $10\,kg$ de sal en el tanque A y no había sal en el B. Determinar las cantidades máximas de sal que puede haber en cada tanque.

Examen resuelto

Resolver
$$2xy^4e^y + 2xy^3 + y + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)y' = 0.$$

Solución. Sean $P(x,y) = 2xy^4e^y + 2xy^3 + y$ y $Q(x,y) = x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x$ y calculamos
$$8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1 = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3,$$
por lo que no es exacta y hemos de buscar un factor integrante $\mu(x,y)$ mediante la ecuación
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\mu(x,y) + P(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\mu(x,y) + Q(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y)$$
que nos da
$$\begin{aligned} & (8xy^3e^y + 2xy^4e^y + 6xy^2 + 1)\mu(x,y) + (2xy^4e^y + 2xy^3 + y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) \\ = \; & (2xy^4e^y - 2xy^2 - 3)\mu(x,y) + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y), \end{aligned}$$
y simplificando
$$(8xy^3e^y + 8xy^2 + 4)\mu(x,y) = (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y) - (2xy^4e^y + 2xy^3 + y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y),$$
y suponiendo que $\mu(y)$ y simplificando
$$4\mu(y) = -y\mu'(y),$$
e integrando
$$\int \frac{\mu'(y)}{\mu(y)}dy = -\int \frac{4}{y}dy,$$
obtenemos que
$$\mu(y) = \frac{1}{y^4}.$$
Así la ecuación
$$2xe^y + 2\frac{x}{y} + \frac{1}{y^3} + \left(x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - 3\frac{x}{y^4}\right)y' = 0$$
es exacta y existe $f(x,y)$ tal que
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2xe^y + 2\frac{x}{y} + \frac{1}{y^3}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x^2e^y - \frac{x^2}{y^2} - 3\frac{x}{y^4}. \end{aligned}$$

Integrando respecto de x la primera condición

$$f(x,y)=\int\left(2xe^y+2\frac{x}{y}+\frac{1}{y^3}\right)dx=x^2e^y+\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^3}+g(y),$$

y derivando respecto de y esta última expresión y sustituyendo en la segunda condición

$$x^2e^y-\frac{x^2}{y^2}-3\frac{x}{y^4}+g'(y)=x^2e^y-\frac{x^2}{y^2}-3\frac{x}{y^4},$$

y entonces $g'(y)=0$ y por tanto es constante. Por tanto $f(x,y)=x^2e^y+\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^3}$ y la solución general viene dada por

$$x^2e^y+\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^3}=c.$$

Resolver

$$\begin{cases} y''+2y'+y=x+e^{-x}, \\ y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$$

Solución. Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea mediante la ecuación característica

$$x^2+2x+1=0=(x+1)^2,$$

por lo que -1 es la única solución doble y la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}.$$

Proponemos unas solución particular de la forma $y_p(x)=Ax+B+Cx^2e^{-x}$, y derivando dos veces

$$y_p'(x)=A+(2xC-Cx^2)e^{-x},$$

$$y_p''(x)=(2C-4xC+Cx^2)e^{-x},$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea y simplificando

$$2Ce^{-x}+2A+B+Ax=x+e^{-x},$$

obtenemos igualando coeficientes

$$\begin{cases} 2C=1, \\ 2A+B=0, \\ A=1, \end{cases}$$

de donde $A=1$, $B=-2$ y $C=1/2$, y la solución general de la ecuación no homogénea

$$y(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+x-2+\frac{1}{2}x^2e^{-x}.$$

Utilizando las condiciones iniciales derivando previamente la solución general

$$y'(x)=(c_2-c_1)e^{-x}-c_2xe^{-x}+1-\frac{1}{2}x^2e^{-x}+xe^{-x},$$

obtenemos el sistema

$$\begin{cases} y(0) = 0 = c_1 - 2, \\ y'(0) = 0 = c_2 - c_1 + 1, \end{cases}$$

por lo que $c_1 = 2$ y $c_2 = 1$ y la solución del problema de condiciones iniciales

$$y(x) = 2e^{-x} + xe^{-x} + x - 2 + \frac{1}{2}x^2 e^{-x}.$$

Resolver

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = y + e^{-t}, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

Solución. Démonos cuenta que la segunda ecuación sólo depende de y, por la que podemos resolverla directamente. Para ello calculamos la solución de la ecuación homogénea $y_h(t) = c_2 e^t$.Como solución particular de la ecuación no homogénea proponemos $y_p(t) = Ae^{-t}$, que al derivarla $y_p'(t) = -Ae^{-t}$, y sustituirla nos da

$$-2Ae^{-t} = e^{-t},$$

por lo que $-2A = 1$ y $A = -1/2$, y la solución general de dicha ecuación es

$$y(t) = c_2 e^t - \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Resolvemos ahora la segunda ecuación

$$x' = x + c_2 e^t - \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Es fácil ver que $x_h(t) = c_1 e^t$ es la solución de la ecuación homogénea. Proponemos $x_p(t) = Ate^t + Be^{-t}$ como solución particular de la ecuación no homogénea. Derivándola

$$x_p'(t) = (At + A)e^t - Be^{-t},$$

y sustituyéndola en la ecuación no homogénea y simplificando

$$Ae^t - 2Be^{-t} = c_2 e^t - \frac{1}{2}e^{-t},$$

e igulando coeficientes obtenemos el sistema

$$\begin{cases} A = c_2, \\ -2B = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

por lo que $A = c_2$ y $B = 1/4$, por lo que la solución general es

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 te^t + \frac{1}{4}e^{-t}.$$

Utilizamos las condiciones iniciales

$$\begin{cases} x(0) = 0 = c_1 + \frac{1}{4}, \\ y(0) = 0 = c_2 - \frac{1}{2}, \end{cases}$$

de donde $c_1 = -1/4$ y $c_2 = 1/2$ y la solución del problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{4}e^{-t}, \\ y(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}. \end{cases}$$

Esbozar el diagrama de fases del siguiente sistema autónomo, indicando si el punto crítico es o no estable.

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = -x. \end{cases}$$

Solución. Es sencillo ver que $(0,0)$ es el único punto crítico del sistema. Las isoclinas son las rectas $y = x$ y $x = 0$. En la primera se tiene que $x' = 0$ e $y' = -x$, por lo que $y' > 0$ si $x < 0$ e $y' < 0$ si $x > 0$. En la segunda isoclina se verifica que $y' = 0$ y $x' = -y$, por lo que $x' > 0$ si $y < 0$ e $x' < 0$ si $y > 0$. Calculamos ahora los valores propios de la matriz del sistema con la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & -1 \\ -1 & -t \end{vmatrix} = t^2 - t - 1 = 0,$$

con lo que

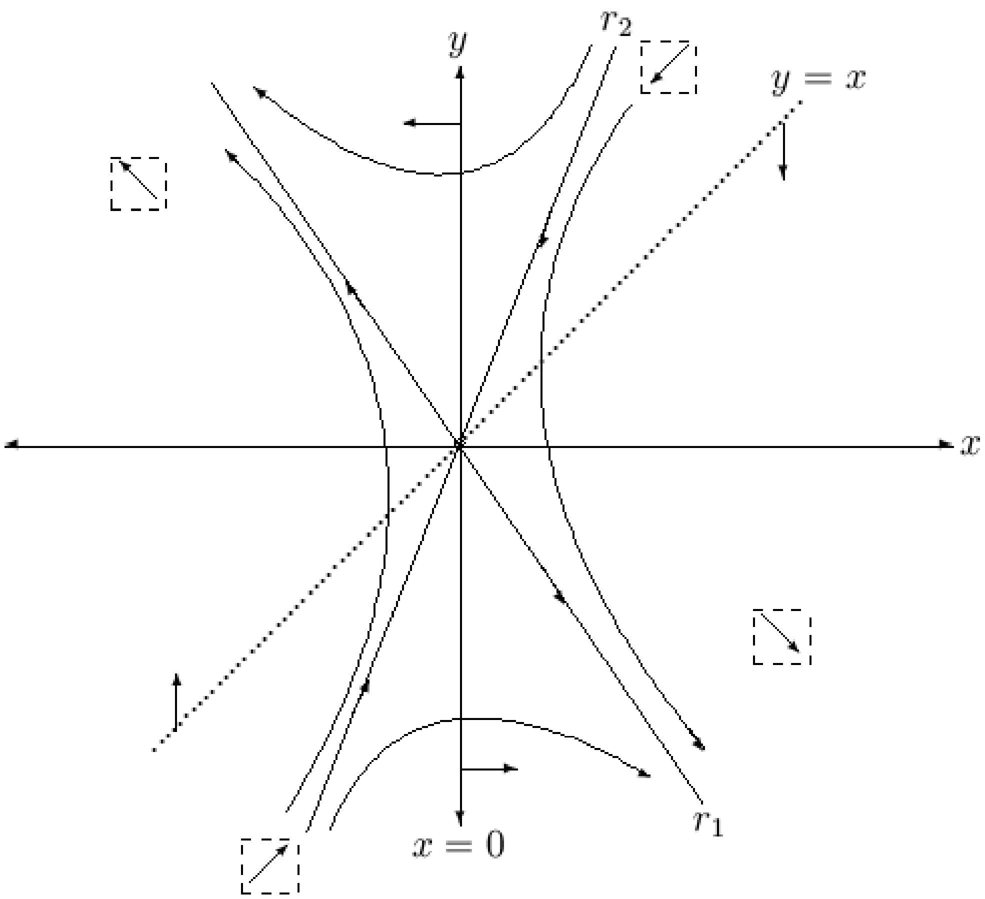
$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

por lo que los valores propios son $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Calculamos los subespacios propios

$$\operatorname{Ker}\left(\mathbf{A} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\mathbf{I}_2\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}y = 0\right\} = r_1,$$

$$\operatorname{Ker}\left(\mathbf{A} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\mathbf{I}_2\right) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}y = 0\right\} = r_2.$$

Tenemos entonces el diagrama de fases



> Determinar una curva que pasa por el punto $(1,1)$ y su recta tangente en cada punto corta al eje Y en el punto $2xy^2$.

Solución. La recta tangente en cada putno (x, y) de la curva es

$$Y - y = y'(X - x),$$

y al hallar el punto de corte con el eje Y mediante el sistema

$$\begin{cases} Y - y = y'(X - x), \\ X = 0, \end{cases}$$

obtenemos $Y = y - xy'$, con lo que dicho punto de corte será $(0, y - xy')$. Planteamos entonces la ecuación diferencial

$$y - xy' = 2xy^2,$$

que es una ecuación de Bernoulli que con el cambio de variable dependiente $z = 1/y$ se transforma en la ecuación lineal

$$z' = -\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{xy} - 2 = \frac{z}{x} - 2.$$

Resolvemos primero la ecuación homogénea

$$z' = \frac{z}{x},$$

integrando

$$\int \frac{z'(x)}{z(x)} dx = \int \frac{dx}{x},$$

de donde $\log z(x) = locx + c$, o equivalentemente

$$z(x) = kx, \; k = e^c.$$

Proponemos como solución de la ecuación no homogénea $z(x) = k(x)x$, que derivándola

$$z'(x) = k'(x)x + k(x),$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea y posteriormente simplificando

$$k'(x)x = -2,$$

con lo que

$$z(x) = -\int \frac{2}{x} dx = -2\log x + c,$$

y la solución general de la ecuación no homogénea es

$$z(x) = cx - 2x \log x.$$

Deshaciendo el cambio tenemos que

$$y(x) = \frac{1}{cx - 2x \log x},$$

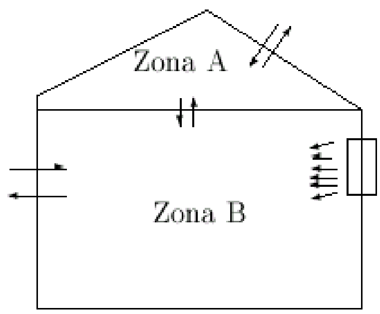
y utilizando las condiciones iniciales

$$y(1) = 1 = \frac{1}{c},$$

con lo que $c = 1$ y la curva pedida es

$$y(x) = \frac{1}{x - 2x \log x}.$$

Para fines de refrigeración una casa consta de dos zonas: la zona de ático A y la zona B o habitacional. El área habitacional es refrigerada por medio de una unidad de aire acondicionado que disipa 12000 kilocalorias por hora. La capacidad calorífica de la zona B es de 1/4 grado centígrado por cada 1000 kilocalorias. La constantes de transferencia de calor son 2 horas entre la zona A y el exterior, 4 horas entre la zona B y el exterior y 4 horas entre ambas zonas. Si la temperatura exterior permanece a 35 grados centígrados, ¿a qué temperatura puede llegar a calentarse la zona del ático?



Nota: las constantes de transferencia de calor son las inversas de las constantes que aparecen el la ley de enfriamiento de Newton.

Solución. Llamemos $x(t)$ e $y(t)$ a las temperaturas de la zonas A y B, respectivamente. De la ley de enfriamiento de Newton tenemos que

$$x'(t) = \frac{1}{2}(35 - x(t)) + \frac{1}{4}(y(t) - x(t)).$$

e

$$y'(t) = \frac{1}{4}(35 - y(t)) + \frac{1}{4}(x(t) - y(t)) - \frac{1}{4}12,$$

de donde construimos el sistema

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{35}{2}, \\ y' = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y + \frac{23}{4}. \end{cases}$$

La matriz del sistema homogéneo es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios los calculamos mediante la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} - t & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} - t \end{vmatrix} = t^2 + \frac{5}{4}t + \frac{5}{16} = 0,$$

de donde

$$t = \frac{-\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - \frac{5}{4}}}{2} = \frac{-\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{5}{16}}}{2} = -\frac{5}{8} \pm \frac{\sqrt{5}}{8},$$

por lo que los valores propios son negativos y entonces para todo $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ se verifica que

$$\lim_{t\to\infty} e^{t\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Proponemos como solución particular de la ecuación no homogénea $x_p(t) = A$ e $y_p(t) = B$, cuyas derivadas son nulas y entonces sustituyendo en le sistema no homogéneo

$$\begin{array}{r} \frac{3}{4}A - \frac{1}{4}B = \frac{35}{2}, \\ -\frac{1}{4}A + \frac{1}{2}B = \frac{23}{4}, \end{array}$$

que al resolverlo obtenemos $A = 163/5$ y $B = 139/5$, por lo que

$$\lim_{t\to\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \lim_{t\to\infty} \left(e^{t\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{163}{5} \\ \frac{139}{5} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{163}{5} \\ \frac{139}{5} \end{pmatrix},$$

y por tanto la temperatura q la que tenderá el ático es $\frac{163}{5} \approx 32.6$ grados centígrados.

Resolver

$$\frac{y^2}{2} + 2ye^x + (y + e^x)y' = 0.$$

Solución. Sean $P(x, y) = \dfrac{y^2}{2} + 2ye^x$ y $Q(x, y) = y + e^x$ y entonces

$$y + 2e^x = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = e^x,$$

por lo que la ecuación no es exacta y buscamos un factor integrante $\mu(x, y)$ mediante la ecuación

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\mu(x, y) + P(x, y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\mu(x, y) + Q(x, y)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x, y)$$

que nos da

$$(y + 2e^x)\mu(x, y) + \left(\frac{y^2}{2} + 2ye^x\right)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x, y) = e^x\mu(x, y) + (y + e^x)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x, y),$$

y suponiendo que $\mu(x)$ y simplificando obtenemos

$$\mu(x) = \mu'(x),$$

de donde fácilmente obtenemos que $\mu(x) = e^x$ y la ecuación

$$\frac{y^2}{2}e^x + 2ye^{2x} + (ye^x + e^{2x})y' = 0$$

es exacta por lo que existirá $f(x, y)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{y^2}{2}e^x + 2ye^{2x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= ye^x + e^{2x}. \end{aligned}$$

Integrando respecto de x la primera condición tenemos

$$f(x,y)=\int\left(\frac{y^2}{2}e^x+2ye^{2x}\right)dx=\frac{y^2}{2}e^x+ye^{2x}+g(y).$$

Derivando esta expresión respecto de y y sustituyendo en la sgunda condición tenemos

$$ye^x+e^{2x}=ye^x+e^{2x}+g'(y),$$

por lo que $g'(y)=0$ y por tanto constante y $f(x,y)=\frac{y^2}{2}e^x+ye^{2x}$. Las soluciones de la ecuación son por tanto

$$\frac{y^2}{2}e^x+ye^{2x}=c.$$

Resolver

$$x^2y''+4xy'+2y=x\log x.$$

Solución. Se trata de una ecuación de Cauchy–Euler que con el cambio $x=e^t$ y denotando por $\dot{y}$ la derivada de y respecto de la variable t se verifica

$$y'=\dot{y}\,\frac{dt}{dx}=\dot{y}\,\frac{1}{x}=\dot{y}\,e^{-t},$$

$$y''=\frac{d}{dt}(\dot{y}\,e^{-t})\frac{dt}{dx}=\ddot{y}\,e^{-2t}-\dot{y}\,e^{-2t},$$

y entonces la ecuación se reescribe como

$$\ddot{y}+3\dot{y}+2y=te^t.$$

Resolvemos primero la ecuación homogénea mediante la ecuación característica

$$t^2+3t+2=0,$$

de donde

$$t=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2},$$

con lo que las raices son -1 y -2 y la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}.$$

Proponemos como solución particular de la ecuación no homogénea $y_p(t)=(At+B)e^t$, y derivando dos veces

$$\begin{aligned} y'(t) &= (At+A+B)e^t,\\ y'(t) &= (At+2A+B)e^t, \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea y simplificando

$$(6At+5A+6B)e^t=te^t,$$

e igulando coeficientes tenemos el sistema

$$\begin{cases} 6A = 1, \\ 5A + 6B = 0, \end{cases}$$

que nos da $A = 1/6$ y $B = -5/36$ y las soluciones de la ecuación no homogénea son

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + \left(\frac{1}{6}t - \frac{5}{36}\right) e^t.$$

Deshaciendo el cambio obtenemos

$$y(x) = c_1 \frac{1}{x} + c_2 \frac{1}{x^2} + x\left(\frac{1}{6}\log x - \frac{5}{36}\right).$$

Resolver

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x - y, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

Solución. Escribimos el sistema de forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios se calculan con la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ -1 & -1-t \end{vmatrix} = t^2 + t + 1 = 0,$$

de donde

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Calculamos

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{a_1}{t + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{a_2}{t + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{(a_1 + a_2)t + a_1\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + a_2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{p(t)},$$

e igualando coeficientes obtenemos el sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ a_1\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + a_2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1, \end{cases}$$

y obtenemos $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{3i}$ y $a_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3i}$. Por otro lado

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = t+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{t+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = t+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^{-t\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}a_1(\mathbf{A})\cdot q_1(\mathbf{A}) + e^{-t\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}a_2(\mathbf{A})\cdot q_2(\mathbf{A}) \\ &= e^{-t/2}\left(e^{it\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\sqrt{3}}{3i}\left(\mathbf{A}+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{I}_2\right) - e^{-it\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\sqrt{3}}{3i}\left(\mathbf{A}+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{I}_2\right)\right) \\ &= e^{-t/2}\frac{\sqrt{3}}{3i}\left(e^{it\frac{\sqrt{3}}{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} - e^{-it\frac{\sqrt{3}}{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\right) \\ &= e^{-t/2}\frac{\sqrt{3}}{3i}\left(\begin{pmatrix} \frac{e^{it\frac{\sqrt{3}}{2}}-e^{-it\frac{\sqrt{3}}{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{3}\left(e^{it\frac{\sqrt{3}}{2}}+e^{-it\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)}{2} & e^{it\frac{\sqrt{3}}{2}}-e^{-it\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ -\left(e^{it\frac{\sqrt{3}}{2}}-e^{-it\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) & -\frac{e^{it\frac{\sqrt{3}}{2}}-e^{-it\frac{\sqrt{3}}{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{3}\left(e^{it\frac{\sqrt{3}}{2}}+e^{-it\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)}{2} \end{pmatrix}\right) \\ &= e^{-t/2}\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\begin{pmatrix} \sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{3}\cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & 2\sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ 2\sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & -\sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{3}\cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{pmatrix}\right), \end{aligned}$$

por lo que la solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-t/2}\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\begin{pmatrix} \sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{3}\cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & 2\sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ 2\sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & -\sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{3}\cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Utilizando las condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

por lo que $c_1 = c_2 = 1$ y la solución del problema de condiciones iniciales es

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t/2}\left(\sqrt{3}\sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right), \\ y(t) = e^{-t/2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right). \end{cases}$$

Esbozar el diagrama de fases del siguiente sistema autónomo, indicando si el punto crítico es o no estable.

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = -x. \end{cases}$$

Solución. Es sencillo ver que $(0,0)$ es el único punto crítico del sistema. Las isoclinas son las rectas $y = 0$ y $x = 0$. En la primera se tiene que $x' = 0$ e $y' = -x$, por lo que $y' > 0$ si $x < 0$ e

$y' < 0$ si $x > 0$. En la segunda isoclina se verifica que $y' = 0$ y $x' = -y$, por lo que $x' > 0$ si $y < 0$ e $x' < 0$ si $y > 0$. Calculamos ahora las integrales primeras mediante la ecuación

$$y' = \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y},$$

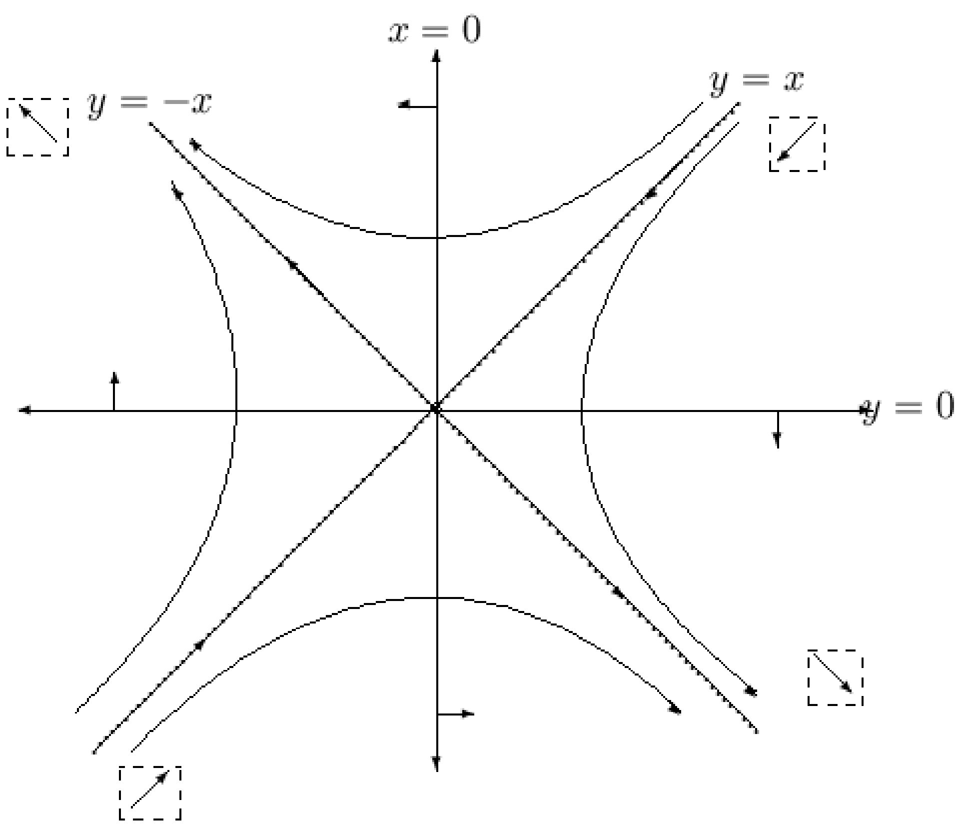
cuya solución se obtiene integrando

$$\int y(x)y'(x)dx = \int xdx,$$

de donde

$$y^2 - x^2 = c,$$

que es una familia de hipérbolas que cuando $c = 0$ son las rectas $y = x$ e $y = -x$, y las demás son curvas asintóticas a estas rectas. Tenemos entonces el diagrama de fases



Cuál es la única ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes de orden 4 que tiene las siguientes funciones linealmente independientes $$\{y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^x + xe^x, y_3(x) = x + e^x + xe^x\}.$$ Razonar la respuesta.

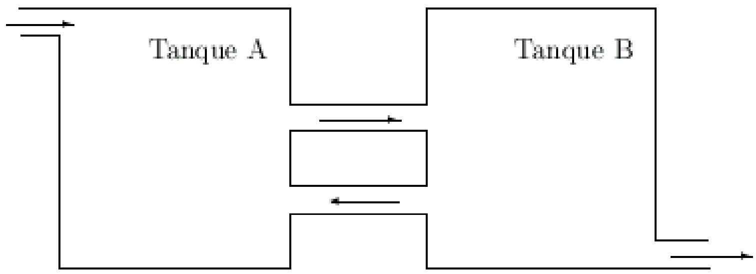
Solución. De las soluciones tenemos que la ecuación característica de la ecuación debe tener por soluciones 1 y 0, ambas de multiplicidad dos, pues en otro caso xe^x y x no podrían ser soluciones. Entonces la ecuación característica es

$$x^2(x-1)^2 = 0,$$

y la ecuación diferencial es por tanto

$$y^{4)} - 2y^{3)} + y'' = 0.$$

Dos tanques de 60 litros de capacidad están conectados entre sí y con el exterior según muestra la siguiente figura:



Del exterior fluye hacia el tanque A una disolución de agua salada con una concentración de $3\,kg/l$ a una velocidad de $4\,l/m$. A la misma velocidad sale el agua hacia el exterior por el tanque B. El líquido fluye del tanque A hacia el tanque B a $6\,l/m$ y del tanque B al tanque A a $2\,l/m$. Las disoluciones en ambos tanques están permanentemente bien agitadas. Inicialmente había $10\,kg$ de sal en el tanque A y no había sal en el B. Determinar las cantidades máximas de sal que puede haber en cada tanque.

Solución. Sean $x(t)$ e $y(t)$ las cantidades de sal en el tanque A y B, respectivamente. Como sabemos

$$x'(t) = v_e - v_s,$$

donde la velocidad de entrada de la sal en el tanque es

$$v_e = 3 \cdot 4 + 2\frac{y(t)}{60},$$

y la velocidad de salida es

$$v_s = 6\frac{x(t)}{60},$$

por lo que obtenemos la ecuación

$$x'(t) = -\frac{x(t)}{10} + \frac{y(t)}{30} + 12.$$

Similarmente

$$y'(t) = v_e - v_s,$$

donde
$$v_e = 6\frac{x(t)}{60},$$
y
$$v_s = 2\frac{y(t)}{60},$$
por lo que obtenemos la ecuación
$$y'(t) = \frac{x(t)}{10} - \frac{y(t)}{10}.$$
Combinando ambas ecuaciones tenemos el sistema
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix},$$
donde
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$
Calculamos los valores propios de la matriz mediante la ecuación
$$p(t) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{10} - t & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} - t \end{vmatrix} = t^2 + \frac{1}{5}t + \frac{1}{150} = 0,$$
de donde
$$t = \frac{-\frac{1}{5} \pm \sqrt{\frac{1}{25} - \frac{2}{75}}}{2} = -\frac{1}{10} \pm \frac{\sqrt{3}}{30},$$
por lo que ambos valores propios son negativos y por tanto para todo $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que
$$\lim_{t\to\infty} e^{t\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Por otro lado, proponemos como solución particular del sistema no homogéneo $x_p(t) = A$ e $y_p(t) = B$, cuyas derivadas son cero, y sustituyendo en el sistema y simplificando tenemos el sistema
$$\begin{cases} \frac{A}{10} - \frac{B}{30} = 12, \\ A - B = 0, \end{cases}$$
y fácilmente obtenemos $A = B = 180$. Entonces
$$\lim_{t\to\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \lim_{t\to\infty} \left(e^{t\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 180 \\ 180 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 180 \\ 180 \end{pmatrix},$$
por lo que las cantidades máximas de sal en cada tanque pueden ser de 180 kilos, ya que ambas funciones son estrictamente decrecientes y éste es el valor máximo que pueden alcanzar (nótese que e^{-at} es una función decreciente).

Capítulo 20

25–6–2004

Enunciado

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales y problemas de condiciones iniciales:

   (a) **(2.5 puntos)** $x^2y'' + 2xy' + 6y = 0$.

   (b) **(2.5 puntos)** $y'' - y' = \dfrac{1}{e^x + 1}$.

   (c) **(5 puntos)**
   $$\begin{cases} 2x' = 6x - y - 6t^2 - t + 3, \\ y' = 2y - 2t - 1, \\ x(0) = 2,\ y(0) = 3. \end{cases}$$

2. Dado el sistema homogéneo
   $$\begin{cases} x' = x^2y, \\ y' = x^3, \end{cases}$$
   se pide

   (a) **(8 puntos)** Obtener el diagrama de fases del mismo.

   (b) **(2 puntos)** Estudiar la estabilidad de los puntos críticos del sistema.

3. Contestar a las siguientes cuestiones de forma razonada:

   (a) **(5 puntos)** Hallar una curva que tenga la propiedad de que la longitud del trozo de perpendicular trazada desde el origen de coordenadas a la tangente sea igual a la abscisa del punto de corte de ambas rectas.

   (b) **(5 puntos)** Dada una ecuación de la forma $P(x, y)+Q(x, y)y' = 0$, escribir la condición para que tenga un factor integrante de la forma $\mu(x+y^2)$. Aplicar el resultado obtenido para resolver la ecuación
   $$3y^2 - x + (2y^3 - 6xy)y' = 0.$$

4. Dada la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por
   $$\mathbf{f}(x, y, z) = (x - y - z, -x + 2y + 2z, -x + 2y + 2z)$$
   se pide:

(a) **(1 punto)** Matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) **(2 puntos)** Núcleo e imagen de $\mathbf{f}$. Bases y dimensión de ambos subespacios.

(c) **(3 puntos)** Matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,0,0),(1,1,1)\}$.

(d) **(4 puntos)** Estudiar si la matriz obtenida en el apartado primero es diagonalizable y obtener en caso afirmativo su forma diagonal.

5. Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones:

(a) **(5 puntos)** Discutir, según los valores de x el número de vectores linealmente independientes del sistema de vectores $\{(x,1,1),(1,x,1),(1,1,x)\}$. Calcular el subespacio vectorial generado en cada caso.

(b) **(3 puntos)** Un vector $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^3$ tiene respecto a la base $\mathcal{B} = \{(i,1,1),(1,i,1),(1,1,i)\}$ las coordenadas (i,i,i). Hallar sus coordenadas respecto a la base canónica $\mathcal{C} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

(c) **(2 puntos)** Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada tal que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$, demostrar que $(\mathbf{A}+\mathbf{I}_n)^{-1} = \mathbf{I}_n - \mathbf{A}$.

6. **(10 puntos)** Determinar una aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que cumple las siguientes condiciones: $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0\}$ y $\mathbf{f}(0,1) = (3,0,1)$. Determinar además si la matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de las bases canónicas es o no diagonalizable.

Examen resuelto

Resolver
$$x^2y'' + 2xy' + 6y = 0.$$

Solución. Se trata de una ecuación de Cauchy–Euler que con el cambio $x = e^t$ y denotando por $\dot{y}$ la derivada de y respecto de la variable t se verifica

$$y' = \dot{y}\,\frac{dt}{dx} = \dot{y}\,\frac{1}{x} = \dot{y}\,e^{-t},$$

$$y'' = \frac{d}{dt}(\dot{y}\,e^{-t})\frac{dt}{dx} = \ddot{y}\,e^{-2t} - \dot{y}\,e^{-2t},$$

y entonces la ecuación se reescribe como

$$\ddot{y} + \dot{y} + 6y = 0,$$

que mediante la ecuación característica

$$t^2 + t + 6 = 0,$$

obtenemos
$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1-24}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{23}}{2}.$$

La solución de la ecuación es por tanto

$$y(t) = c_1 e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2}t\right) + c_2 e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{23}}{2}t\right).$$

Deshaciendo el cambio tenemos que

$$y(x) = c_1\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2}\log x\right) + c_2\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{\sqrt{23}}{2}\log x\right).$$

Resolver
$$y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}.$$

Solución. Resolvemos esta ecuación primero calculando y', resolviendo primero la ecuación homogénea $y'' - y' = 0$, que tiene como solución $y'(x) = ke^x$. Proponemos una solución de la ecuación no homogénea de la forma $y(x) = k(x)e^x$, que drivándola una vez

$$y'(x) = k'(x)e^x + k(x)e^x,$$

y sustituyendo y simplificando en la ecuación no homogénea nos queda

$$k'(x)e^x = \frac{1}{e^x+1},$$

y por tanto

$$\begin{aligned} k(x) &= \int \frac{1}{(e^x+1)e^x}dx = \left\{ \begin{array}{c} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right\} = \int \frac{1}{t^2(t+1)}dt \\ &= \int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t+1} = -\frac{1}{t} - \log t + \log(t+1) + c \\ &= -e^{-x} - x + \log(e^x+1) + c, \end{aligned}$$

con lo que

$$y'(x) = -1 - xe^x + e^x \log(e^x+1) + ce^x,$$

e integrando

$$y(x) = \int (-1 - xe^x + e^x \log(e^x+1) + ce^x)dx$$

y teniendo en cuenta que

$$\int xe^x dx = \left\{ \begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x,$$

$$\begin{aligned} \int e^x \log(e^x+1)dx &= \left\{ \begin{array}{c} t = e^x + 1 \\ dt = e^x dx \end{array} \right\} = \int \log t dt = \left\{ \begin{array}{c|c} u = \log t & du = \frac{1}{t}dt \\ dv = dt & v = t \end{array} \right\} \\ &= t \log t - \int dt = t \log t - t = (1+e^x)(\log(1+e^x) - 1), \end{aligned}$$

y

$$y(x) = -x + (1-x)e^x + (1+e^x)(\log(1+e^x) - 1) + ce^x.$$

Resolver

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x' = 6x - y - 6t^2 - t + 3, \\ y' = 2y - 2t - 1, \\ x(0) = 2, \ y(0) = 3. \end{array} \right.$$

Solución. Reescribimos el sistema en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3t^2 - \frac{t}{2} + \frac{3}{2} \\ -2t - 1 \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores propios de la matriz mediante la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 3-t & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2-t \end{vmatrix} = (3-t)(2-t) = 0,$$

con lo que los valores propios son 3 y 2. Calculamos ahora

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{a_1}{t-3} + \frac{a_2}{t-2} = \frac{(a_1+a_2)t - 2a_1 - 3a_2}{p(t)},$$

e igualando coeficientes

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ -2a_1 - 3a_2 = 1, \end{cases}$$

de donde $a_1 = 1$ y $a_2 = -1$. Por otra parte

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t-3} = t-2, \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{t-2} = t-3. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^{3t} a_1(\mathbf{A}) \cdot q_1(\mathbf{A}) + e^{2t} a_2(\mathbf{A}) \cdot q_2(\mathbf{A}) \\ &= e^{3t}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2) - e^{2t}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}_2) \\ &= e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - e^{2t} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{3t} & \frac{1}{2}(e^{2t} - e^{3t}) \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La solución del sistema homogéneo es por tanto

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{t\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & \frac{1}{2}(e^{2t} - e^{3t}) \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Proponemos como solución particular $x_p(t) = At^2 + Bt + C$ e $y_p(t) = Dt^2 + Et + F$, y derivando $x_p'(t) = 2At + B$ e $y_p'(t) = 2Dt + E$, y sustituyendo y simplificando en el sistema no homogéneo tenemos

$$\begin{cases} 4At + 2B = 6At^2 + 6Bt + 6C - Dt^2 - Et - F - 6t^2 - t + 3, \\ 2Dt + E = 2Dt^2 + 2Et + 2F - 2t - 1, \end{cases}$$

de donde igualando coeficientes

$$\begin{cases} 6A - D = -6, \\ -4A + 6B - E = 1, \\ 2B - 6C + F = 3, \\ 2D = 0, \\ 2D - 2E = -2, \\ E - 2F = -1, \end{cases}$$

y obtenemos $D = 0$, $E = 1$, $F = 1$, $A = -1$, $B = -1/3$ y $C = -4/27$, y la solución general del sistema no homogéneo es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & \frac{1}{2}(e^{2t} - e^{3t}) \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t^2 - \frac{1}{3}t - \frac{4}{27} \\ t+1 \end{pmatrix}.$$

Utilizamos la condición inicial

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{27} \\ 1 \end{pmatrix},$$

para obtener $c_1 = 58/27$ y $c_2 = 2$. Entonces la solución del problema de condiciones iniciales es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & \frac{1}{2}(e^{2t} - e^{3t}) \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{58}{27} \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t^2 - \frac{1}{3}t - \frac{4}{27} \\ t + 1 \end{pmatrix},$$

y así

$$\begin{cases} x(t) = \frac{31}{27}e^{3t} + 2^{2t} - t^2 - \frac{1}{3}t - \frac{4}{27}, \\ y(t) = 2e^{2t} + t + 1. \end{cases}$$

Dado el sistema autónomo

$$\begin{cases} x' = x^2 y, \\ y' = x^3, \end{cases}$$

se pide

(a) Obtener el diagrama de fases del mismo.

(b) Estudiar la estabilidad de los puntos críticos del sistema.

Solución. (a) Es sencillo ver que la recta $x = 0$ es de puntos críticos y contiene de hecho a todos ellos. La única isoclina es la recta $y = 0$, en la cual se tiene que $x' = 0$ e $y' = x^3$, por lo que $y' > 0$ si $x > 0$ e $y' < 0$ si $x < 0$. El vector tangente verifica lo siguiente: en el primer cuadrante $x' > 0$ e $y' > 0$, en el segundo $x' > 0$ e $y' < 0$, en el tercero $x' < 0$ e $y' < 0$, y en el último $x' < 0$ e $y' > 0$.

Calculamos ahora las integrales primeras mediante la ecuación

$$y' = \frac{x^3}{x^2 y} = \frac{x}{y},$$

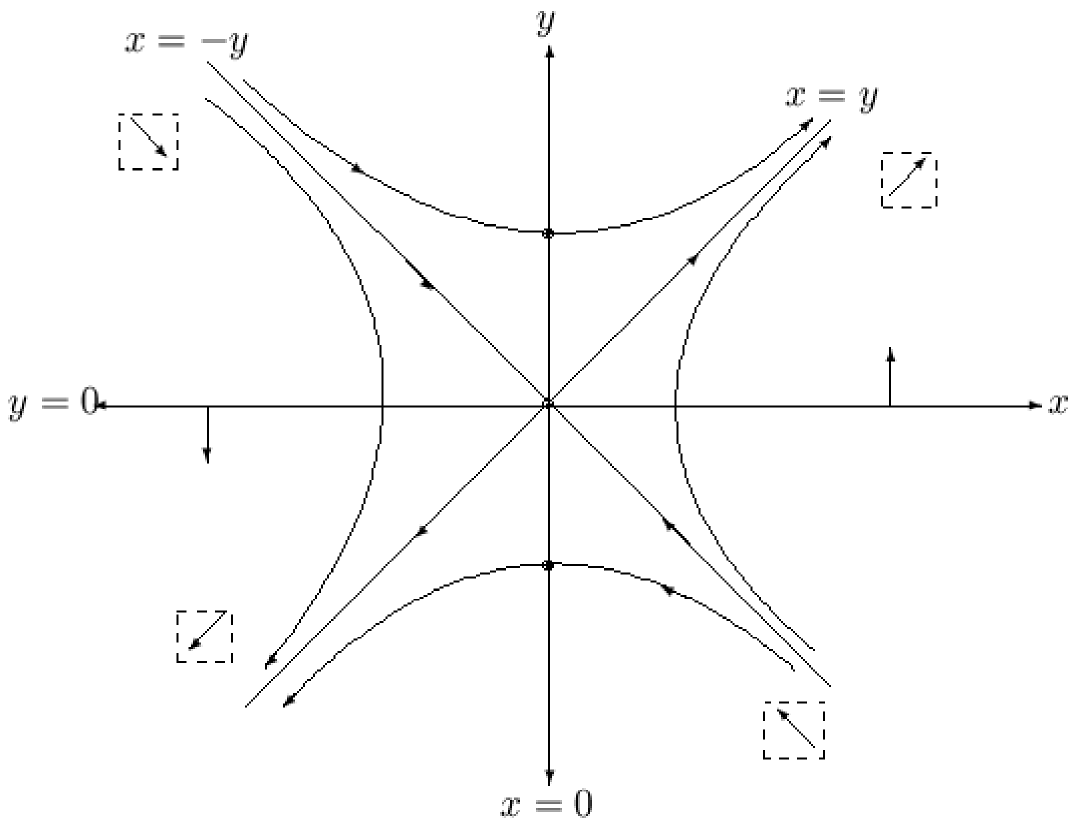
cuya solución se obtiene integrando

$$\int y(x)y'(x)dx = \int x dx,$$

de donde

$$y^2 - x^2 = c,$$

que es una familia de hipérbolas que cuando $c = 0$ son las rectas $y = x$ e $y = -x$, y las demás son curvas asintóticas a estas rectas. Tenemos entonces el diagrama de fases



(b) Vemos en el diagrama que a los puntos críticos de la recta $x = 0$ llega un órbita, pero se aleja otra que sale arbitrariamente cerca del punto en cuestión, por lo que los puntos críticos son inestables.

Hallar una curva que tenga la propiedad de que la longitud del trozo de perpendicular trazada desde el origen de coordenadas a la tangente sea igual a la abscisa del punto de corte de ambas rectas.

Solución. La recta tangente en cada punto (x, y) de la curva es

$$Y - y = y'(X - x),$$

y la tangente a ésta que pasa por el origen de coordenadas es

$$Y = -\frac{1}{y'}X.$$

Calculamos el punto de corte de ambas rectas mediante el sistema

$$\begin{cases} Y - y = y'(X - x), \\ Y = -\frac{1}{y'}X, \end{cases}$$

de donde
$$((y')^2+1)Y = y - xy',$$
y así
$$Y = \frac{y-xy'}{1+(y')^2}$$
y
$$X = -y'\frac{y-xy'}{1+(y')^2}.$$
Entonces, por la condición del problema
$$\sqrt{X^2+Y^2} = X,$$
de donde simplificando
$$1+(y')^2 = \pm y',$$
con lo que
$$y' = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2},$$
y no existe solución al problema.

Dada una ecuación de la forma $P(x,y)+Q(x,y)y' = 0$, escribir la condición para que tenga un factor integrante de la forma $\mu(x+y^2)$. Aplicar el resultado obtenido para resolver la ecuación
$$3y^2 - x + (2y^3 - 6xy)y' = 0.$$

Solución. Escribimos la ecuación de factor integrante
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\mu(x,y) + P(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\mu(x,y) + Q(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y)$$
y utilizando que $\mu(x+y^2)$, se tiene
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\mu(x+y^2) + 2yP(x,y)\mu'(x+y^2) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\mu(x+y^2) + Q(x,y)\mu'(x+y^2),$$
de donde
$$(2yP(x,y) - Q(x,y))\mu'(x+y^2) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\mu(x+y^2) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\mu(x+y^2).$$
Particularizando en nuestro problema y simplificando
$$4y(y^2+x)\mu'(x+y^2) = -12y\mu(x+y^2),$$
y haciendo $t = x+y^2$ tenemos
$$t\mu'(t) = -3\mu(t),$$
e integrando
$$\int \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}dt = -3\int \frac{dt}{t},$$

de donde

$$\log \mu(t) = -3 \log t = \log \frac{1}{t^3}$$

y

$$\mu(x+y^2) = \frac{1}{(x+y^2)^3}.$$

Entonces la ecuación

$$\frac{3y^2 - x}{(x+y^2)^3} + \frac{2y^3 - 6xy}{(x+y^2)^3} y' = 0$$

es exacta y existe $f(x,y)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{3y^2 - x}{(x+y^2)^3}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{2y^3 - 6xy}{(x+y^2)^3}. \end{aligned}$$

Utilizando la primera condición tenemos que

$$f(x,y) = \int \left(\frac{3y^2 - x}{(x+y^2)^3} \right) dx = \int \left(\frac{4y^2}{(x+y^2)^3} - \frac{1}{(x+y^2)^2} \right) dx = \frac{1}{x+y^2} - \frac{2y^2}{(x+y^2)^2} + g(y),$$

y derivando esta última expresión y sustituyendo en la segunda condición tenemos que

$$\frac{2y^3 - 6xy}{(x+y^2)^3} = \frac{2y^3 - 6xy}{(x+y^2)^3} + g'(y),$$

de donde $g'(y) = 0$ y por tanto $g(y)$ es constante y la función es $f(x,y) = \frac{1}{x+y^2} - \frac{2y^2}{(x+y^2)^2}$ por lo que la solución de la ecuación es

$$\frac{1}{x+y^2} - \frac{2y^2}{(x+y^2)^2} = c.$$

Dada la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (x - y - z, -x + 2y + 2z, -x + 2y + 2z)$$

se pide:

(a) Matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) Núcleo e imagen de $\mathbf{f}$. Bases y dimensión de ambos subespacios.

(c) Matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (1,0,0), (1,1,1)\}$.

(d) Estudiar si la matriz obtenida en el apartado primero es diagonalizable y obtener en caso afirmativo su forma diagonal.

Solución. (a) Si denotamos por $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ se tiene

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) El núcleo satisface el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2+F_1 \\ F_3+F_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3-F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

nos da que $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0,\ y + z = 0\}$. Las ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = \lambda, \end{cases}$$

por lo que $(x, y, z) = \lambda(0, -1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, por lo que una base es $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(\mathbf{f})} = \{(0, -1, 1)\}$ y $\dim \mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = 1$.

Por otra parte, un vector $(x, y, z) \in \mathrm{Im}\, \mathbf{f}$ si y sólo si existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

y al calcular los rangos de las matrices del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & x \\ -1 & 2 & 2 & y \\ -1 & 2 & 2 & z \end{array}\right) \underset{\substack{F_2+F_1 \\ F_3+F_1}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y+x \\ 0 & 1 & 1 & z+x \end{array}\right) \underset{F_3-F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y+x \\ 0 & 0 & 0 & z-y \end{array}\right)$$

tenemos que para que el sistema sea compatible $z = y$, por lo que $\mathrm{Im}\, \mathbf{f} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z\}$. Las ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = \lambda, \\ y = \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\ z = \mu, \end{cases}$$

por lo que $(x, y, z) = \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, por lo que una base es $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}\, \mathbf{f}} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ y $\dim \mathrm{Im}(\mathbf{f}) = 2$.

(c) La matriz pedida es

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\mathbf{i})$$

donde

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})]^{-1}$. Calculamos la inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2-F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1-F_3+F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{(-1)F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

y

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(d) Calculamos los valores propios de la matriz mediante la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & -1 & -1 \\ -1 & 2-t & 2 \\ -1 & 2 & 2-t \end{vmatrix} = -t(t^2 - 5t + 2) = 0,$$

de donde 0 es valor propio y los otros dos son

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{25-8}}{2} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2},$$

y como todos los valores propios son reales y distintos la matriz es diagonalizable y su forma diagonal es

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5+\sqrt{17}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5-\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix}.$$

Discutir, según los valores de x el número de vectores linealmente independientes del sistema de vectores $\{(x,1,1),(1,x,1),(1,1,x)\}$. Calcular el subespacio vectorial generado en cada caso.

Solución. Calculamos el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \underset{F_1\times F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-xF_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & x-1 & 1-x \\ 0 & 1-x & 1-x^2 \end{pmatrix} \underset{F_3+F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & x-1 & 1-x \\ 0 & 0 & 2-x-x^2 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos la ecuación $-2+x+x^2=0$ y tenemos

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2},$$

cuyas soluciones son -2 y 1. Se verifican los siguinentes casos:

- Si $x=1$, el rango es uno y el subespacio está generado por el vector $(1,1,1)$, por lo que todos los vectores del mismo son de la forma

$$(x,y,z)=\lambda(1,1,1),\ \lambda\in\mathbb{R},$$

que da lugar a las ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{l} x=\lambda, \\ y=\lambda, \quad \lambda\in\mathbb{R}, \\ z=\lambda, \end{array}\right.$$

y si calculamos los rangos de las matrices del sistema

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 1 & y \\ 1 & z \end{array}\right) \to_{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1}} \left(\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 0 & y-x \\ 0 & z-x \end{array}\right)$$

y para que ambos rangos sean iguales $y=x$ y $z=x$, que son las ecuaciones del subespacio.

- Si $x=-2$, el rango es dos y el subespacio está generado por los vectores $(1,1,-2)$ y $(0,-3,3)$, y todo vector del subespacio es de la forma

$$(x,y,z)=\lambda(1,1,-2)+\mu(0,-3,3),\ \lambda,\mu\in\mathbb{R},$$

que da lugar a las ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{l} x=\lambda, \\ y=\lambda-3\mu, \qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R}, \\ z=-2\lambda+3\mu, \end{array}\right.$$

y si calculamos los rangos de las matrices del sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 1 & 3 & y \\ -2 & 3 & z \end{array}\right) \to_{\substack{F_2-F_1 \\ F_3+2F_1}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 3 & y-x \\ 0 & 3 & z+2x \end{array}\right) \to_{F_3-F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 3 & y-x \\ 0 & 0 & z-y+3x \end{array}\right)$$

y para que ambos rangos sean iguales $z-y+3x=0$, que es la ecuación del subespacio.

- Finalmente, si $x\notin\{1,-2\}$, entonces el rango es tres y el subespacio es $\mathbb{R}^3$.

Un vector $\mathbf{u}\in\mathbb{C}^3$ tiene respecto a la base $\mathcal{B}=\{(i,1,1),(1,i,1),(1,1,i)\}$ las coordenadas (i,i,i). Hallar sus coordenadas respecto a la base canónica $\mathcal{C}=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Solución. Las coordenadas en la base canónica coinciden con el vector por lo que

$$\mathbf{u} = i(i,1,1) + i(1,i,1) + i(1,1,i) = (-1+2i, -1+2i, -1+2i).$$

Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada tal que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$, demostrar que $(\mathbf{A}+\mathbf{I}_n)^{-1} = \mathbf{I}_n - \mathbf{A}$.

Solución. Multiplicamos

$$(\mathbf{A}+\mathbf{I}_n)\cdot(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = \mathbf{I}_n - \mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_n,$$

por lo que se verifica lo pedido.

Determinar una aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que cumple las siguientes condiciones: $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0\}$ y $\mathbf{f}(0,1) = (3,0,1)$. Determinar además si la matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de las bases canónicas es o no diagonalizable.

Solución. Es fácil ver que una base del núcleo es $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(\mathbf{f})} = \{(1,-1)\}$ y que $\mathcal{B} = \{(1,-1),(0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Entonces la aplicación linela que buscamos satisface las condiciones

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(1,-1) &= (0,0,0), \\ \mathbf{f}(0,1) &= (3,0,1), \end{aligned}$$

y por tanto si denotamos por $\mathcal{C}_3$ la base canónica de $\mathbb{R}_3$ se verifica que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}_3\mathcal{B}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si denotamos por $\mathcal{C}_2$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$, se verifica que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}_3\mathcal{C}_2}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{C}_3\mathcal{B}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{C}_2}(\mathbf{i}),$$

donde

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{C}_2}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{C}_2\mathcal{B}}(\mathbf{i})]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

y calculando la inversa tenemos

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2+F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

por lo que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{C}_2}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}_3\mathcal{C}_2}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La aplicación lineal es

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(x,y) &= \left(\mathbf{M}_{\mathcal{C}_3\mathcal{C}_2}(\mathbf{f})\cdot\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}\right)^t = \left(\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}\right)^t \\ &= (3x+3y, 0, x+y).\end{aligned}$$

Dado que la matriz no es cuadrada, no puede ser diagonalizable.

Capítulo 21

2–9–2004

Enunciado

1. Dada $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{f}(x, y, z) = (x + z, \alpha y, x - z)$, se pide:

   (a) **(2.5 puntos)** Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ en la base canónica y decidir para qué valores del parámetro α es diagonalizable.

   (b) **(2.5 puntos)** Hallar ecuaciones, bases y dimensiones del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$ en función del parámetro α.

   (c) **(2.5 puntos)** Averiguar para qué valores del parámetro α el vector $(1, 1, 5)$ pertenece a la imagen de $\mathbf{f}$. ¿Para qué valores de α pertenece el vector $(0, 0, 0)$ al núcleo de $\mathbf{f}$?

   (d) **(2.5 puntos)** Utilizando el primer apartado y las matrices de cambio de base, hallar la matriz de $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

2. Sean $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual y $\mathcal{W}$ el subespacio vectorial generado por los vectores $(0, 1, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 1)$ $(1, -1, 0, 0)$ y $(1, 2, 1, 2)$. Se pide:

   (a) **(2.5 puntos)** Calcular las ecuaciones implícitas y la dimensión de $\mathcal{W}$.

   (b) **(2.5 puntos)** Obtener una base de $\mathcal{W}$ a partir de los vectores generadores y encontrar a partir de ésta una base ortonormal de $\mathcal{W}$.

   (c) **(2.5 puntos)** Demostrar que si $\mathcal{L}$ es el subespacio vectorial dado por las ecuaciones $x = z + y$ y $x = y$, entonces $\mathcal{L}$ y $\mathcal{W}$ están en suma directa. ¿Qué vale $\mathcal{L} + \mathcal{W}$?

   (d) **(2.5 puntos)** Comprobar que el vector $(0, 0, -1, 1)$ verifica que $< (x, y, z, t), (0, 0, -1, 1) >= 0$ para todo $(x, y, z, t) \in \mathcal{W}$.

3. **(10 puntos)** Determinar una aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique las siguientes condiciones: $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ y el vector $(0, 1, 1)$ es un vector propio asociado al valor propio -1. ¿Es la matriz asociada a f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ diagonalizable? En caso afirmativo obtener su forma diagonal y las matrices de cambio de base.

4. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales y problemas de condiciones iniciales:

   (a) **(3 puntos)** $y' = \frac{(x+y)^2+1}{(x+y)^2}$ (**Ayuda**: Hacer el cambio de variable dependiente $v = x+y$).

(b) **(3 puntos)** $y^{4)} + 2y'' + y = (x+1)e^x$.

(c) **(4 puntos)** $\left\{ \begin{array}{l} x' = x + 2y \\ y' = -x + y \\ y(0) = x(0) = 1. \end{array} \right\}$ ¿Es estable el punto crítico del sistema lineal anterior?

5. Responder de forma razonada a las siguientes cuestiones:

(a) **(5 puntos)** Esbozar el diagrama de fases de la ecuación autónoma $y' = y(y^2 - 4)$. ¿Son estables los puntos críticos de la ecuación?

(b) **(5 puntos)** Un recipiente o tanque contiene 50 litros de agua pura. Se vierten en el tanque una disolución de agua salada a razón de 5 gramos por litro a una velocidad de 7 litros por minuto. El agua del recipiente se mantiene constantemente agitado y se deja salir agua a la misma velocidad. Determinar la cantidad de sal que hay en cada instante en el tanque así como la cantidad máxima de sal que puede haber.

6. **(10 puntos)** Esbozar el diagrama de fases del siguiente sistema autónomo

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x + 2y \\ y' = -x + y \end{array} \right.$$

Examen resuelto

Dada $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{f}(x, y, z) = (x + z, \alpha y, x - z)$, se pide:

(a) Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ en la base canónica y decidir para qué valores del parámetro α es diagonalizable.

(b) Hallar ecuaciones, bases y dimensiones del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$ en función del parámetro α.

(c) Averiguar para qué valores del parámetro α el vector $(1, 1, 5)$ pertenece a la imagen de $\mathbf{f}$. ¿Para qué valores de α pertenece el vector $(0, 0, 0)$ al núcleo de $\mathbf{f}$?

(d) Utilizando el primer apartado y las matrices de cambio de base, hallar la matriz de $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$.

Solución. (a) Si denotamos por $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ se tiene que la matriz pedida es

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como vemos se trata de una matriz simétrica, por lo que será diagonalizable.

(b) El núcleo satisface el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3 - F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right),$$

se tienen los siguientes casos:

- Si $\alpha \neq 0$, entonces $x = y = z = 0$ y por tanto el núcleo es $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(0, 0, 0)\}$ y su dimensión es por tanto cero. Entonces la imagen cumple que

$$\dim \mathrm{Im}\, \mathbf{f} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = 3 - 0 = 3,$$

  y por tanto $\mathrm{Im}\, \mathbf{f} = \mathbb{R}^3$.

- Si $\alpha = 0$, entonces $x = z = 0$ y $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z = 0\}$, una base es $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(\mathbf{f})} = \{(0, 1, 0)\}$ y por tanto su dimensión es uno. En este caso todo vector de la imagen (x, y, z) cumple que existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

por lo que al calcular los rangos de las matrices del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 1 & 0 & -1 & z \end{array}\right) \underset{F_3-F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & -2 & z-x \end{array}\right),$$

vemos que para que el rango de ambas sea dos debe cumplirse que $y=0$. Entonces $\operatorname{Im}\mathbf{f} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=0\}$, una base es $\mathcal{B}_{\operatorname{Im}\mathbf{f}} = \{(1,0,0),(0,0,1)\}$ y su diemensión por tanto es dos.

(c) Dado que la coordenada segunda del vector $(1,1,5)$ es no nula, se tiene que dicho vector sólo pertenecerá a la imagen cuando $\alpha\neq 0$. Obviamente el vector nulo siempre pertenecerá al núcleo.

(d) La matriz pedida es

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\mathbf{i})\cdot\mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(\mathbf{f})\cdot\mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\mathbf{i}),$$

donde

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

y $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\mathbf{i})]^{-1}$, y calculando la inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2-F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3+F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\underset{\substack{(-1)F_2 \\ \frac{1}{2}F_3}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \underset{F_2+F_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$
$$\underset{F_1-F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right),$$

por lo que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

y entonces

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{2} & 1 & 1+\frac{\alpha}{2} \\ 1-\frac{\alpha}{2} & 1 & -\frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & -1 & \frac{\alpha}{2}-1 \end{pmatrix}.$$

Sean $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual y $\mathcal{W}$ el subespacio vectorial generado por los vectores $(0,1,1,1)$, $(1,0,1,1)$ $(1,-1,0,0)$ y $(1,2,1,2)$. Se pide:

(a) Calcular las ecuaciones implícitas y la dimensión de $\mathcal{W}$.

(b) Obtener una base de $\mathcal{W}$ a partir de los vectores generadores y encontrar a partir de ésta una base ortonormal de $\mathcal{W}$.

(c) Demostrar que si $\mathcal{L}$ es el subespacio vectorial dado por las ecuaciones $x = z + y$ y $x = y$, entonces $\mathcal{L}$ y $\mathcal{W}$ están en suma directa. ¿Qué vale $\mathcal{L} + \mathcal{W}$?

(d) Comprobar que el vector $(0,0,-1,1)$ verifica que $<(x,y,z,t),(0,0,-1,1)>= 0$ para todo $(x,y,z,t) \in \mathcal{W}$.

Solución. (a) Un vector de $\mathcal{W}$ verifica

$$(x,y,z,t) = \alpha(0,1,1,1) + \beta(1,0,1,1) + \gamma(1,-1,0,0) + \delta(1,2,1,2),$$

y por tanto satisface las ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{l} x = \beta + \gamma + \delta, \\ y = \alpha - \gamma + 2\delta, \\ z = \alpha + \beta + \delta, \\ t = \alpha + \beta + 2\delta, \end{array}\right. \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

Como este sistema tiene que ser compatible. al calcular los rangos

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & -1 & 2 & y \\ 1 & 1 & 0 & 1 & z \\ 1 & 1 & 0 & 2 & t \end{array}\right) \underset{\substack{F_1\times F_2 \\ F_4-F_3}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & y \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t-z \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3-F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & y \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & -1 & z-y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t-z \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3-F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & y \\ 0 & 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & -2 & z-y-x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t-z \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3+2F_4}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & y \\ 0 & 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2t-z-y-x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t-z \end{array}\right),$$

de donde se tiene que para que los rangos sean siempre iguales a tres debe cumplirse que $2t - z - y - x = 0$ y así $\mathcal{W} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : 2t - x - y - z = 0\}$, y su dimensión será por tanto tres dado que una base es $\mathcal{B}_{\mathcal{W}} = \{(0,1,1,1),(1,0,1,1),(1,2,1,2)\}$ al darnos cuenta que el rango tres se consigue con las dos primeras y la última columna de la matriz del sistema, que se corresponden con los vectores de la base.

(b) La base es $\mathcal{B}_{\mathcal{W}} = \{(0,1,1,1),(1,0,1,1),(1,2,1,2)\}$. Obtenemos una base ortogonal $\mathcal{O} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ donde $\mathbf{v}_1 = (0,1,1,1)$ y

$$\mathbf{v}_2 = (1,0,1,1) - \frac{\langle (0,1,1,1),(1,0,1,1)\rangle}{\langle (0,1,1,1),(0,1,1,1)\rangle}(0,1,1,1) = (1,0,1,1) - \frac{2}{3}(0,1,1,1) = \left(1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_3 &= (1,2,1,2) - \frac{\langle (0,1,1,1),(1,2,1,2)\rangle}{\langle (0,1,1,1),(0,1,1,1)\rangle}(0,1,1,1) - \frac{\left\langle \left(1,-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),(1,2,1,2)\right\rangle}{\left\langle \left(1,-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\left(1,-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\right\rangle}\left(1,-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \\
&= (1,2,1,2) - \frac{5}{3}(0,1,1,1) - \frac{2}{5}\left(1,-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{3}{5},\frac{3}{5},-\frac{4}{5},\frac{1}{5}\right).
\end{aligned}$$

Calculamos ahora una base ortonormal $\mathcal{N} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ donde

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{||\mathbf{v}_1||}\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(0,1,1,1),$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{||\mathbf{v}_2||}\mathbf{v}_2 = \frac{\sqrt{15}}{3}\left(1,-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),$$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{||\mathbf{v}_1||}\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{35}}{7}\left(\frac{3}{5},\frac{3}{5},-\frac{4}{5},\frac{1}{5}\right).$$

(c) Para ver que están en suma directa calculamos $\mathcal{L} \cap \mathcal{W}$ mediante el sistema

$$\begin{cases} 2t - x - y - z = 0, \\ x - y - z = 0, \\ x - y = 0, \end{cases}$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{F_1 \times F_3}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right),$$

por lo que las ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = -2\lambda, \\ y = -2\lambda, \\ z = 0, \\ t = \lambda, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R},$$

por lo que $(x,y,z,t) = \lambda(-2,-2,0,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y por tanto una base de la intersección es $\mathcal{B}_{\mathcal{L}\cap\mathcal{W}} = \{(-2,-2,0,1)\}$.Así la suma no puede ser directa.

Para calcular ahora $\mathcal{L} + \mathcal{W}$ obtenemos una base de $\mathcal{L}$ mediante las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = 0, \\ t = \mu, \end{cases} \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

y entonces $(x,y,z,t) = \lambda(1,1,0,0) + \mu(0,0,0,1)$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, y por tanto una base es $\mathcal{B}_{\mathcal{L}} = \{(1,1,0,0),(0,0,0,1)\}$. Por tanto

$$\dim(\mathcal{L}+\mathcal{W}) = \dim\mathcal{L} + \dim\mathcal{W} - \dim(\mathcal{L}\cap\mathcal{W}) = 2+3-1 = 4,$$

por lo que $\mathcal{L}+\mathcal{W} = \mathbb{R}^4$.

(d) Basta ver que la condición se cumple para la base de $\mathcal{W}$ que hemos obtenido. Calculamos entonces

$$<(1,2,1,2),(0,0,-1,1)>= 1,$$

por lo que la condición pedida no se cumple.

> Determinar una aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique las siguientes condiciones: $\operatorname{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$ y el vector $(0,1,1)$ es un vector propio asociado al valor propio -1. ¿Es la matriz asociada a f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ diagonalizable? En caso afirmativo obtener su forma diagonal y las matrices de cambio de base.

Solución. De las ecuaciones paramétricas del núcleo

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\lambda-\mu, \\ y = \lambda, \\ z = \mu, \end{array}\right. \qquad \lambda,\mu \in \mathbb{R},$$

se tiene que $(x,y,z) = \lambda(-1,1,0) + \mu(-1,0,1)$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, por lo que una base es $\mathcal{B}_{\operatorname{Ker}(\mathbf{f})} = \{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$. Entonces $\mathcal{B} = \{(-1,1,0),(-1,0,1),(0,1,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ ya que al calcular el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2-F_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3+F_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

se tiene que éste es tres. Así, la aplicación lineal buscada satisface

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{f}(-1,1,0) & = & (0,0,0), \\ \mathbf{f}(-1,0,1) & = & (0,0,0), \\ \mathbf{f}(0,1,1) & = & (0,-1,-1), \end{array}$$

por lo que si $\mathcal{C}$ denota la base canónica de $\mathbb{R}^3$ entonces

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

y

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}),$$

donde

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})]^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

y calculando la inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2+F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3+F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{(-1)F_1 \\ (-1)F_2 \\ \frac{1}{2}F_3}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{F_2+F_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1-F_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right),$$

por lo que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

De esta manera

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

y la aplicación lineal es

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x,y,z) &= \left(\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)^t = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)^t \\ &= \left(0, \frac{1}{2}(x+y-z), -\frac{1}{2}(x+y+z)\right). \end{aligned}$$

Por otra parte, la base $\mathcal{B}$ es de vectores propios de los valores propios 0, que es de multiplicidad dos, y -1. Entonces

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}),$$

y así

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Resolver

$$y' = \frac{(x+y)^2+1}{(x+y)^2}.$$

(**Ayuda**: Hacer el cambio de variable dependiente $v = x + y$).

Solución. Realizamos el cambio indicado

$$v' = 1 + y' = 1 + \frac{v^2+1}{v^2} = \frac{2v^2+1}{v^2},$$

por lo que integrando

$$\int \frac{v(x)^2}{1+2v(x)^2} v'(x)dx = \int dx,$$

obtenemos que

$$\frac{v}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(v\sqrt{2}\right) = x + c,$$

y deshaciendo el cambio

$$\frac{x+y}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left((x+y)\sqrt{2}\right) = x + c,$$

y simplificando

$$\frac{y-x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left((x+y)\sqrt{2}\right) = c.$$

Nota: La integral

$$\begin{aligned}
\int \frac{v(x)^2}{1+2v(x)^2} v'(x)dx &= \left\{ \begin{array}{c} t = v(x) \\ dt = v'(x)dx \end{array} \right\} = \int \frac{t^2}{1+2t^2} dt \\
&= \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+2t^2}\right) dt = \frac{1}{2}\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(t\sqrt{2}\right)\right) \\
&= \frac{v}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(v\sqrt{2}\right).
\end{aligned}$$

Resolver

$$y^{4)} + 2y'' + y = (x+1)e^x.$$

Solución. Resolvemos primero la ecuación homogénea a partir de la ecuación característica

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 0 = (x^2+1)^2,$$

por lo que $x = \pm i$, ambos de multiplicidad dos. Entonces

$$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x.$$

Proponemos como solución particular de la ecuación no homogénea $y_p(x) = (Ax + B)e^x$, y derivando cuatro veces

$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= (Ax + A + B)e^x, \\
y_p''(x) &= (Ax + 2A + B)e^x, \\
y_p^{3)}(x) &= (Ax + 3A + B)e^x, \\
y_p^{4)}(x) &= (Ax + 4A + B)e^x,
\end{aligned}$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea y simplificando

$$(4Ax + 8A + 4B)e^x = (x + 1)e^x,$$

e igualando coeficioentes

$$\begin{cases} 4A = 1, \\ 8A + 4B = 1, \end{cases}$$

y $A = 1/4$ y $B = -1/4$. La solución general de la ecuación no homogénea

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x + \frac{1}{4}(x - 1)e^x.$$

Resolver

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x + 2y \\ y' = -x + y \\ y(0) = x(0) = 1. \end{array} \right\}$$

¿Es estable el punto crítico del sistema lineal anterior?

Solución. Escribimos el sistema de forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores propios mediante la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ -1 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 2t + 3 = 0,$$

y

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = 1 \pm i\sqrt{2}.$$

Calculamos ahora

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{a_1}{t - 1 - i\sqrt{2}} + \frac{a_2}{t - 1 + i\sqrt{2}} = \frac{(a_1 + a_2)t - a_1(1 - i\sqrt{2}) - a_2(1 + i\sqrt{2})}{p(t)},$$

e igualando coeficientes

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ -a_1(1 - i\sqrt{2}) - a_2(1 + i\sqrt{2}) = 1, \end{cases}$$

de donde $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{4i} = -a_2$. Por otra parte

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t - 1 - i\sqrt{2}} = t - 1 + i\sqrt{2}, \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{t - 1 + i\sqrt{2}} = t - 1 - i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
e^{t\mathbf{A}} &= e^{t(1+i\sqrt{2})}a_1(\mathbf{A})\cdot q_1(\mathbf{A}) + e^{t(1-i\sqrt{2})}a_2(\mathbf{A})\cdot q_2(\mathbf{A}) \\
&= e^t\frac{\sqrt{2}}{4i}\left(e^{it\sqrt{2}}(\mathbf{A}-(1-i\sqrt{2})\mathbf{I}_2) - e^{-it\sqrt{2}}(\mathbf{A}-(1-i\sqrt{2})\mathbf{I}_2)\right) \\
&= e^t\frac{\sqrt{2}}{4i}\left(e^{it\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i\sqrt{2} & 2 \\ -1 & i\sqrt{2}\end{pmatrix} - e^{-it\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i\sqrt{2} & 2 \\ -1 & -i\sqrt{2}\end{pmatrix}\right) \\
&= e^t\frac{\sqrt{2}}{4i}\begin{pmatrix} i\sqrt{2}(e^{it\sqrt{2}}+e^{-it\sqrt{2}}) & 2(e^{it\sqrt{2}}-e^{-it\sqrt{2}}) \\ -(e^{it\sqrt{2}}-e^{-it\sqrt{2}}) & i\sqrt{2}(e^{it\sqrt{2}}+e^{-it\sqrt{2}})\end{pmatrix} \\
&= e^t\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos(t\sqrt{2}) & 2\sin(t\sqrt{2}) \\ -\sin(t\sqrt{2}) & \sqrt{2}\cos(t\sqrt{2})\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

y la solución general es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t)\end{pmatrix} = e^t\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos(t\sqrt{2}) & 2\sin(t\sqrt{2}) \\ -\sin(t\sqrt{2}) & \sqrt{2}\cos(t\sqrt{2})\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2\end{pmatrix}.$$

Utilizando las condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2\end{pmatrix},$$

por lo que

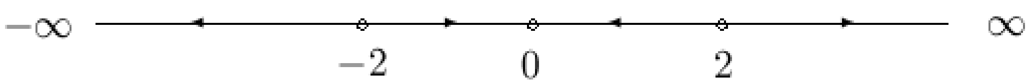
$$\begin{cases} x(t) = e^t\left(\cos(t\sqrt{2}) + \sqrt{2}\sin()t\sqrt{2}\right), \\ y(t) = e^t\left(\cos(t\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin()t\sqrt{2}\right). \end{cases}$$

Esbozar el diagrama de fases de la ecuación autónoma $y' = y(y^2-4)$. ¿Son estables los puntos críticos de la ecuación?

Solución. La función $f(y) = y(y^2-4)$ está definido en todo $\mathbb{R}$ y sus puntos críticos son 0 y ± 2. Entonces

- Si $y \in (-\infty, -2)$, entonces $y' < 0$ y por tanto la órbita es decreciente.
- Si $y \in (-2, 0)$, entonces $y' > 0$ y por tanto la órbita es creciente.
- Si $y \in (0, 2)$, entonces $y' < 0$ y por tanto la órbita es decreciente.
- Si $y \in (2, \infty)$, entonces $y' > 0$ y por tanto la órbita es creciente.

Así tenemos el diagrama



Un recipiente o tanque contiene 50 litros de agua pura. Se vierten en el tanque una disolución de agua salada a razón de 5 gramos por litro a una velocidad de 7 litros por minuto. El agua del recipiente se mantiene constantemente agitado y se deja salir agua a la misma velocidad. Determinar la cantidad de sal que hay en cada instante en el tanque así como la cantidad máxima de sal que puede haber.

Solución. Sea $x(t)$ la cantidad de sal en el tanque en es instante de tiempo t. Entonces

$$x'(t) = v_e - v_s,$$

donde la velocidad de entrada es

$$v_e = 5 \cdot 7,$$

y la velodidad de salida es

$$v_s = \frac{x(t)}{50}7,$$

por lo que tenemos la ecuación diferencial

$$x' = 35 - \frac{7}{50}x.$$

La solución de la ecuación homogénea es $x_h(t) = ce^{-7t/50}$ y proponiendo $x_p(t) = A$ como solución particular de la ecuación no homogénea y teniendo en cuenta que su derivada es nula y sustituyendo en la ecuación se tiene

$$0 = -\frac{7}{50}A + 35,$$

de donde $A = 250$ y la solución general de la ecuación no homogénea es

$$x(t) = ce^{-7t/50} + 250.$$

Como el agua inicialmente era pura se verifica que

$$x(0) = c + 250,$$

de donde $c = -250$ y así

$$x(t) = 250(1 - e^{-7t/50}).$$

Como la función es estrictamente creciente, entonces la cantidad máxima de sal que puede haber es

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} 250(1 - e^{-7t/50}) = 250 \text{ gramos}.$$

Esbozar el diagrama de fases del siguiente sistema autónomo

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x + y \end{cases}$$

Solución. Es sencillo ver que $(0,0)$ es el único punto crítico del sistema. Las isoclinas son las rectas $x + 2y = 0$ e $y = x$. En la primera se tiene que $x' = 0$ e $y' = 3y$, por lo que $y' > 0$ si $y > 0$ e

$y' < 0$ si $y < 0$. En la segunda isoclina se verifica que $y' = 0$ y $x' = 3y$, por lo que $x' > 0$ si $y > 0$ e $x' < 0$ si $y < 0$. Calculamos ahora los valores propios de la matriz del sistema con la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ -1 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 2t + 3 = 0,$$

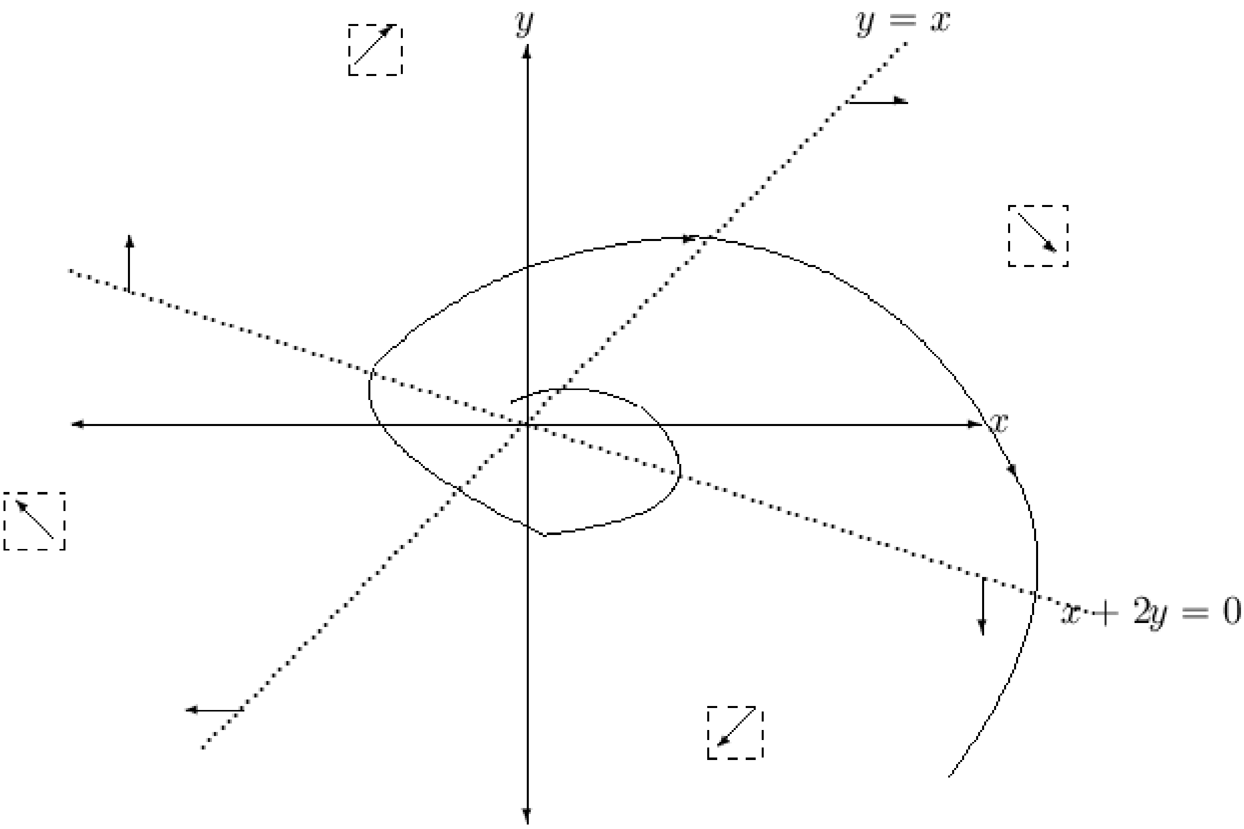
con lo que

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}i,$$

por lo que la solución del sistema será de la forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^t \left(\mathbf{M}_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(t\sqrt{2}) \\ \cos(t\sqrt{2}) \end{pmatrix} + \mathbf{M}_2 \cdot \begin{pmatrix} \sin(t\sqrt{2}) \\ \sin(t\sqrt{2}) \end{pmatrix} \right),$$

donde $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ son dos matrices a determinar y las órbitas son espirales que crecen en módulo debido a que la parte real de los valores propios es positiva. Tenemos entonces el diagrama de fases



Capítulo 22

4–2–2005

Enunciado

1. Dada $\mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, ax + y - az, ax + (1 - a)z)$, se pide:

   (a) **(2.5 puntos)** Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ en la base canónica y decidir para qué valores del parámetro a es diagonalizable.

   (b) **(2.5 puntos)** Hallar ecuaciones, bases y dimensiones del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$ en función del parámetro a.

   (c) **(2.5 puntos)** Averiguar para qué valores del parámetro a el vector $(0, 1, 2)$ pertenece a la imagen de $\mathbf{f}$. Averiguar para qué valores de a pertenece dicho vector al núcleo de $\mathbf{f}$.

   (d) **(2.5 puntos)** Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

2. Responder de forma razonada a las siguientes cuestiones:

   (a) **(7.5 puntos)** Determinar la expresión analítica de una aplicación lineal $\mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifica $\mathbf{f}(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$, $\mathbf{f}(1, 1, 0) = (1, 2, 3)$ y $\mathbf{f}(1, 0, 0) = (1, 1, 1)$. Obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ a partir de la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ y obtener la matriz asociada de $\mathbf{f}$ en esta nueva base.

   (b) **(2.5 puntos)** Supongamos que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son tres vectores de $\mathbb{R}^n$ de manera que $< \mathbf{u}, \mathbf{w} > = < \mathbf{v}, \mathbf{w} > = 0$. ¿Es cierto que $< \mathbf{u}, \mathbf{v} > = 0$?

3. Sea $\mathcal{W}$ el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1, 1, 0, 0)$ y $(0, 0, 1, 1)$.

   (a) **(2.5 puntos)** Calcular el subespacio ortogonal de $\mathcal{W}$ y dar una base de éste.

   (b) **(2.5 puntos)** Obtener la expresión analítica de la aplicación lineal $\mathbf{f}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, donde $\mathbf{f}$ es la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre el subespacio $\mathcal{W}$.

   (c) **(2.5 puntos)** ¿Cuál será el núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$? Calcular el subespacio vectorial suma del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$. ¿Será dicha suma directa?

   (d) **(2.5 puntos)** Obtener todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuya proyección ortogonal sobre $\mathcal{W}$ sea $(1, 1, 1, 1)$.

4. En una aldea conviven un agricultor y un ganadero que producen al año 100 Kg de vegetales y 200 Kg de carne, respectivamente. En dicho periodo el agricultor consume 1/4 de su producción y el resto se lo vende al ganadero que a su vez consume la mitad de su propia producción y vende la otra mitad al agricultor. Para que ninguno salga beneficiado se establece que a principio de cada año se acuerde un nuevo precio por kilo de cada producto de manera que el valor de la producción en dicho año de cada producto coincida con el dinero total gastado por el productor correspondiente el año anterior (considerar también como gasto lo que cada uno consume de su propia producción al precio de venta).

   (a) **(2.5 puntos)** Si llamamos p_n, q_n a los precios por kilo de vegetales y carne en el año n-ésimo, demuestra que se tiene que

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1 \\ 3/8 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

   (b) **(5 puntos)** Si $p_0 = 1$ y $q_0 = 2$, calcula explícitamente p_n y q_n y estudia si estos precios tienden a estabilizarse en algún valor concreto.

   (c) **(2.5 puntos)** Demuestra que existe sólo una matriz cuadrada diagonalizable de orden 3 de manera que su único valor propio es 1.

5. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales y problemas de condiciones iniciales:

   (a) **(3 puntos)** $\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} + \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}y' = 0$ (**Ayuda**: Buscar un factor integrante dependiente de xy).

   (b) **(3 puntos)** $x^2y'' - y = x\log x$, $y(1) = y'(1) = 1$.

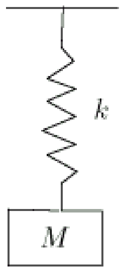
   (c) **(4 puntos)** $\left\{\begin{array}{l} x' = x - y \\ y' = 2x + y \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0. \end{array}\right\}$ ¿Es estable el punto crítico del sistema lineal anterior?

6. Responder de forma razonada a las siguientes cuestiones:

   (a) **(5 puntos)** Esbozar el diagrama de fases del siguiente sistema autónomo

$$\left\{\begin{array}{l} x' = x + 2y \\ y' = -2x - 4y \end{array}\right.$$

   (b) **(5 puntos)** De un resorte elástico pegado al techo pende una masa de 3K$_g$ como muestra la figura siguiente. En estado de equilibrio el muelle se estira 1 $m.$ respecto de su longitud inicial. Posteriormente se introduce dentro de un recipiente con un líquido viscoso. Describir el movimiento descrito por el cuerpo producido al separarlo 1 $m.$ respecto de su posición de equilibrio si suponemos la fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad con constante de proporcionalidad $c = 2$.



Examen resuelto

Dada $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, ax + y - az, ax + (1-a)z)$, se pide:

(a) Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ en la base canónica y decidir para qué valores del parámetro a es diagonalizable.

(b) Hallar ecuaciones, bases y dimensiones del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$ en función del parámetro a.

(c) Averiguar para qué valores del parámetro a el vector $(0, 1, 2)$ pertenece a la imagen de $\mathbf{f}$. Averiguar para qué valores de a pertenece dicho vector al núcleo de $\mathbf{f}$.

(d) Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

Solución. (a) Si denotamos por $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$, la matriz asociada a $\mathbf{f}$ en esta base es

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & -a \\ a & 0 & 1-a \end{pmatrix},$$

dado que $\mathbf{f}(1, 0, 0) = (1, a, a)$, $\mathbf{f}(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{f}(0, 0, 1) = (0, -a, 1-a)$. El polinomio característico de dicha matriz será

$$p(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ a & 1-x & -a \\ a & 0 & 1-a-x \end{vmatrix} = (1-x)^2(1-a-x),$$

de donde los valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1 - a$, ditiguiéndose los siguientes casos:

- Si $a = 0$, entonces $\lambda_1 = 1$ es el único valor propio con multiplicidad tres. El subespacio propio invariante se calcula como

$$(\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) - \mathbf{I}_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

  de donde $\mathrm{Ker}(\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) - \mathbf{I}_3) = \mathbb{R}^3$, que al tener dimensión tres hace que la matriz sea diagonalizable (de hecho es diagonal al ser la identidad $\mathbf{I}_3$).

- Si $a \neq 0$, entonces tenemos los valores propios $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad 2 y $\lambda_2 = 1 - a$ con multiplicidad uno. La matriz será diagonalizable si el subespacio propio asociado a 1 tiene dimensión 2. Para calcular dicho subespacio propio consideramos

$$(\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) - \mathbf{I}_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & -a \\ a & 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

  de donde se obtiene la ecuación $ax - az = 0$, que con las debidas simplificaciones nos da el subespacio propio $\mathrm{Ker}(\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) - \mathbf{I}_3) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$, que tiene dimensión 2, por lo que la matriz también será diagonalizable.

(b) Calculamos en primer lugar el núcleo de $\mathbf{f}$, que se obtendrá de las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & -a \\ a & 0 & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el rango de la matriz del sistema anterior mediante operaciones elementales

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & -a \\ a & 0 & 1-a \end{pmatrix} \to_{F_2-aF_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ a & 0 & 1-a \end{pmatrix} \to_{F_3-aF_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix},$$

de donde el rango será 3 si $a \neq 1$ y 2 si $a = 1$. Si $a \neq 1$, entonces el sistema anterior será compatible determinado y por tanto la única solución del sistema es la solución trivial, de donde $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(0,0,0)\}$. Por otro lado, si $a = 1$ el sistema se escribe como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \text{ e } y = z\}$. Una base es $\{(0,1,1)\}$, de donde $\dim \mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = 1$.

Calculamos ahora la imagen de $\mathbf{f}$. Si $a \neq 1$ se verifica que

$$\dim \mathrm{im}\mathbf{f} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = 3 - 0 = 3,$$

de donde $\mathrm{im}\mathbf{f} = \mathbb{R}^3$ y una base será por ejemplo la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Si $a = 1$,

$$\dim \mathrm{im}\mathbf{f} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = 3 - 1 = 2.$$

Para calcular lae ecuaciones de la imagen, sabemos que $(x,y,z) \in \mathrm{im}\mathbf{f}$ si existe $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{f}(\alpha,\beta,\gamma) = (x,y,z)$, que matricialmente se escribe como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como el sistema es compatible y el rango de la matriz asociada es dos, para que el rango de la matriz ampliada sea también dos se verifica la condición

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = z - x = 0,$$

de donde $\mathrm{im}\mathbf{f} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\}$ y una base será $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$.

(c) Si $a \neq 1$ el vector $(0,1,2) \in \mathrm{im}\mathbf{f} = \mathbb{R}^3$ y $(0,1,2) \notin \mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(0,0,0)\}$. Si $a = 1$, entonces $(0,1,2) \notin \mathrm{im}\mathbf{f}$ dado que $0 \neq 2$ y $(0,1,2) \notin \mathrm{Ker}(\mathbf{f})$ dado que $1 \neq 2$.

(d) Calculamos la matriz pedida usando las matrices de cambio de base según la fórmula

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) &= \mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}) \\
&= [\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})]^{-1} \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & -a \\ a & 0 & 1-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & a & 1-a \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

> Determinar la expresión analítica de una aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifica $\mathbf{f}(1,1,1) = (0,0,0)$, $\mathbf{f}(1,1,0) = (1,2,3)$ y $\mathbf{f}(1,0,0) = (1,1,1)$. Obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ a partir de la base $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y obtener la matriz asociada de $\mathbf{f}$ en esta nueva base.

Solución. Sea $\mathcal{P} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y denotemos por $\mathcal{C}$ la base canónica. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) &= \mathbf{M}_{\mathcal{CP}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{PC}}(\mathbf{i}) = \mathbf{M}_{\mathcal{CP}}(\mathbf{f}) \cdot [\mathbf{M}_{\mathcal{CP}}(\mathbf{i})]^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

de donde

$$\mathbf{f}(x,y,z) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right]^t = (x - z, x + y - 2z, x + 2y - 3z).$$

Calculamos ahora una base ortonormal a partir de la base $\mathcal{P}$. Para ello obtenemos una base ortogonal $\mathcal{O} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ donde $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$,

$$\mathbf{v}_2 = (1,1,0) - \frac{<(1,1,0),(1,1,1)>}{||(1,1,1)||^2}(1,1,1) = (1/3, 1/3, -2/3),$$

$$\mathbf{v}_3 = (1,0,0) - \frac{<(1,0,0),(1,1,1)>}{||(1,1,1)||^2}(1,1,1) - \frac{<(1,0,0),(1/3,1/3,-2/3)>}{||(1/3,1/3,-2/3)||^2}(1,1,1) = (1/2,-1/2,0).$$

Dividiendo cada vector por su norma obtenemos la base ortonormal

$$\mathcal{N} = \{(\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3), (\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/3), (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)\}.$$

La matriz asociada de $\mathbf{f}$ respecto de la nueva base será

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{\mathcal{NN}}(\mathbf{f}) &= \mathbf{M}_{\mathcal{NC}}(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CN}}(\mathbf{i}) \\
&= [\mathbf{M}_{\mathcal{CN}}(\mathbf{i})]^{-1} \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CN}}(\mathbf{i})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [\mathbf{M}_{\mathcal{CN}}(\mathbf{i})]^t \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CN}}(\mathbf{i}) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{6}}{3} & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{6}}{3} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1+\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{6}(12+\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}) & \frac{1}{6}(\sqrt{2}-4\sqrt{3}+\sqrt{6}) \\ \frac{1}{6}(12+\sqrt{2}-4\sqrt{3}-2\sqrt{6}) & -1+\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{6}(\sqrt{2}+4\sqrt{3}-\sqrt{6}) \\ \frac{1}{6}(-2\sqrt{2}+4\sqrt{3}-\sqrt{6}) & \frac{1}{6}(-2\sqrt{2}-4\sqrt{3}+\sqrt{6}) & 1-\frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Supongamos que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son tres vectores de $\mathbb{R}^n$ de manera que $< \mathbf{u}, \mathbf{w} >=< \mathbf{v}, \mathbf{w} >= 0$. ¿Es cierto que $< \mathbf{u}, \mathbf{v} >= 0$?

Solución. La propiedad es falsa. Para ello consideramos $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual y los vectores $\mathbf{u} = (1, 0)$, $\mathbf{v} = (2, 0)$ y $\mathbf{w} = (0, 1)$. Entonces

$$< \mathbf{u}, \mathbf{w} >=< \mathbf{v}, \mathbf{w} >= 0 \text{ y } < \mathbf{u}, \mathbf{v} >= 2 \neq 0.$$

Sea $\mathcal{W}$ el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1, 1, 0, 0)$ y $(0, 0, 1, 1)$.

(a) Calcular el subespacio ortogonal de $\mathcal{W}$ y dar una base de éste.

(b) Obtener la expresión analítica de la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, donde $\mathbf{f}$ es la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre el subespacio $\mathcal{W}$.

(c) ¿Cuál será el núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$? Calcular el subespacio vectorial suma del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$. ¿Será dicha suma directa?

(d) Obtener todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuya proyección ortogonal sobre $\mathcal{W}$ sea $(1, 1, 1, 1)$.

Solución. (a) Un vector $(x, y, z, t) \in \mathcal{W}^\perp$ si

$$< (x, y, z, t), (1, 1, 0, 0) >= x + y = 0,$$

y

$$< (x, y, z, t), (0, 0, 1, 1) >= z + t = 0,$$

de donde

$$\mathcal{W}^\perp = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ y } z + t = 0\}.$$

Una base del mismo será $\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$.

(b) Construimos la base ortonormal de $\mathcal{W}$ dividiendo los vectores $(1, 1, 0, 0)$ y $(0, 0, 1, 1)$ por su norma (nótese que son ortogonales entre sí), teniéndose la base $\{(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0, 0), (0, 0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)\}$. Dado $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ su proyección ortogonal sobre $\mathcal{W}$ viene dada por

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f}(x, y, z, t) &= < (x, y, z, t), (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0, 0) > (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0, 0) \\
&+ < (x, y, z, t), (0, 0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) > (0, 0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \\
&= 1/2(x + y, x + y, z + t, z + t).
\end{aligned}
$$

(c) Como $\mathbf{f}$ es una proyección se tiene que $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \mathcal{W}^\perp$ e $\mathrm{im}\mathbf{f} = \mathcal{W}$. Además $\mathcal{W}^\perp \oplus \mathcal{W}$.

(d) Calculamos los $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tales que $\mathbf{f}(x, y, z, t) = (1, 1, 1, 1)$, que obtendremos del sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

que tiene por solución

$$\begin{cases} x = \lambda, \\ y = 2 - \lambda, \\ z = \mu, \\ t = 2 - \mu, \end{cases} \text{ con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

En una aldea conviven un agricultor y un ganadero que producen al año 100 Kg de vegetales y 200 Kg de carne, respectivamente. En dicho periodo el agricultor consume 1/4 de su producción y el resto se lo vende al ganadero que a su vez consume la mitad de su propia producción y vende la otra mitad al agricultor. Para que ninguno salga beneficiado se establece que a principio de cada año se acuerde un nuevo precio por kilo de cada producto de manera que el valor de la producción en dicho año de cada producto coincida con el dinero total gastado por el productor correspondiente el año anterior (considerar también como gasto lo que cada uno consume de su propia producción al precio de venta).

(a) Si llamamos p_n, q_n a los precios por kilo de vegetales y carne en el año n-ésimo, demuestra que se tiene que

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1 \\ 3/8 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(b) Si $p_0 = 1$ y $q_0 = 2$, calcula explícitamente p_n y q_n y estudia si estos precios tienden a estabilizarse en algún valor concreto.

Solución. (a) En la notación del ejercicio, tenemos que

$$\begin{aligned} 100p_n &= 25p_{n-1} + 100q_{n-1}, \\ 200q_n &= 75p_{n-1} + 100q_{n-1}, \end{aligned}$$

de donde, dividiendo por 100 y 200 respectivamente y expresando en forma matricial las ecuaciones tenemos la identidad pedida.

(d) Diagonalizamos la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1 \\ 3/8 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Para ello calculamos el polinomio característico

$$p(x) = |\mathbf{A} - x\mathbf{I}_2| = x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} = 0,$$

de donde obtenemos los valores propios 1 y $-1/4$. Calculamos los subespacios propios asociados

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I}_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1 \\ 3/8 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-\mathbf{I}_2) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 3x = 4y\}$ y

$$(\mathbf{A}+\frac{1}{4}\mathbf{I}_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 3/8 & 3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}+1/4\mathbf{I}_2) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x = -2y\}$. Obtenemos la base de vectores propios $\mathcal{B} = \{(4,3),(-2,1)\}$ y entonces

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) \\
&= \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}\cdot[\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})]^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Además

$$\mathbf{A}^n = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}^n\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, como

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} &= \mathbf{A}^n\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}^n\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2-(-1/4)^n \\ \frac{1}{2}(3+(-1/4)^n) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} 2-(-1/4)^n = 2$$

y

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(3+(-1/4)^n) = \frac{3}{2}.$$

Demuestra que existe sólo una matriz cuadrada diagonalizable de orden 3 de manera que su único valor propio es 1.

Solución. Sea $\mathbf{A}$ una matriz 3×3 diagonalizable con 1 como único valor propio con multiplicidad 3. Al ser $\mathbf{A}$ diagonalizable, el subespacio propio asociado $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-\mathbf{I}_3)$ tiene dimensión 3. Entonces el sistema

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

verifica que la matriz asociada al mismo $\mathbf{A} - \mathbf{I}_3$ tiene rango 0, esto es

$$\mathbf{A} - \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_3.$$

Resolver

$$\frac{x^2y}{x^2+y^2} + \frac{xy^2}{x^2+y^2}y' = 0.$$

(**Ayuda**: Buscar un factor integrante dependiente de xy).

Solución. Dividiendo por xy y multiplicando por x^2+y^2 la ecuación se reduce a

$$x + yy' = 0$$

que es de variables separables y cuya solución es

$$\frac{y(x)^2}{2} = \int y(x)y'(x)dx = \int -xdx = -\frac{x^2}{2} + k,$$

es decir

$$y(x)^2 + x^2 = k > 0.$$

Resolver

$$\begin{cases} x^2y'' - y = x\log x, \\ y(1) = y'(1) = 1. \end{cases}$$

Solución. Hacemos el cambio $x = e^t$, de donde si denotamos por $\dot{y}$ la derivada de y respecto a t se tiene que

$$\begin{aligned} y' &= \dot{y}\, e^{-t} \\ y'' &= \ddot{y}\, e^{-2t} - \dot{y}\, e^{-2t}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación original obtenemos la ecuación

$$\ddot{y} - \dot{y} - y = te^t$$

junto con las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $\dot{y}\,(0) = 1$. Calculamos la solución de la ecuación homogénea obteniendo las raíces del polinomio característico $p(r) = r^2 - r - 1 = 0$, que da como solución $r = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, de donde la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h(t) = c_1 e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} + c_2 e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}.$$

Proponemos una solución particular $y_p(t) = (At + B)e^t$, de donde derivando dos veces y sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$te^t = (At + B + 2A)e^t - (At + B + A)e^t - (At + B)e^t = -Ate^t + (-B + A)e^t,$$

de donde

$$\begin{cases} 0 = A - B, \\ 1 = -A, \end{cases}$$

y así $A = B = -1$ y

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} + c_2 e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t} - (t+1)e^t.$$

Sustituyendo las condiciones iniciales contruimos el sistema

$$\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 + c_2 - 1, \\ 1 = \dot{y}\ (0) = c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 2, \end{cases}$$

de donde $c_1 = \sqrt{5}$ y $c_2 = 2 - \sqrt{5}$ y la solución del problema de condiciones iniciales original es

$$y(x) = \sqrt{5} x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + (2 - \sqrt{5}) x^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} - x(1 + \log x).$$

Resolver

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - y \\ y' = 2x + y \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0. \end{array} \right\}$$

¿Es estable el punto crítico del sistema lineal anterior?

Solución. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz del sistema y calculamos su polinomio característico

$$p(r) = |\mathbf{A} - r\mathbf{I}_2| = r^2 - 2r + 3,$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}i$ y $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}i$. Calculamos a continuación

$$\frac{1}{r^2 - 2r + 3} = \frac{a_1}{r - 1 - i\sqrt{2}} + \frac{a_2}{r - 1 + i\sqrt{2}}$$

obteniéndose el sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ (-1 + i\sqrt{2})a_1 + (-1 - i\sqrt{2})a_2 = 1, \end{cases}$$

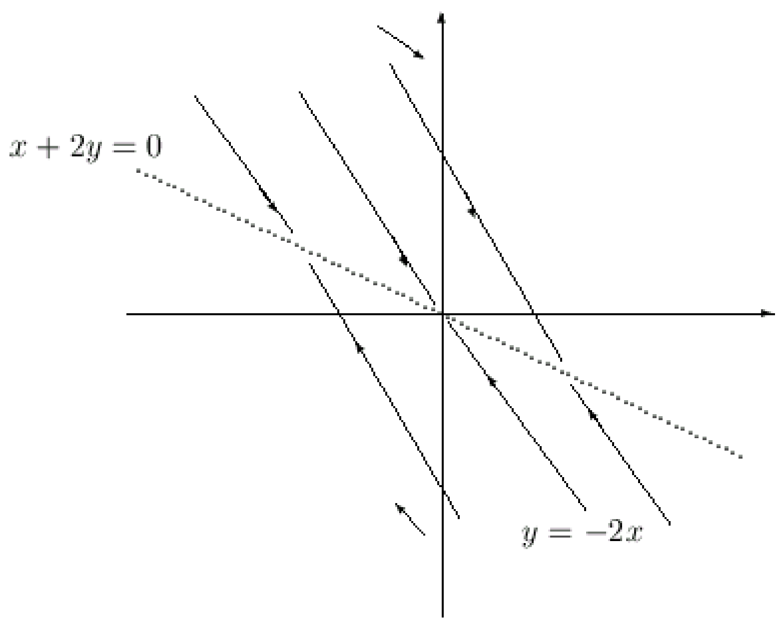
de donde $a_1 = -a_2 = -\frac{1}{i2\sqrt{2}}$ y $q_1(r) = r - 1 + i\sqrt{2}$ y $q_2(r) = r - 1 - i\sqrt{2}$. Entonces

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^{\lambda_1 t} a_1 q_1(\mathbf{A}) + e^{\lambda_2 t} a_2 q_2(\mathbf{A}) \\ &= -\frac{e^{t(1+i\sqrt{2})}}{i2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i\sqrt{2} & -1 \\ 2 & i\sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{e^{t(1-i\sqrt{2})}}{i2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i\sqrt{2} & -1 \\ 2 & -i\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} \frac{-e^{it\sqrt{2}} - e^{-ti\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{e^{it\sqrt{2}} - e^{-ti\sqrt{2}}}{2i} \\ \sqrt{2} \frac{-e^{it\sqrt{2}} + e^{-ti\sqrt{2}}}{2i} & \frac{-e^{it\sqrt{2}} - e^{-ti\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} -\cos(\sqrt{2}t) & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ -\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) & -\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

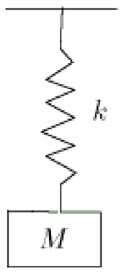
Como
$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{0\mathbf{A}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$
se tiene que $c_1 = -1$ y $c_2 = 0$ y así la única solución del sistema es
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -\cos(\sqrt{2}t) & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ -\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) & -\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t\cos(\sqrt{2}t) \\ \sqrt{2}e^t\sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}.$$

Esbozar el diagrama de fases del siguiente sistema autónomo
$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -2x - 4y \end{cases}$$

Solución. Calculamos los valores propios de la matriz
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$
que son 0 y 3, por lo que estamos ante un caso degenerado. Calculamos las integrales primeras resolviendo la ecuación
$$y' = -2,$$
de donde las integrales primeras son las rectas
$$y = -2x + c.$$
Por otro lado, la recta
$$x + 2y = 0$$
es una recta de puntos críticos. Teniendo en cuenta las direcciones de las derivadas de x e y esbozamos el diagrama de fases



De un resorte elástico pegado al techo pende una masa de 3K$_g$ como muestra la figura siguiente. En estado de equilibrio el muelle se estira 1 m. respecto de su longitud inicial. Posteriormente se introduce dentro de un recipiente con un líquido viscoso. Describir el movimiento descrito por el cuerpo producido al separarlo 1 m. respecto de su posición de equilibrio si suponemos la fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad con constante de proporcionalidad $c = 2$.



Solución. La condición de equilibrio es

$$mg = k\Delta x$$

donde $m = 3$, $g = 10$ y $\Delta x = 1$. Así $k = 30$. A continuación construimos la ecuación

$$mx'' + cx' + kx = 0$$

y sustituyendo por los valores se concreta en

$$3x'' + 2x' + 30x = 0.$$

Esta ecuación se resuleve fácilmente (las raíces de su polinomio característico son $\frac{-1\pm i\sqrt{356}}{6}$) de donde las ecuaciones de movimiento son

$$x(t) = c_1 e^{-t/6} \cos\left(\frac{\sqrt{356}}{6}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{356}}{6}t\right).$$

Como $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$, tenemos el sistema

$$\begin{cases} 1 = c_1, \\ 0 = \frac{\sqrt{356}}{6}c_2, \end{cases}$$

de donde $c_2 = 0$ y la única solución es

$$x(t) = e^{-t/6} \cos\left(\frac{\sqrt{356}}{6}t\right).$$

Capítulo 23

7–6–2005

Enunciado

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales y problemas de condiciones iniciales:

   (a) **(2 puntos)** $y' - \frac{y}{x-1} = x^2 + 2$, $y(2) = 0$.

   (b) **(3 puntos)** $y'' - 2y' + 5y = 2e^x \cos(2x)$.

   (c) **(5 puntos)** $x' = x + y + t$; $y' = -x + 2y + z$; $z' = x$. Estudiar además la estabilidad del punto crítico del sistema homogéneo.

2. Dado el sistema

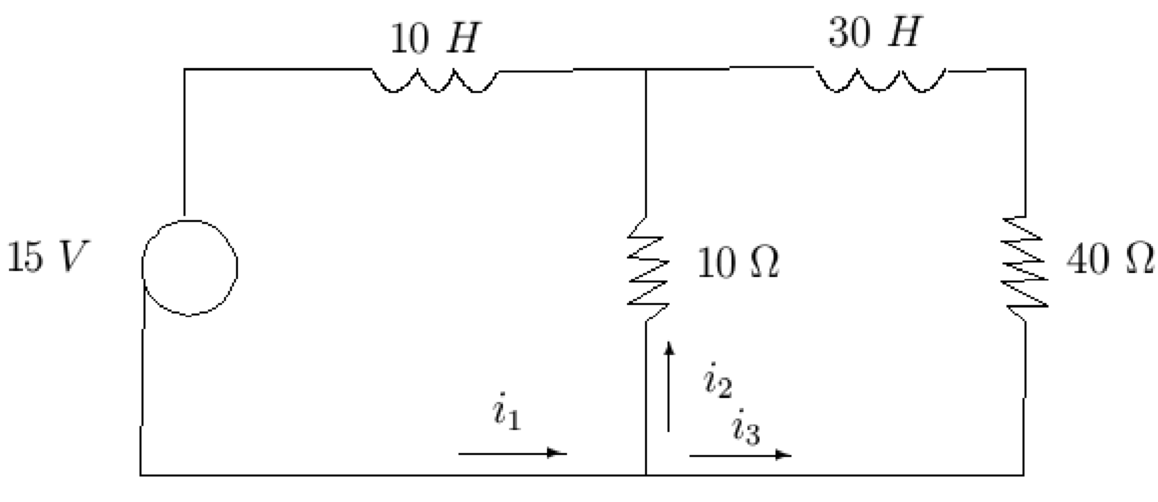
$$\begin{cases} x' = y^2 - xy, \\ y' = x^2 - xy, \end{cases}$$

   se pide

   (a) **(8 puntos)** Obtener el diagrama de fases del mismo.

   (b) **(2 puntos)** ¿Son estables los puntos críticos? ¿Son asintóticamente estables?

3. Dado el circuito de la figura se pide:



(a) (**2 puntos**) Probar que

$$\begin{cases} i_1' = -i_1 + i_3 + 3/2, \\ i_3' = \frac{1}{3} i_1 - \frac{5}{3} i_3. \end{cases}$$

(b) (**5 puntos**) Determinar $\lim_{t\to\infty} i_2(t)$.

4. (**3 puntos**) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y consideremos el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

¿Puede afirmarse que dicho problema tiene solución única? Razona la respuesta.

Examen resuelto

Resolver

$$\begin{cases} y' - \frac{y}{x-1} = x^2 + 2, \\ y(2) = 0. \end{cases}$$

Solución. Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea integrando

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int \frac{dx}{x-1},$$

de donde

$$\log y(x) = \log(x-1) + c,$$

o equivalentemente

$$y_h(x) = k(x-1),\ k = e^c.$$

Proponemos una solución de la ecuación no homogénea de la forma $y(x) = k(x)(x-1)$. Derivando,

$$y'(x) = k'(x)(x-1) + k(x),$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea y simplificando

$$k'(x)(x-1) = x^2 + 2,$$

con lo que

$$k(x) = \int \frac{x^2+2}{x-1} dx = \int \left(x + 1 + \frac{3}{x-1} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x + 3\log(x-1) + c,$$

por lo que la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y(x) = c(x-1) + \left(\frac{x^2}{2} + x + 3\log(x-1) \right)(x-1).$$

Utilizando las condiciones iniciales

$$y(2) = 0 = c + 3,$$

tenemos que $c = -3$ y por tanto la solución del problema de condiciones iniciales es

$$y(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} - 4x + 3 + 3(x-1)\log(x-1).$$

Resolver

$$y'' - 2y' + 5y = 2e^x \cos(2x).$$

Solución. Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea mediante la ecuación característica

$$x^2 - 2x + 5 = 0,$$

y

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = 1 \pm i2,$$

por lo que la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h(x) = c_1 e^x \cos(2x) + c_2 e^x \sin(2x).$$

Proponemos como solución de la ecuación no homogénea $y_p(x) = Axe^x \cos(2x) + Bxe^x \sin(2x)$ y derivamos dos veces

$$y_p'(x) = ((A + 2B)x + A)e^x \cos(2x) + ((-2A + B)x + B)e^x \sin(2x),$$

$$y_p''(x) = ((-3A + 4B)x + 2A + 4B)e^x \cos(2x) + ((-4A - 3B)x - 4A + 2B)e^x \sin(2x).$$

Sustituyendo en la ecuación no homogénea y simplificando

$$4Be^x \cos(2x) - 4Ae^x \sin(2x) = 2e^x \cos(2x),$$

de donde igualando coeficientes obtenemos directamente $A = 0$ y $B = 1/2$. Entonces la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y(x) = c_1 e^x \cos(2x) + c_2 e^x \sin(2x) + \frac{1}{2} x e^x \cos(2x).$$

Resolver $x' = x + y + t$; $y' = -x + 2y + z$; $z' = x$. Estudiar además la estabilidad del punto crítico del sistema homogéneo.

Solución. Escribimos el sistema de forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores propios de la matriz mediante la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 & 0 \\ -1 & 2-t & 1 \\ 1 & 0 & -t \end{vmatrix} = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1 = -(t-1)^3 = 0,$$

por lo que 1 es el único valor propio de multiplicidad tres. Por tanto $a_1 = q_1(t) = 1$ y

$$\begin{aligned}
e^{t\mathbf{A}} &= e^t a_1(\mathbf{A}) \cdot q_1(\mathbf{A}) \sum_{i=0}^{2} (\mathbf{A} - \mathbf{I}_3)^i \frac{t^i}{i!} \\
&= e^t \left(\mathbf{I}_3 + (\mathbf{A} - \mathbf{I}_3)t + (\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} + \mathbf{I}_3)\frac{t^2}{2} \right) \\
&= e^t \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} \right) \\
&= e^t \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} & t + \frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2} \\ -t & 1 + t & t \\ t - \frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2} & 1 - t + \frac{t^2}{2} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

por lo que la solución del sistema homogéneo es

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \\ z_h(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} & t + \frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2} \\ -t & 1 + t & t \\ t - \frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2} & 1 - t + \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Proponemos como solución del sistema no homogéneo $x_p(t) = At + B$, $y_p(t) = Ct + D$ y $z_p(t) = Et + F$, cuyas derivadas son $x_p'(t) = A$, $y_p'(t) = C$ y $z_p'(t) = E$. Sustituyendo en el sistema no homogéneo y simplificando

$$\begin{cases} A = At + B + Ct + D + t, \\ C = -At - B + 2Ct + 2D + Et + F, \\ E = At + B, \end{cases}$$

obtenemos el sistema

$$\begin{cases} A + C = -1, \\ B + D = 0, \\ -A + 2C + E = 0, \\ B + C - F = 0, \\ A = 0, \\ E = B, \end{cases}$$

de donde $A = 0$, $C = -1$, $E = B = 2$, $F = 1$ y $D = -2$. La solución del sistema no homogéneo es por tanto

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} & t + \frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2} \\ -t & 1 + t & t \\ t - \frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2} & 1 - t + \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -t - 2 \\ 2t + 1 \end{pmatrix}$$

ó

$$\begin{cases} x(t) = e^t \left(c_1 + c_2 t + \frac{c_2 + c_3 - c_1}{2} t^2 \right) + 2, \\ y(t) = e^t \left(c_2 + (c_2 + c_3 - c_1)t \right) - t - 2, \\ z(t) = e^t \left(c_3 + (c_1 - c_3)t + \frac{c_2 + c_3 - c_1}{2} t^2 \right) + 2t + 1. \end{cases}$$

Dado el sistema

$$\begin{cases} x' = y^2 - xy, \\ y' = x^2 - xy, \end{cases}$$

se pide

(a) Obtener el diagrama de fases del mismo.

(b) ¿Son estables los puntos críticos? ¿Son asintóticamente estables?

Solución. (a) Los puntos críticos los obtenemos del sistema

$$\begin{cases} y^2 - xy = 0, \\ x^2 - xy = 0, \end{cases}$$

que se reescribe

$$\begin{cases} y(y-x) = 0, \\ x(x-y) = 0, \end{cases}$$

de donde $y = x$ es una recta que anula ambas ecuaciones y por tanto una recta de puntos críticos. Por otra parte obtenemos fácilmente que $(0,0)$ es otro punto crítico. Las isoclinas son las rectas $y = 0$ y $x = 0$. En la primera $x' = 0$ e $y' = x^2 > 0$. En la segunda isoclina $y' = 0$ y $x' = y^2 > 0$. Además $x' > 0$ siempre que o bien $y > 0$ e $y > x$ o bien $y < 0$ e $y < x$. En caso contrario $x' < 0$. Similarmente $y' > 0$ si o bien $x > 0$ y $x > y$ o bien $x < 0$ y $x < y$, e $y' < 0$ en caso contrario.

Calculamos las integrales primeras mediante la ecuación

$$y' = \frac{x(x-y)}{y(y-x)} = -\frac{x}{y},$$

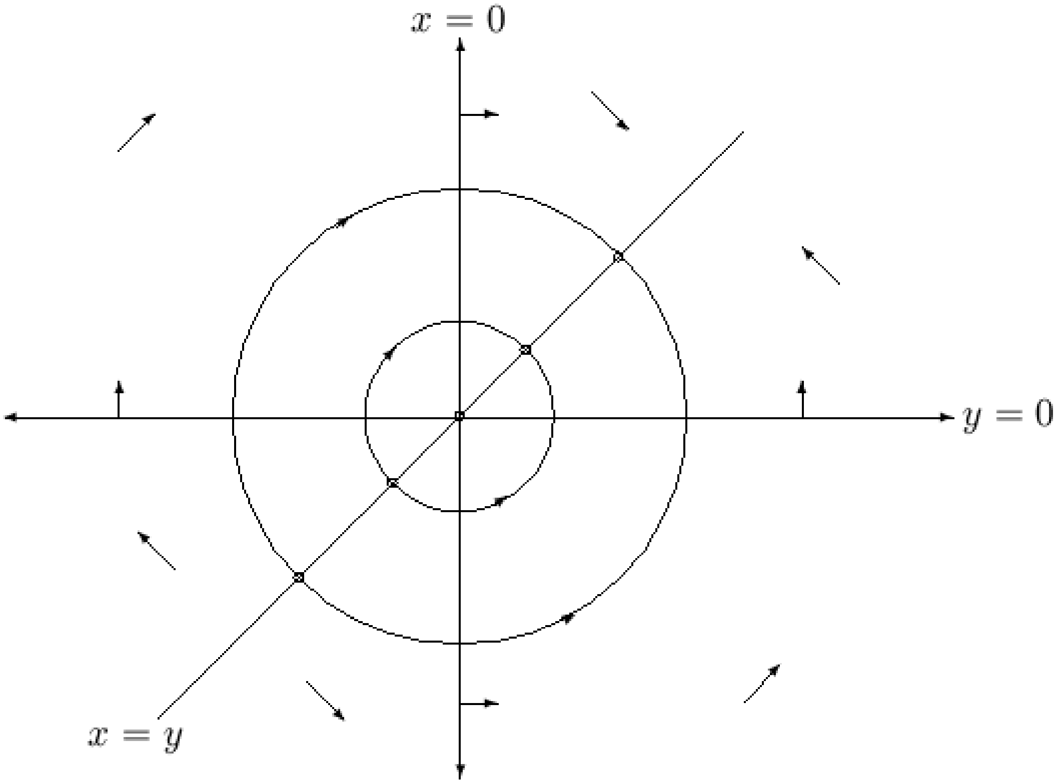
que integrando

$$\int y(x)y'(x)dx = -\int xdx,$$

nos da

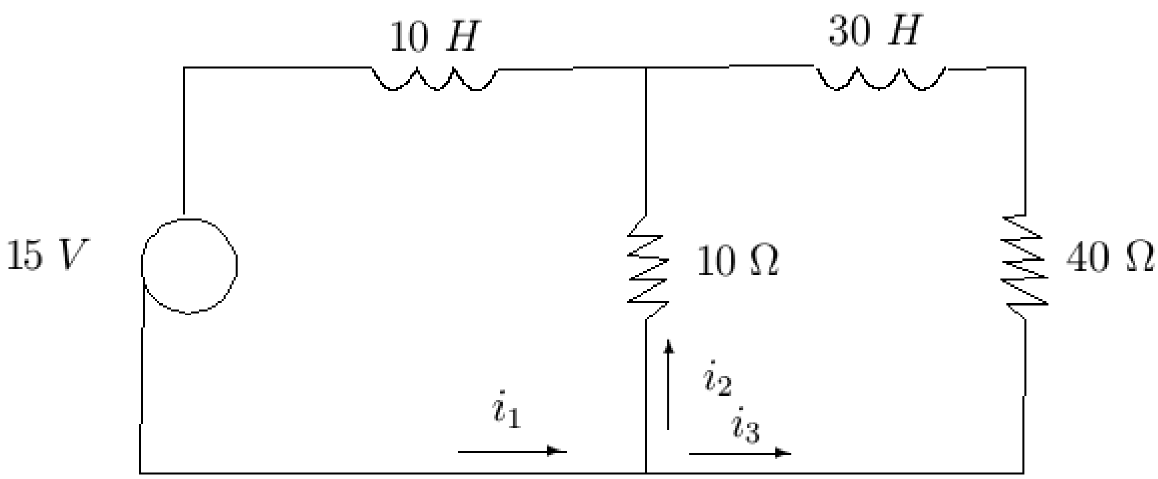
$$x^2 + y^2 = c,$$

que es la familia de circunferencias concéntricas centradas en $(0,0)$. Cada circunferencia corta a la recta de puntos críticos en dos puntos, por lo que cada isoclina da lugar a cuatro órbitas: dos puntos críticos y dos arcos de circunferencia, como muestra el diagrama



(b) Se observa del diagrama que los puntos de la recta tal que $x \leq 0$ son inestables mientras que si $x > 0$ son estables, aunque no asintóticamente estables.

Dado el circuito de la figura se pide:



(a) Probar que

$$\left\{\begin{array}{l} i_1' = -i_1 + i_3 + 3/2, \\ i_3' = \frac{1}{3}i_1 - \frac{5}{3}i_3. \end{array}\right.$$

(b) Determinar $\lim_{t\to\infty} i_2(t)$.

Solución. (a) Como la suma de las intensidades entrantes en cada nudo coincide con la suma de las salientes tenemos que

$$i_1 = i_2 + i_3.$$

Por otra parte, suponiendo que el sentido de la corriente es contrario a las agujas del reloj, tenemos en el subcircuito de la izquierda que

$$V(t) = V_{L_1} + V_{R_1},$$

y en el de la derecha

$$0 = -V_{R_1} + V_{R_2} + V_{L_2},$$

donde $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 40\Omega$, $L_1 = 10H$ y $L_2 = 30H$. Sustituyendo los datos tenemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} 15 = 10i_1' + 10i_2, \\ 0 = -10i_2 + 40i_3 + 30i_3'. \end{array}\right.$$

Sustituyendo $i_2 = i_1 - i_3$ y simplificando tenemos

$$\left\{\begin{array}{l} i_1' = -i_1 + i_3 + 3/2, \\ i_3' = \frac{1}{3}i_1 - \frac{5}{3}i_3. \end{array}\right.$$

(b) Escribimos el sistema de foma matricial

$$\begin{pmatrix} i_1' \\ i_3' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores propios de la matriz con la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} -1-t & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3}-t \end{vmatrix} = t^2 + \frac{8}{3}t + \frac{4}{3} = 0,$$

y

$$t = \frac{-\frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} - \frac{16}{3}}}{2} = -\frac{4}{3} \pm \frac{2}{3},$$

por lo que los valores propios son -2 y $-2/3$. Como ambos son negativos se verifica que

$$\lim_{t\to\infty} e^{t\mathbf{A}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para todo $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. Por otro lado, proponemos como solución del sistema no homogéneo $i_{1,p}(t) = A$ e $i_{3,p}(t) = B$, cuyas derivadas son nulas y sustituyendo en el sistema no homogéneo

$$\begin{cases} 0 = -A + B + \frac{3}{2}, \\ 0 = \frac{1}{3}A - \frac{5}{3}B, \end{cases}$$

de donde $A = 15/8$ y $B = 3/8$. Entonces

$$\lim_{t\to\infty} \begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_3(t) \end{pmatrix} = \lim_{t\to\infty} \left(e^{t\mathbf{A}} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{15}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{15}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Por tanto

$$\lim_{t\to\infty} i_2(t) = \lim_{t\to\infty} (i_1(t) - i_3(t)) = \frac{15}{8} - \frac{3}{8} = \frac{3}{2}\text{A}.$$

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y consideremos el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

¿Puede afirmarse que dicho problema tiene solución única? Razona la respuesta.

Solución. La afirmación es falsa. Basta considerar el problema

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{3}y^{2/3}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

siendo $f(y) = \frac{1}{3}y^{2/3}$ una función continua. Resolvemos la ecuación

$$3\int y(x)^{-2/3}y'(x)dx = \int dx,$$

y

$$y(x)^{1/3} = x + c,$$

de donde

$$y(x) = (x + c)^3.$$

Teniendo en cuenta que $y(0) = 0 = c^3$, tenemos que $c = 0$ e $y(x) = x^3$ es solución del problema. Por otra parte, es fácil ver que $y(x) = 0$ también es solución, por lo que dicho problema no tiene solución única. (**Nota**: este ejercicio reproduce un ejemplo de la teoría).

Capítulo 24

26–6–2005

Enunciado

1. **(2.5 puntos)** Consideremos los subespacios de $\mathbb{R}^3$

   $$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2ay - az = 0\}$$

   y

   $$\mathcal{T} = \mathcal{L}[(-1, -1, a)],$$

   donde a es un parámetro real.

   (a) Calcular la dimensión de $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ y $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ en función de a.

   (b) Hallar, si existen, los valores de a para los cuales $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ son ortogonales.

   (c) Para $a = 1$, dar la matriz respecto de las bases canónicas de alguna aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tenga al subespacio $\mathcal{T}$ como núcleo.

   (d) Para $a = -1$, hallar la expresión de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre el subespacio $\mathcal{S}$.

2. **(2.5 puntos)** Sea la matriz

   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -a & a \end{pmatrix},$$

   donde a es un parámetro real.

   (a) Estudiar si $\mathbf{A}$ es diagonalizable en función de a.

   (b) Si $a = 1/3$, ¿cuál es el límite de $\mathbf{A}^n$ cuando n tiende a $+\infty$?

   (c) ¿Existe alguna matriz $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ sea invertible?

3. **(2.5 puntos)** Sean los vectores $\mathbf{u}_1 = (0, 1, -1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, -2, 0, a)$, $\mathbf{u}_3 = (a, -1, -1, 2)$ y $\mathbf{u}_4 = (2, -3, -1, 3)$, donde a es un parámetro real.

   (a) Hallar los valores de a para los cuales $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ son linealmente dependientes.

   (b) ¿Para qué valores de a el ángulo que forman $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ es igual a $\pi/6$?

(c) Si $a = 1$, calcular las ecuaciones implícitas del subespacio $\mathcal{L}[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \cap \mathcal{L}[\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$ y de su ortogonal.

4. **(2.5 puntos)** Sea $\mathbf{f}(x, y, z) = (-x + y + az, x - y - z, ax - y - z)$ de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, donde a es un parámetro real.

   (a) Hallar los valores de a para los cuales -2 es valor propio de $\mathbf{f}$.

   (b) Hallar los valores de a para los cuales el vector $(1, 0, 1)$ es un vector propio de $\mathbf{f}$.

   (c) Si $a = -1$, calcula las ecuaciones implícitas de la imagen de $\mathbf{f}$ y una base ortonormal del núcleo.

   (d) ¿Hay algún valor de a para el cual $\mathbf{f}$ tenga valores propios complejos no reales?

5. Resuelver las ecuaciones y problemas de condiciones iniciales:

   (a) **(1.5 puntos)** $x' = -x + 5y + 1$, $y' = -x + y + e^t$ con las condiciones iniciales $x(0) = 0, y(0) = 1$.

   (b) **(1 punto)** $y'' + 3y' + 2y = te^{-t} + \cos t$, $y(0) = y'(0) = 0$.

6. **(2.5 puntos)** En un circuito eléctrico RLC en serie realimentado con un diodo la intensidad x y la diferencia de potencial en los extremos del condensador y verifican el sistema diferencial

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = y + ax - \arctan x, \\ y' = -x, \end{array} \right.$$

   donde $a > 0$.

   (a) Halla los puntos críticos del sistema anterior, determina los valores de a para los que dichos equilibrios son hiperbólicos y estudia su estabilidad para tales valores.

   (b) Dibuja de manera aproximada el espacio de fases del sistema linealizado en $(0, 0)$ cuando $a = 2$.

7. **(2.5 puntos)** Un depósito de 100 litros de capacidad contiene 20 litros de agua en la que hay disueltos 10 gramos de sal. A partir de cierto instante se vierten en el depósito 4 litros por minuto de agua que contienen 2 gramos de sal por litro, mientras que se deja salir la disolución bien mezclada a un ritmo de 2 litro por minuto.

   (a) Deducir de manera razonada que la cantidad de sal en el depósito en cada instante es solución de la ecuación diferencial $x' = 8 - x/(10 + t)$.

   (b) Hallar $x(t)$ y di cuál es la concentración de sal en el momento en que el depósito se llena.

   (c) Si la cantidad de agua que sale fuese de 6 litros por minuto, ¿cuál será la concentración de sal justo en el momento en que el depósito se queda vacío?.

8. **(2.5 puntos)** Consideremos la ecuación $(x^2 - 2xy) + (xy - 2y^2)y' = 0$.

   (a) Demuestrar que la ecuación tiene un factor integrante que depende de $x - 2y$.

(b) Resolver la ecuación con la condición inicial $y(0) = 1$.

(c) ¿Puedes hallar la solución con la condición inicial $y(1) = 0$?

(d) Dibujar de manera aproximada el espacio de fases del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = xy - 2y^2, \\ y' = 2xy - x^2. \end{array} \right.$$

Examen resuelto

Consideremos los subespacios de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2ay - az = 0\}$$

y

$$\mathcal{T} = \mathcal{L}[(-1,-1,a)],$$

donde a es un parámetro real.

(a) Calcular la dimensión de $\mathcal{S}+\mathcal{T}$ y $\mathcal{S}\cap\mathcal{T}$ en función de a.

(b) Hallar, si existen, los valores de a para los cuales $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ son ortogonales.

(c) Para $a = 1$, dar la matriz respecto de las bases canónicas de alguna aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tenga al subespacio $\mathcal{T}$ como núcleo.

(d) Para $a = -1$, hallar la expresión de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre el subespacio $\mathcal{S}$.

Solución. (a) Calculamos en primer lugar las ecuaciones de $\mathcal{T}$, teniendo en cuenta que $(x,y,z) \in \mathcal{T}$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(x,y,z) = \lambda(-1,-1,a)$, lo que da lugar a las ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\lambda, \\ y = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = a\lambda, \end{array}\right.$$

y al calcular los rangos

$$\left(\begin{array}{c|c} -1 & x \\ -1 & y \\ a & z \end{array}\right) \to_{\substack{F_2-F_1 \\ F_3+aF_1}} \left(\begin{array}{c|c} -1 & x \\ 0 & y-x \\ 0 & z-ax \end{array}\right),$$

y para que los rangos sean iguales a 1 ha de verificarse que $x = y$ y $z = ax$, por lo que

$$\mathcal{T} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y,\ z = ax\}.$$

Entonces $(x,y,z) \in \mathcal{S}\cap\mathcal{T}$ si y sólo si satisface el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x - 2ax - az = 0, \\ x - y = 0, \\ ax - z = 0, \end{array}\right.$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & -a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to_{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-aF_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & -a & 0 \\ 0 & -1-2a & a & 0 \\ 0 & -2a^2 & a^2-1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to_{\substack{F_3+\frac{1-a^2}{a}F_2 \\ a\neq 0}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & -a & 0 \\ 0 & -1-2a & a & 0 \\ 0 & \frac{a^2-2a-1}{a} & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Si $a=0$, el rango es tres y por tanto $\mathcal{S}\cap\mathcal{T}=\{(0,0,0)\}$ y su dimensión es nula. Si $a\neq 0$ resolvemos la ecuación

$$a^2-2a-1=0,$$

de donde

$$a=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=1\pm\sqrt{2}.$$

Entonces si $a\neq 1\pm\sqrt{2}$ el rango de la matriz es tres y de nuevo $\mathcal{S}\cap\mathcal{T}=\{(0,0,0)\}$ y su dimensión es nula. Si $a=1+\sqrt{2}$, entonces el rango es dos y

$$\mathcal{S}\cap\mathcal{T}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+(2+2\sqrt{2})y-(1+\sqrt{2})z=0,\ -(3+2\sqrt{2})y+(1+\sqrt{2})z=0\},$$

y la dimensión es no. Similarmente si $a=1-\sqrt{2}$, entonces el rango es dos y

$$\mathcal{S}\cap\mathcal{T}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+(2-2\sqrt{2})y-(1-\sqrt{2})z=0,\ -(3-2\sqrt{2})y+(1-\sqrt{2})z=0\},$$

y la dimensión es uno.

Respecto a la suma, tenemos que el subespacio $\mathcal{S}$ tiene por ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x=a\mu-2a\lambda, \\ y=\lambda, \qquad\qquad \lambda,\mu\in\mathbb{R}, \\ z=\mu, \end{cases}$$

por lo que $(x,y,z)=\lambda(-2a,1,0)+\mu(a,0,1)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, y por lo tanto una base de $\mathcal{S}$ es $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}=\{(-2a,1,0),(a,0,1)\}$.

Como

$$\dim(\mathcal{S}+\mathcal{T})=\dim\mathcal{S}+\dim\mathcal{T}-\dim(\mathcal{S}\cap\mathcal{T})=3-\dim(\mathcal{S}\cap\mathcal{T}),$$

por lo que su dimensión será tres si $a\neq 1\pm\sqrt{2}$ y dos en caso contrario.

(b) Para que sean ortogonales basta que lo sean obre una base de los mismos, es decir

$$\begin{cases} \langle(-2a,1,0),(-1,-1,a)\rangle=0, \\ \langle(a,0,1),(-1,-1,a)\rangle=0, \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} 2a+1=0, \\ 0=0, \end{cases}$$

por lo que serán ortogonales si $a=-1/2$.

(c) Una base de $\mathcal{T}$ es $\{(-1,-1,1)\}$, y la completamos a la base de $\mathbb{R}^3$, obteniéndose $\mathcal{B}=\{(1,0,0),(0,1,0),(-1,-1,1)\}$ y supongamos que nuestra aplicación satisface por ejemplo

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(1,0,0) &= (1,0,0), \\ \mathbf{f}(0,1,0) &= (0,1,0), \\ \mathbf{f}(-1,-1,1) &= (0,0,0), \end{aligned}$$

por lo que si $\mathcal{C}$ denota la base canónica de $\mathbb{R}^3$, se tiene que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\mathbf{f})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}),$$

donde

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y al calcular la inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to_{\substack{F_2+F_3 \\ F_1+F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

y

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y la aplicación lineal es

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x, y, z) &= \left(\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)^t = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)^t \\ &= (x+z, y+z, 0). \end{aligned}$$

(d) Una base de $\mathcal{S}$ es $\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{(2,1,0), (-1,0,1)\}$. Buscamos primero una base ortogonal $\mathcal{O} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, donde $\mathbf{v}_1 = (2,1,0)$ y

$$\mathbf{v}_2 = (-1,0,1) - \frac{\langle(-1,0,1),(2,1,0)\rangle}{\langle(2,1,0),(2,1,0)\rangle}(2,1,0) = (-1,0,1) + \frac{2}{5}(2,1,0) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1\right).$$

Una base ortonormal es $\mathcal{N} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ donde

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{||\mathbf{v}_1||}\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}(2,1,0),$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{||\mathbf{v}_2||}\mathbf{v}_2 = \frac{\sqrt{30}}{6}\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1\right).$$

La proyección ortogonal es

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(x, y, z) &= \left\langle (x,y,z), \frac{\sqrt{5}}{5}(2,1,0) \right\rangle \frac{\sqrt{5}}{5}(2,1,0) + \left\langle (x,y,z), \frac{\sqrt{30}}{6}\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1\right) \right\rangle \frac{\sqrt{30}}{6}\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1\right) \\ &= \frac{1}{5}(2x+y)(2,1,0) + \frac{5}{6}\left(-\frac{x}{5} + \frac{2}{5}y + z\right)\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1\right) \\ &= \left(\frac{1}{6}(5x+2y-z), \frac{1}{3}(x+y+z), \frac{1}{6}(-x+2y+5z)\right). \end{aligned}$$

Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -a & a \end{pmatrix},$$

donde a es un parámetro real.

(a) Estudiar si $\mathbf{A}$ es diagonalizable en función de a.

(b) Si $a = 1/3$, ¿cuál es el límite de $\mathbf{A}^n$ cuando n tiende a $+\infty$?

(c) ¿Existe alguna matriz $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ sea invertible?

Solución. (a) Calculamos los valores propios con la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} -t & -a & a \\ 0 & -1-t & 1 \\ 0 & -a & a-t \end{vmatrix} = -t^2(t+1-a) = 0,$$

y distinguimos los siguientes casos:

- Si $a = 1$, entonces 0 es el único valor propio de $\mathbf{A}$ y como su núcleo no es $\mathbb{R}^3$, no puede ser diagonalizable.
- Si $a \neq 1$, entonces los valores propios son 0, doble, y $a-1$, simple. Para que sea diagonalizable debe cumplirse que $\dim \mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = 2$. Calculamos este núcleo con el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -a & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

  de donde $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = z\}$, y una base es $\{(1,0,0),(0,1,1)\}$, por lo que la matriz es diagonalizable.

(b) Si $a = 1/3$, entonces el valor propio simple es $-2/3$ y calculamos $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-\frac{2}{3}\mathbf{I}_3)$ mediante el sistema

$$(\mathbf{A}-\frac{2}{3}\mathbf{I}_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con lo que las ecuaciones paramétricas son

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda, \\ y = 3\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = \lambda, \end{array} \right.$$

por lo que $(x,y,z) = \lambda(1,3,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y una base es $\{(1,3,1)\}$. Así $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,1),(1,3,1)\}$ es una base de vectores propios y

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1},$$

donde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

y calculando la inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{-\frac{1}{2}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow_{\substack{F_2-3F_3 \\ F_1-F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right),$$

de donde

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{P}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{2}{3}\right)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^n & \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^n \\ 0 & \frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^n & \frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^n \\ 0 & \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^n & \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y finalmente

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}^n = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^n & \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^n \\ 0 & \frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^n & \frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^n \\ 0 & \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^n & \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Dado que $|\mathbf{A}| = 0$, s tiene que

$$|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| = 0,$$

por lo que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ no puede ser invertible.

Sean los vectores $\mathbf{u}_1 = (0, 1, -1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, -2, 0, a)$, $\mathbf{u}_3 = (a, -1, -1, 2)$ y $\mathbf{u}_4 = (2, -3, -1, 3)$, donde a es un parámetro real.

(a) Hallar los valores de a para los cuales $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ son linealmente dependientes.

(b) ¿Para qué valores de a el ángulo que forman $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ es igual a $\pi/6$?

(c) Si $a = 1$, calcular las ecuaciones implícitas del subespacio $\mathcal{L}[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \cap \mathcal{L}[\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$ y de su ortogonal.

Solución. (a) Calculamos el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ a & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow_{F_3-aF_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2a-1 & -1 & 2-a^2 \end{pmatrix} \longrightarrow_{F_3-(2a-1)F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2a-2 & 3-2a-a^2 \end{pmatrix},$$

y resolvemos la ecuación $a^2 + 2a - 3 = 0$, de donde

$$a = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = -1 \pm 2,$$

cuyas soluciones son -3 y 1. Distinguimos entonces los siguientes casos:

- Si $a = -3$, el rango es tres y son linealmente independientes.
- Si $a = 1$, el rango es tres y son linealmente dependientes.
- Si $a \notin \{-3, 1\}$, el rango es tres y son linealmente independientes.

(b) Calculamos

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = ||\mathbf{u}_1|| \cdot ||\mathbf{u}_2|| \cos \frac{\pi}{6},$$

y

$$a - 2 = \sqrt{3}\sqrt{5+a^2}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

o equivalentemente

$$a^2 - 4a + 4 = \frac{9}{4}(5 + a^2),$$

y simplificando

$$5a^2 + 16a - 7 = 0,$$

y así

$$a = \frac{-16 \pm \sqrt{256+140}}{10} = \frac{-8 \pm 3\sqrt{11}}{5}.$$

(c) Un vector $(x, y, z, t) \in \mathcal{L}[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ si y sólo si existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$(x, y, z, t) = \lambda(0, 1, -1, 1) + \mu(1, -2, 0, 1),$$

que da lugar al sistema compatible

$$\begin{cases} x = \mu, \\ y = \lambda - 2\mu, \\ z = -\lambda, \\ t = \lambda + \mu, \end{cases}$$

y al calcular los rangos de las matrices del sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & x \\ 1 & -2 & y \\ -1 & 0 & z \\ 1 & 1 & t \end{array}\right) \rightarrow_{\substack{F_3+F_4 \\ F_2-F_4}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & x \\ 0 & -3 & y-t \\ 0 & 1 & z+t \\ 1 & 1 & t \end{array}\right) \rightarrow_{\substack{F_2+3F_3 \\ F_1-F_3}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & x-z-t \\ 0 & 0 & y+3z+2t \\ 0 & 1 & z+t \\ 1 & 1 & t \end{array}\right),$$

y para que ambos rangos sean dos $x - z - t = 0$ e $y + 3z + 2t = 0$, que son las ecuaciones del subespacio.

Un vector $(x, y, z, t) \in \mathcal{L}[\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$ si y sólo si existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tal que y

$$(x, y, z, t) = \lambda(1, -1, -1, 2) + \mu(2, -3, -1, 3),$$

que da lugar al sistema compatible

$$\begin{cases} x = \lambda + 2\mu, \\ y = -\lambda - 3\mu, \\ z = -\lambda - \mu, \\ t = 2\lambda + 3\mu, \end{cases}$$

y al calcular los rangos de las matrices del sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ -1 & -3 & y \\ -1 & -1 & z \\ 2 & 3 & t \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2+F_1 \\ F_3+F_1 \\ F_4-2F_1}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & y+x \\ 0 & 1 & z+x \\ 0 & -1 & t-2x \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3+F_2 \\ F_4-F_2}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & y+x \\ 0 & 0 & z+2x+y \\ 0 & 0 & t-y-3x \end{array}\right),$$

y para que ambos rangos sean dos $2x + y + z = 0$ e $3x + y - t = 0$, que son las ecuaciones del subespacio.

Un vector $(x, y, z, t) \in \mathcal{L}[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \cap \mathcal{L}[\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$ si y sólo si satisface el sistema

$$\begin{cases} x - z - t = 0, \\ y + 3z + 2t = 0, \\ 2x + y + z = 0, \\ 3x + y - t = 0, \end{cases}$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_3-2F_1 \\ F_4-3F_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right),$$

por lo que $\mathcal{L}[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \cap \mathcal{L}[\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4] = \mathcal{L}[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$.

Un vector $(x, y, z, t) \in (\mathcal{L}[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \cap \mathcal{L}[\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4])^\perp$ si y sólo si

$$\begin{cases} \langle (x, y, z, t), (0, 1, -1, 1) \rangle = 0, \\ \langle (x, y, z, t), (1, -2, 0, 1) \rangle = 0, \end{cases}$$

por lo que las ecuaciones son $y - z + t = 0$ y $x - 2y + t = 0$.

Sea $\mathbf{f}(x, y, z) = (-x + y + az, x - y - z, ax - y - z)$ de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, donde a es un parámetro real.

(a) Hallar los valores de a para los cuales -2 es valor propio de $\mathbf{f}$.

(b) Hallar los valores de a para los cuales el vector $(1, 0, 1)$ es un vector propio de $\mathbf{f}$.

(c) Si $a = -1$, calcula las ecuaciones implícitas de la imagen de $\mathbf{f}$ y una base ortonormal del núcleo.

(d) ¿Hay algún valor de a para el cual $\mathbf{f}$ tenga valores propios complejos no reales?

Solución. (a) Si denotamos por $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$, se verifica que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & a \\ 1 & -1 & -1 \\ a & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces -2 será valor propio si el sistema

$$(\mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(\mathbf{f})+2\mathbf{I}_3)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&1&-1\\a&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

tiene una solución distinta de la nula. Al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&a&0\\1&1&-1&0\\a&-1&1&0\end{array}\right)\to_{F_2\times F_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\1&1&a&0\\a&-1&1&0\end{array}\right)\to_{\substack{F_2-F_1\\F_3-aF_1}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\0&0&a+1&0\\0&-1-a&1+a&0\end{array}\right),$$

tenemos que la solución puede ser distinta de la nula si y sólo si $a=-1$.

(b) Ocurrirá si y sólo si existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que

$$\begin{pmatrix}-1&1&a\\1&-1&-1\\a&-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\0\\\lambda\end{pmatrix},$$

que da lugar al sistema

$$\begin{cases}-1+a=\lambda,\\a-1=\lambda,\end{cases}$$

de donde $\lambda=-\lambda$ y por tanto $\lambda=0$ y $a=1$.

(c) Calculamos en primer lugar el núcleo mediante el sistema

$$\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&-1&0\\1&-1&-1&0\\-1&-1&-1&0\end{array}\right)\to_{\substack{F_2+F_1\\F_3-F_1}}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&-1&0\\0&0&-2&0\\0&-2&0&0\end{array}\right),$$

por lo que $\mathrm{Ker}(\mathbf{f})=\{(0,0,0)\}$ y por tanto no tiene ninguna base. Entonces

$$\dim\mathrm{Im}\,\mathbf{f}=\dim\mathbb{R}^3-\dim\mathrm{Ker}(\mathbf{f})=3-0=3$$

e $\mathrm{Im}\,\mathbf{f}=\mathbb{R}^3$.

(d) No, dado que la matriz de $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica es simétrica.

Resolver

$$\begin{cases}x'=-x+5y+1,\\y'=-x+y+e^t\end{cases}$$

con las condiciones iniciales $x(0)=0,y(0)=1$.

Solución. Escribimos el sistema en forma matricial

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\e^t\end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores propios de la matriz con la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} -1-t & 5 \\ -1 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 + 4 = 0,$$

de donde los valores propios son $\pm 2i$. Calculamos ahora

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{a_1}{t-2i} + \frac{a_2}{t+2i} = \frac{(a_1+a_2)t + 2ia_1 - 2ia_2}{p(t)},$$

e igualando coeficientes

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ 2ia_1 - 2ia_2 = 1, \end{cases}$$

de donde $a_1 = -a_2 = \frac{1}{4i}$. Por otra parte

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t-2i} = t + 2i, \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{t+2i} = t - 2i. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^{t2i} a_1(\mathbf{A}) \cdot q_1(\mathbf{A}) + e^{-t2i} a_2(\mathbf{A}) \cdot q_2(\mathbf{A}) \\ &= \frac{e^{t2i}}{4i}(\mathbf{A} + 2i\mathbf{I}_2) - \frac{e^{-t2i}}{4i}(\mathbf{A} - 2i\mathbf{I}_2) \\ &= \frac{e^{t2i}}{4i}\begin{pmatrix} -1+2i & 5 \\ -1 & 1+2i \end{pmatrix} - \frac{e^{-t2i}}{4i}\begin{pmatrix} -1-2i & 5 \\ -1 & 1-2i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4i}\begin{pmatrix} -(e^{t2i} - e^{-t2i}) + 2i(e^{t2i} + e^{-t2i}) & 5(e^{t2i} - e^{-t2i}) \\ -(e^{t2i} - e^{-t2i}) & (e^{t2i} - e^{-t2i}) + 2i(e^{t2i} + e^{-t2i}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sin(2t) + 2\cos(2t) & 5\sin(2t) \\ -\sin(2t) & \sin(2t) + 2\cos(2t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y la solución del sistema homogéneo es

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sin(2t) + 2\cos(2t) & 5\sin(2t) \\ -\sin(2t) & \sin(2t) + 2\cos(2t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Proponemos como solución particular del sistema no homogéneo $x_p(t) = A + Be^t$ e $y_p(t) = C + De^t$, que dervadas $x_p'(t) = Be^t$ e $y_p'(t) = De^t$, y sustituidas en el sistema nos da$x' = -x + 5y + 1$, $y' = -x + y + e^t$

$$\begin{cases} Be^t = -A - Be^t + 5C + 5De^t + 1, \\ De^t = -A - Be^t + C + De^t + e^t, \end{cases}$$

e igulando coeficientes obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 2B + 5D = 0, \\ A - 5C = 1, \\ B = 1, \\ A - C = 0, \end{cases}$$

de donde $B = 1$, $A = C = -1/4$ y $D = -2/5$. La solución general del sistema no homogéneo es por tanto

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sin(2t) + 2\cos(2t) & 5\sin(2t) \\ -\sin(2t) & \sin(2t) + 2\cos(2t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + e^t \\ -\frac{1}{4} - \frac{2}{5}e^t \end{pmatrix}.$$

Utilizamos las condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{13}{20} \end{pmatrix}$$

para obtener $c_1 = -3/4$ y $c_2 = 33/20$. La solución del problema de condiciones iniciales es

$$\begin{cases} x(t) = 9\sin(2t) - \frac{3}{2}\cos(2t) - \frac{1}{4} + e^t, \\ x(t) = \frac{12}{5}\sin(2t) - \frac{33}{10}\cos(2t) - \frac{1}{4} - \frac{2}{5}e^t. \end{cases}$$

Resolver

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = te^{-t} + \cos t, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Solución. Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea mediante la ecuación característica

$$t^2 + 3t + 2 = 0,$$

de donde

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2},$$

y las soluciones son -2 y -1, por lo que

$$y_h(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}.$$

Proponemos como solución de la ecuación no homogénea $y_p(t) = (At^2 + Bt)e^{-t} + C\cos t + D\sin t$. Derivando dos veces

$$y_p'(t) = (-At^2 + (2A - B)t + B)e^{-t} - C\sin t + D\cos t,$$

$$y_p''(t) = (At^2 + (B - 4A)t + 2A - 2B)e^{-t} - C\cos t - D\sin t,$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea y simplificando

$$(2At + 2A + B)e^{-t} + (3D + C)\cos t + (D - 3C)\sin t = te^{-t} + \cos t,$$

e igualando coeficientes

$$\begin{cases} 2A = 1, \\ 2A + B = 0, \\ 3D + C = 1, \\ D - 3C = 0, \end{cases}$$

y $A = 1/2$, $B = -1$, $C = 1/10$ y $D = 3/10$, por lo que la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} + \left(\frac{1}{2}t^2 - t\right) e^{-t} + \frac{1}{10}\cos t + \frac{3}{10}\sin t.$$

Utilizamos las condiciones iniciales, derivando previamente la solución

$$y'(t) = -2c_1 e^{-2t} - c_2 e^{-t} - \left(\frac{1}{2}t^2 + 1\right) e^{-t} - \frac{1}{10}\sin t + \frac{3}{10}\cos t,$$

y

$$\begin{cases} y(0) = 0 = c_1 + c_2 + \frac{1}{10}, \\ y'(0) = 0 = -2c_1 - c_2 - \frac{7}{10}, \end{cases}$$

de donde $c_1 = -3/5$ y $c_2 = 1/2$, y la solución del problema de condiciones iniciales es

$$y(t) = -\frac{3}{5}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t} + \left(\frac{1}{2}t^2 - t\right) e^{-t} + \frac{1}{10}\cos t + \frac{3}{10}\sin t.$$

En un circuito eléctrico RLC en serie realimentado con un diodo la intensidad x y la diferencia de potencial en los extremos del condensador y verifican el sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = y + ax - \arctan x, \\ y' = -x, \end{cases}$$

donde $a > 0$.

(a) Halla los puntos críticos del sistema anterior, determina los valores de a para los que dichos equilibrios son hiperbólicos y estudia su estabilidad para tales valores.

(b) Dibuja de manera aproximada el espacio de fases del sistema linealizado en $(0,0)$ cuando $a = 2$.

Solución. (a) Los puntos críticos se calculan con el sistema

$$\begin{cases} 0 = y + ax - \arctan x, \\ 0 = -x, \end{cases}$$

de donde vemos que $(0,0)$ es el único posible. La matriz jacobiana es

$$\mathbf{Jf}(x,y) = \begin{pmatrix} a - \frac{1}{1+x^2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$\mathbf{Jf}(0,0) = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios se calculan de la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} a-1-t & 1 \\ -1 & -t \end{vmatrix} = t^2 + (1-a)t + 1 = 0,$$

de donde

$$t = \frac{a - 1 \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4}}{2}.$$

Distinguimos los siguientes casos:

- Si $(a-1)^2 - 4 \geq 0$, entonces los valores propios son reales. Nótese que esta condición equivale a $a^2 - 2a - 3 \geq 0$. Si calculamos

  $$a = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = 1 \pm 2,$$

  vemos que se satisface si $a \in (3, \infty)$. En este caso ambos valores propios son positivos, por lo que el punto crítico es hiperbólico y por el Teorema de Hartman–Grobmann es inestable.

- Si $(a-1)^2 - 4 < 0$, entonces los valores propios son complejos. En este caso $a \in (0, 3)$ y la parte real de los valores propios es $\frac{a-1}{2}$, por lo que el punto crítico será hoperbólico si $a \neq 1$, siendo asintóticamente estable si $a < 1$ al ser entonces la parte real negativa, e inestable si $a > 1$.

(b) El sistema linealizado es

$$\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = -x. \end{cases}$$

Es fácil ver que $(0, 0)$ es el único punto crítico del sistema que tiene por isoclinas las rectas $x+y = 0$ y $x = 0$. En la primera $x' = 0$ e $y' = -x$, que será positivo si $x < 0$ y negativo en otro caso. En la segunda isoclina $y' = 0$ y $x' = y$, que será positivo si $x > 0$ y negativo en otro caso. Calculamos los valores propios de la matriz del sistema mediante la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1 - t & 1 \\ -1 & -t \end{vmatrix} = t^2 - t + 1 = 0,$$

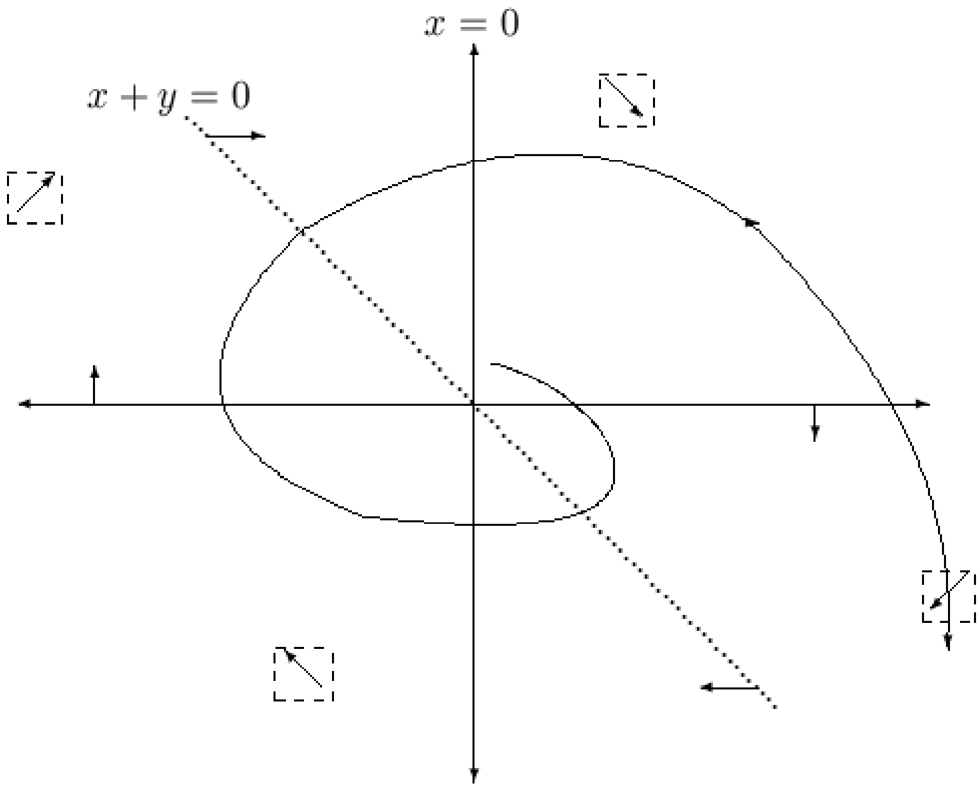
de donde

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

por lo que las soluciones serán de la forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{t/2} \left(\mathbf{M}_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(t\sqrt{3}/2) \\ \cos(t\sqrt{3}/2) \end{pmatrix} + \mathbf{M}_2 \cdot \begin{pmatrix} \sin(t\sqrt{3}/2) \\ \sin(t\sqrt{3}/2) \end{pmatrix} \right),$$

por lo que son soluciones espirales que aumentan en módulo debido a que la parte real de los valores propios es positiva. Tenemos entonces el diagrama



Un depósito de 100 litros de capacidad contiene 20 litros de agua en la que hay disueltos 10 gramos de sal. A partir de cierto instante se vierten en el depósito 4 litros por minuto de agua que contienen 2 gramos de sal por litro, mientras que se deja salir la disolución bien mezclada a un ritmo de 2 litro por minuto.

(a) Deducir de manera razonada que la cantidad de sal en el depósito en cada instante es solución de la ecuación diferencial $x' = 8 - x/(10+t)$.

(b) Hallar $x(t)$ y decir cuál es la concentración de sal en el momento en que el depósito se llena.

(c) Si la cantidad de agua que sale fuese de 6 litros por minuto, ¿cuál será la concentración de sal justo en el momento en que el depósito se queda vacío?

Solución. (a) Sea $x(t)$ la cantidad de sal en cada instante. Entonces

$$x'(t) = v_e - v_s,$$

donde la velocidad de entrada de la sal es

$$v_e = 4 \cdot 2,$$

y la de salida es

$$v_s = 2 \cdot \frac{x(t)}{20+2t},$$

y sustituyendo

$$x'(t) = 8 - \frac{x(t)}{10+t}.$$

(b) Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea integrando

$$\int \frac{x'(t)}{x(t)}dt = -\int \frac{dt}{10+t},$$

con lo que

$$\log x(t) = -\log(10+t) + c,$$

o equivalentemente

$$x(t) = \frac{k}{10+t}, \ k = e^c.$$

Proponemos una solución de la ecuación no homogénea de la forma $x(t) = \frac{k(t)}{10+t}$, derivamos una vez

$$x'(t) = \frac{k'(t)}{10+t} - \frac{k(t)}{(10+t)^2},$$

y sustituimos en la ecuación no homogénea y, simplificando obtenemos

$$\frac{k'(t)}{10+t} = 8,$$

y así

$$k(t) = 8\int (10+t)dt = 4(10+t)^2 + c,$$

por lo que la solución de la ecuación no homogénea es

$$x(t) = \frac{c}{10+t} + 4(10+t).$$

Utilizamos la condición inicial para obtener

$$x(0) = 10 = 40 + \frac{c}{10},$$

de donde $c = -300$ y por tanto la solución del problema de condiciones iniciales es

$$x(t) = -\frac{300}{10+t} + 4(10+t).$$

El depósito estará lleno cuando el volumen $V(t_0) = 20 + 2t_0 = 100$, o sea $t_0 = 40$ minutos. La cantidad de sal será entonces

$$x(40) = -6 + 200 = 194 \text{ gramos}.$$

(c) Si el depósito está vacío la concentración es nula porque no hay mezcla.

Consideremos la ecuación $(x^2 - 2xy) + (xy - 2y^2)y' = 0$.

(a) Demuestrar que la ecuación tiene un factor integrante que depende de $x - 2y$.

(b) Resolver la ecuación con la condición inicial $y(0) = 1$.

(c) ¿Puedes hallar la solución con la condición inicial $y(1) = 0$?

(d) Dibujar de manera aproximada el espacio de fases del sistema

$$\begin{cases} x' = xy - 2y^2, \\ y' = 2xy - x^2. \end{cases}$$

Solución. (a) Sean $P(x, y) = x^2 - 2xy$ y $Q(x, y) = xy - 2y^2$, y escribamos las ecuaciones de factor integrante

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\mu(x,y) + P(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\mu(x,y) + Q(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y)$$

y utilizando que $\mu(x - 2y)$, se tiene

$$-2x\mu(x-2y) - 2(x^2 - 2xy)\mu'(x-2y) = y\mu(x-2y) + (xy - 2y^2)\mu'(x-2y),$$

de donde

$$-(y+2x)(x-2y)\mu'(x-2y) = (y+2x)\mu(x-2y),$$

y si $t = x - 2y$, entonces simplificando e integrando

$$\int \frac{\mu'(t)}{\mu(t)}dt = -\int \frac{dt}{t},$$

con lo que

$$\log \mu(t) = -\log t,$$

y así

$$\mu(x-2y) = \frac{1}{x-2y}.$$

(b) La ecuación

$$\frac{x^2 - 2xy}{x - 2y} + \frac{xy - 2y^2}{x - 2y}y' = 0$$

es exacta por lo que existe $f(x, y)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{x^2 - 2xy}{x - 2y} = x, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{xy - 2y^2}{x - 2y} = y. \end{aligned}$$

Utilizando la primera condición

$$f(x,y) = \int \frac{x^2 - 2xy}{x - 2y}dx = \int x dx = \frac{x^2}{2} + g(y).$$

Derivando respecto de y esta expresión y sustituyendo en la segunda condición

$$g'(y) = y,$$

de donde $g(y) = \frac{y^2}{2}$ y la función es $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$, con lo que las soluciones son de la forma

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c.$$

Utilizando la condición inicial $c = 1/2$, y la solución será

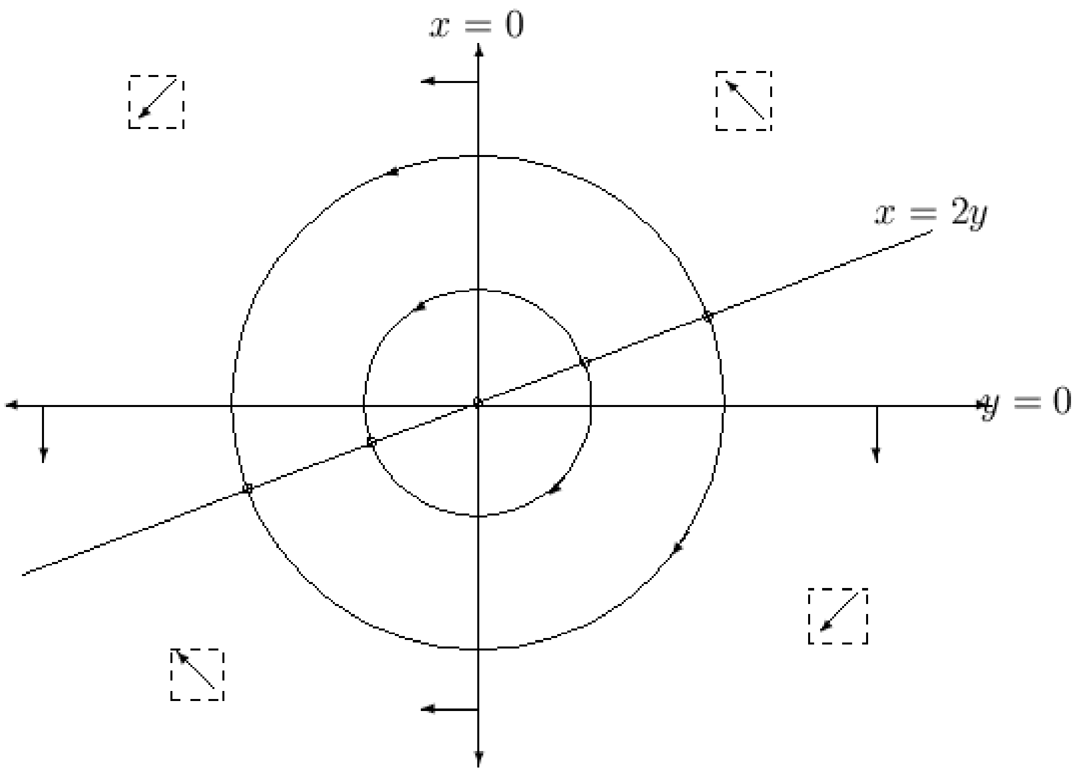
$$y(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

(c) No debido a que no se satisface el teorema de la función implícita para la ecuación algebraica $x^2 + y^2 = k$.

(d) Ya sabemos que las integrales primeras son circunferencias concéntricas $x^2 + y^2 = k$. Calculamos los puntos críticos mediante el sistema

$$\begin{cases} 0 = xy - 2y^2 = y(x - 2y), \\ 0 = 2xy - x^2 = x(2y - x), \end{cases}$$

de donde los puntos de la recta $x - 2y = 0$ anulan ambas ecuaciones y ésta es por tanto una recta de puntos críticos. No existen más puntos críticos. Las isoclinas son las rectas $y = 0$ y $x = 0$. En la primera $x' = 0$ e $y' = -2x^2$, por lo que $y' < 0$. En la segunda $y' = 0$ y $x' = -2y^2$, por lo que $x' < 0$. Por otra parte, démonos cuenta que $x' > 0$ si o bien $y > 0$ y $x > 2y$ o bien $x < 0$ y $x < 2y$, y será $x' < 0$ en otro caso. Similarmente $y' > 0$ si o bien $x > 0$ y $2y > x$ o bien $x < 0$ y $2y < x$, siendo $x' < 0$ en otro caso. Tenemos entonces el diagrama



Capítulo 25

9–9–2005

Enunciado

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales y problemas de condiciones iniciales:

   (a) **(2 puntos)** $y' = \dfrac{y\cos x}{1+2y^2}$, $y(0) = 1$.

   (b) **(3 puntos)** $y''' - 4y' = e^{-2x} + \cos x$.

   (c) **(5 puntos)** $x' = -y$; $y' = z$, $z' = -x - y + z$. Estudiar además la estabilidad del punto crítico del sistema.

2. Dado el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x' = y - x, \\ y' = 2x - 2y, \end{cases}$$

   se pide

   (a) **(4 puntos)** Obtener el diagrama de fases del mismo.

   (b) **(1 puntos)** ¿Son estables los puntos críticos? ¿Son asintóticamente estables?

3. (**5 puntos**) Una enfermedad vírica se propaga en un organismo a una velocidad proporcional a la cantidad de virus presentes en el organismo. Si a las 10 de la mañana habían 10^6 virus y esta cantidad se duplicó una hora después, calcular a qué hora empezó la enfermedad (se dice que un organismo está enfermo si la cantidad de virus excede de 10^3).

4. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = y + \varepsilon(x^2 + y^2) \\ y' = -x + \varepsilon(xy + y) \end{cases}$$

   Se pide:

   (a) (7 **puntos**) Estudiar la estabilidad del punto crítico del sistema $(0,0)$ en función del parámetro ε.

   (b) (3 **puntos**) ¿Pueden tender a $(0,0)$ una solución del sistema con $\varepsilon = 0$? ¿Puede tener módulo arbitrariamente grande? Razona tus respuestas.

5. Sea la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x + \alpha(y + z), y + \alpha(x + z), z + \alpha(x + y)), \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

   (a) (1 **punto**) Calcular la matriz $\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f})$ de $\mathbf{f}$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
   (b) (3 **puntos**) Calcular las ecuaciones implícitas y bases del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$ en función de α.
   (c) (3 **puntos**) Determinar para qué valores de α la matriz obtenida en el primer apartado es diagonalizable.
   (d) (3 **puntos**) Razonar la validez o falsedad de la siguiente afirmación: para $\alpha = 1$ existe una matriz invertible $\mathbf{P}$ tal que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \mathbf{P} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

6. Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ dotado con el producto escalar usual y sea $\mathcal{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + 3z + 4t = 0\}$.

   (a) (1 **punto**) Comprobar que $\mathcal{W}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.
   (b) (3 **puntos**) Obtener una base ortonormal de $\mathcal{W}$.
   (c) (3 **puntos**) Obtener el subespacio ortogonal a $\mathcal{W}$.
   (d) (3 **puntos**) Obtener la expresión de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathcal{W}$. Calcular el núcleo y la imagen de dicha aplicación.

7. (6 **puntos**) Dos empresas A y B de refrescos se disputan un mercado de 100 millones de consumidores. Cada año uno de cada tres consumidores de cada refresco cambia de marca. Si x_n e y_n denotan el número de consumidores de los refrescos de las empresas A y B, respectivamente, demostrar que

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

   y calcular el $\lim_{n\to\infty} x_n$ si inicialmente había 30 millones de personas tomando el refresco de la empresa A.

8. Determinar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

   (a) (2 **puntos**) Existe una matriz invertible $\mathbf{P}$ tal que

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

   (b) (2 **puntos**) Si el sistema $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{b} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, es compatible determinado, entonces la matriz asociada $\mathbf{A}$ es diagonalizable.

Examen resuelto

Resolver

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y\cos x}{1+2y^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Solución. Integramos para resolver la ecuación

$$\int \frac{1+2y(x)^2}{y(x)} y'(x)dx = \int \cos x dx,$$

de donde

$$\log y(x) + y(x)^2 = \sin x + c.$$

Con la condición inicial $1 = c$, con lo que la ecuación

$$\log y(x) + y(x)^2 = \sin x + 1$$

definie implícitamente la solución del problema de condiciones iniciales.

Resolver

$$y''' - 4y' = e^{-2x} + \cos x.$$

Solución. Resolvemos primero la ecuación homogénea mediante la ecuación característica

$$0 = x^3 - 4x = x(x^2 - 4),$$

cuyas soluciones son 0 y ± 2. La solución de la ecuación homogénea es por tanto

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}.$$

Proponemos como solución particular de la ecuación no homogénea $y_p(x) = Axe^{-2x} + B\cos x + C\sin x$, derivamos tres veces

$$y_p'(x) = (-2Ax + A)e^{-2x} - B\sin x + C\cos x,$$

$$y_p''(x) = (4Ax - 4A)e^{-2x} - B\cos x - C\sin x,$$

$$y_p'''(x) = (-8Ax + 12A)e^{-2x} + B\sin x - C\cos x,$$

sustituimos en la ecuación no homogénea y simplificamos

$$8Ae^{-2x} + 5B\sin x - 5C\cos x = e^{-2x} + \cos x,$$

e igulando coeficientes

$$\begin{cases} 8A = 1, \\ 5B = 0, \\ -5C = 1, \end{cases}$$

y fácilmente $A = 1/8$, $B = 0$ y $C = -1/5$ y la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x} + \frac{1}{8} x e^{-2x} - \frac{1}{5} \sin x.$$

Resolver $x' = -y$; $y' = z$, $z' = -x - y + z$. Estudiar además la estabilidad del punto crítico del sistema.

Solución. Escribimos el sistema de forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores propios mediante la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} -t & -1 & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ -1 & -1 & 1-t \end{vmatrix} = -t^3 + t^2 - t + 1 = 0,$$

que por el método de Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & & -1 & 0 & -1 \\ \hline & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

obtenemos que 1 es solución, mientras que las otras dos se obtienen a partir de $t^2 + 1 = 0$, y son por tanto $\pm i$. Calculamos ahora

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{a_1}{t-1} + \frac{a_2}{t-i} + \frac{a_3}{t+i} = \frac{(a_1 + a_2 + a_3)t^2 - ((1-i)a_2 + (1+i)a_3)t + a_1 - i a_2 + i a_3)}{-p(t)},$$

e igualando coeficientes tenemos el sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 0, \\ (1-i)a_2 + (1+i)a_3 = 0, \\ a_1 - i a_2 + i a_3 = -1, \end{cases}$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-i & 1+i & 0 \\ 1 & -i & i & -1 \end{array}\right) \underset{F_3 - F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-i & 1+i & 0 \\ 0 & -1-i & -1+i & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 + \frac{1+i}{1-i} F_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-i & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & -2+2i & -1 \end{array}\right),$$

de donde $a_3 = -\frac{1}{4}(1+i)$, $a_2 = -\frac{1}{4}(1-i)$ y $a_1 = \frac{1}{2}$. Por otra parte

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t-1} = -(t^2+1), \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{t-i} = -(t^2-(1-i)t-i), \\ q_3(t) &= \frac{p(t)}{t+i} = -(t^2-(1+i)t+i). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^t a_1(\mathbf{A}) \cdot q_1(\mathbf{A}) + e^{ti} a_2(\mathbf{A}) \cdot q_2(\mathbf{A}) + e^{-ti} a_3(\mathbf{A}) \cdot q_3(\mathbf{A}) \\ &= \frac{e^t}{2}(\mathbf{A}^2+\mathbf{I}_3) + \frac{e^{ti}}{4}(1+i)(\mathbf{A}^2-(1-i)\mathbf{A}-i\mathbf{I}_3) + \frac{e^{-ti}}{4}(1-i)(\mathbf{A}^2-(1+i)\mathbf{A}+i\mathbf{I}_3) \\ &= \frac{e^t}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{e^{ti}}{4}\begin{pmatrix} 1-i & 2 & -1-i \\ -1-i & -2i & -1+i \\ 1-i & 2 & -1-i \end{pmatrix} + \frac{e^{-ti}}{4}\begin{pmatrix} 1+i & 2 & -1+i \\ -1+i & 2i & -1-i \\ 1+i & 2 & -1+i \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^t}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} e^{ti}+e^{-ti}-i(e^{ti}-e^{-ti}) & 2(e^{ti}+e^{-ti}) & -(e^{ti}+e^{-ti})-i(e^{ti}-e^{-ti}) \\ -(e^{ti}+e^{-ti})-i(e^{ti}-e^{-ti}) & -2i(e^{ti}-e^{-ti}) & -(e^{ti}+e^{-ti})+i(e^{ti}-e^{-ti}) \\ e^{ti}+e^{-ti}-i(e^{ti}-e^{-ti}) & 2(e^{ti}+e^{-ti}) & -(e^{ti}+e^{-ti})-i(e^{ti}-e^{-ti}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos t+\sin t-e^t & 2\cos t & -\cos t+\sin t+e^t \\ -\cos t+\sin t+e^t & 2\sin t & -\cos t-\sin t-e^t \\ \cos t+\sin t+e^t & 2\cos t & -\cos t+\sin t-e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La solución general del sistema es por tanto

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos t+\sin t-e^t & 2\cos t & -\cos t+\sin t+e^t \\ -\cos t+\sin t+e^t & 2\sin t & -\cos t-\sin t-e^t \\ \cos t+\sin t+e^t & 2\cos t & -\cos t+\sin t-e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

o equivalentemente

$$\left\{ \begin{aligned} x(t) &= \tfrac{c_1+2c_2-c_3}{3}\cos t + \tfrac{c_1+c_3}{2}\sin t + (c_3-c_1)e^t, \\ x(t) &= -\tfrac{c_1+c_3}{3}\cos t + \tfrac{c_1+2c_2-c_3}{2}\sin t + (c_1-c_3)e^t, \\ x(t) &= \tfrac{c_1+2c_2-c_3}{3}\cos t + \tfrac{c_1+c_3}{2}\sin t + (c_1-c_3)e^t. \end{aligned} \right.$$

Dado el sistema homogéneo

$$\left\{ \begin{aligned} x' &= y - x, \\ y' &= 2x - 2y, \end{aligned} \right.$$

se pide

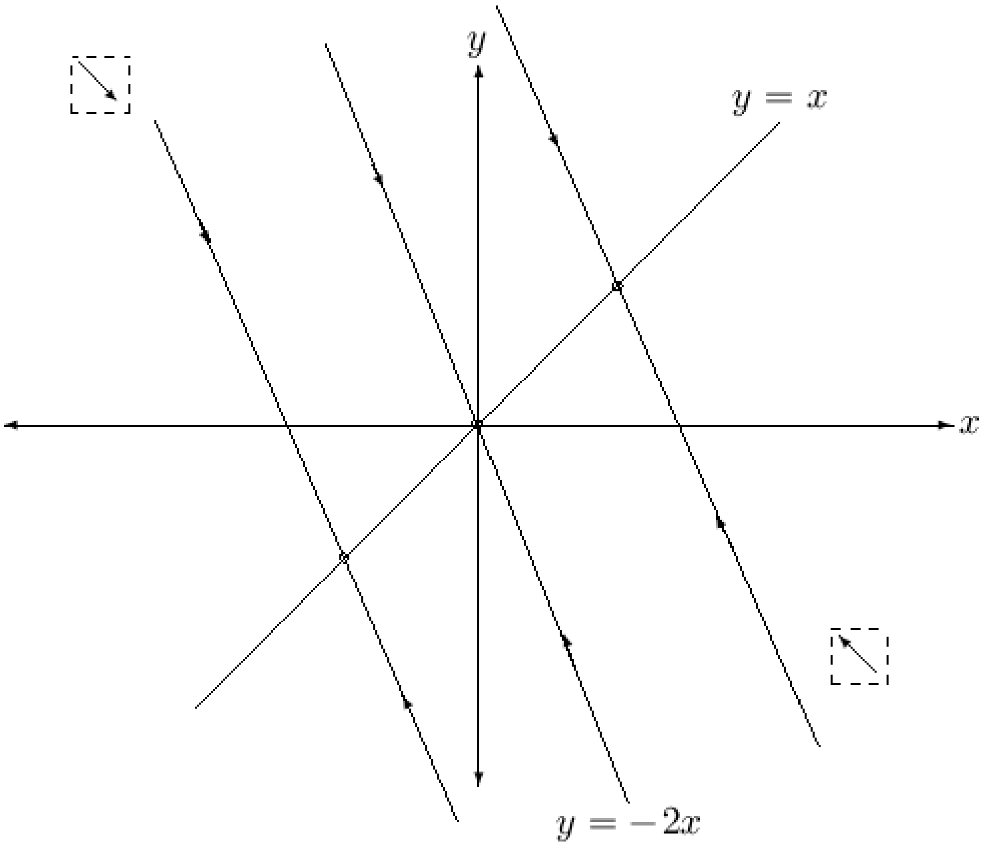
(a) Obtener el diagrama de fases del mismo.

(b) ¿Son estables los puntos críticos? ¿Son asintóticamente estables?

Solución. (a) Es fácil ver que $x = y$ es una recta de puntos críticos del sistema. Por tanto no hay isoclinas. Vemos que en la región $x > y$ se verifica que $x' < 0$ e $y' > 0$. Lo contrario ocurre en la región $x < y$. Finalmente las integrales primeras son

$$y' = \frac{2x - 2y}{y - x} = -2,$$

por lo que integrando tenemos las rectas $y = -2x + c$, que cortarán a la recta de puntos críticos en un punto, dividiendo cada integral primera en tres órbitas: dos semirrectas separadas por un punto crítico. Con esta información esbozamos el diagrama



(b) Dado que toda órbita que parte de un entorno del punto crítico converge a un punto crítico cercano, los puntos críticos son estables. Sin embargo no pueden ser, por el motivo anterior, asintóticamente estables.

Una enfermedad vírica se propaga en un organismo a una velocidad proporcional a la cantidad de virus presentes en el organismo. Si a las 10 de la mañana habían 10^6 virus y esta cantidad se duplicó una hora después, calcular a qué hora empezó la enfermedad (se dice que un organismo está enfermo si la cantidad de virus excede de 10^3).

Solución. Sea $x(t)$ la cantidad de virus en el cuerpo. Se verifica entonces que

$$x'(t) = kx(t),$$

e integrando

$$\log x(t) = \int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int k dt = kt + c_1,$$

o equivalentemente

$$x(t) = ce^{kt}, \ c = e^{c_1}.$$

Utilizando las condiciones iniciales y fijamos la hora cero a las 10 de la mañana,

$$\begin{cases} x(0) = 10^6 = c, \\ x(1) = 2 \cdot 10^6 = ce^k, \end{cases}$$

de donde $c = 10^6$ y

$$k = \log 2.$$

Calculamos el tiempo t_0 en el que

$$x(t_0) = 10^3 = 10^6 e^{t_0 \log 2},$$

y

$$t_0 = \frac{-3\log 10}{\log 2} \approx -9.97,$$

por lo que la enfermedad empezó aproximadamente a medianoche.

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = y + \varepsilon(x^2 + y^2) \\ y' = -x + \varepsilon(xy + y) \end{cases}$$

Se pide:

(a) Estudiar la estabilidad del punto crítico del sistema $(0,0)$ en función del parámetro ε.

(b) ¿Pueden tender a $(0,0)$ una solución del sistema con $\varepsilon = 0$? ¿Puede tener módulo arbitrariamente grande? Razona tus respuestas.

Solución. (a) La matriz jacobiana del sistema es

$$\mathbf{Jf}(x,y) = \begin{pmatrix} 2\varepsilon x & 1 + 2\varepsilon y \\ -1 + \varepsilon y & \varepsilon(1+x) \end{pmatrix},$$

y particularizando en $(0,0)$ tenemos

$$\mathbf{Jf}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Calculamos sus valores propios con la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ -1 & \varepsilon - t \end{vmatrix} = t^2 - \varepsilon t + 1 = 0,$$

de donde

$$t = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4}}{2}.$$

Distinguimos los siguientes casos:

- Si $\varepsilon^2 - 4 \geq 0$, esto es $\varepsilon \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ los valores propios son reales. Si $\varepsilon < 0$, entonces los valores propios son negetivos y por tanto hiperbólicos. Aplicamos el teorema de Hartman–Grobman para concluir que el punto crítico es asintóticamente estable. Si $\varepsilon > 0$, los valores propios son positivos, hiperbólicos, y por el teorema de Hartman–Grobman el punto crítico será inestable.
- Si $\varepsilon^2 - 4 < 0$, esto es $\varepsilon \in (-2, 2)$ los valores propios son complejos conjugados con parte real $\varepsilon/2$. Por tanto será el punto crítico hiperbólico si $\varepsilon \neq 0$, siendo en virtud del teorema de Hartman–Grobman asintóticamente estable si $\varepsilon < 0$ e inestable si $\varepsilon > 0$. Si $\varepsilon = 0$ el punto crítico no es hiperbólico y por tanto no puede aplicarse el teorema de Hartman–Grobman. En este caso el sistema original es
$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x, \end{cases}$$
que es un sistema lineal. Los valores propios de la matriz del sistema se obtienen con la ecuación
$$p(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ -1 & -t \end{vmatrix} = t^2 + 1 = 0,$$
de donde $t = \pm i$, y por tanto el punto crítico es estable.

(b) Calculamos las isoclinas
$$y' = -\frac{x}{y},$$
e integrando
$$\int y(x)y'(x)dx = -\int xdx,$$
obtenemos
$$x^2 + y^2 = c,$$
que son circunferencias concéntricas. Por tanto ninguna solución converge a $(0, 0)$ ni puede tener el módulo arbitrariamente grande.

Sea la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x + \alpha(y + z), y + \alpha(x + z), z + \alpha(x + y)), \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Calcular la matriz $\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f})$ de $\mathbf{f}$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) Calcular las ecuaciones implícitas y bases del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$ en función de α.

(c) Determinar para qué valores de α la matriz obtenida en el primer apartado es diagonalizable.

(d) Razonar la validez o falsedad de la siguiente afirmación: para $\alpha = 1$ existe una matriz invertible $\mathbf{P}$ tal que
$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \mathbf{P} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

Solución. (a) Siendo $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$, se tiene

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Empezamos calculando el núcleo mediante el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & 1 & 0 \end{array}\right) \to_{\substack{F_2-\alpha F_1 \\ F_3-\alpha F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha^2 & \alpha-\alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha-\alpha^2 & 1-\alpha^2 & 0 \end{array}\right) \to_{\substack{F_3-\frac{\alpha}{1+\alpha}F_2 \\ \alpha\neq -1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha^2 & \alpha-\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\alpha-2\alpha^2}{1+\alpha} & 0 \end{array}\right).$$

Calculamos las soluciones de la ecuación $2\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$, y

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4},$$

de donde $\alpha = 1$ y $-1/2$. Entonces:

- Si $\alpha = 1$, entonces las ecuaciones del núcleo son $x + y + z = 0$.
- Si $\alpha = -1/2$, entonces las ecuaciones son $2x - y - z = 0$ y $3y + z = 0$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1, -1/2\}$, entonces el sistema es compatible determinado y así $\text{Ker}(\mathbf{f}) = \{(0,0,0)\}$.
- Si $\alpha = -1$, entonces el sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to_{\substack{F_2+F_1 \\ F_3+F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

  y se ve fácilmente que de nuevo el sistema es compatible determinado y por tanto $\text{Ker}(\mathbf{f}) = \{(0,0,0)\}$.

Procedmos a continuación a calcular la imagen, distinguiendo los siguientes casos:

- Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1/2\}$, entonces

$$\dim \text{Im}\,\mathbf{f} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker}(\mathbf{f}) = 3 - 0 = 3,$$

  por lo que $\text{Im}\,\mathbf{f} = \mathbb{R}^3$.

- Si $\alpha = 1$, entonces $(x, y, z) \in \operatorname{Im} \mathbf{f}$ si y sólo si existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

y al calcular los rangos de las matrices del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \rightarrow_{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & y - x \\ 0 & 0 & 0 & z - x \end{array}\right),$$

tenemos que para que ambos sean 1 debe cumplirse que $x = y = z$, que son las ecuaciones de la imagen.

- Si $\alpha = -1/2$, entonces $(x, y, z) \in \operatorname{Im} \mathbf{f}$ si y sólo si existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

y al calcular los rangos de las matrices del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & x \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & y \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & z \end{array}\right) \rightarrow_{\substack{F_2 + \frac{1}{2}F_1 \\ F_3 + \frac{1}{2}F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & x \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & y + \frac{1}{2}x \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & z + \frac{1}{2}x \end{array}\right)$$

$$\rightarrow_{F_2 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & x \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & y + \frac{1}{2}x \\ 0 & 0 & 0 & z + y + x \end{array}\right),$$

tenemos que para que ambos sean 2 debe cumplirse que $x + y + z = 0$, que es la ecuación de la imagen.

(c) Dado que la matriz es simétrica para todo α, se verifica que la matriz siempre es diagonalizable.

(d) Calculamos los valores propios de la matriz $\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f})$ mediante la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1 - t & 1 & 1 \\ 1 & 1 - t & 1 \\ 1 & 1 & 1 - t \end{vmatrix} = 3t^2 - t^3 = 0,$$

que da por soluciones 0, de multiplicidad dos, y 3. Dado que $\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{f}) = \dim \operatorname{Ker}(\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f})) = 2$, por lo que la matriz es diagonalizable y la afirmación es cierta.

Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ dotado con el producto escalar usual y sea $\mathcal{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + 3z + 4t = 0\}$.

(a) Comprobar que $\mathcal{W}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

(b) Obtener una base ortonormal de $\mathcal{W}$.

(c) Obtener el subespacio ortogonal a $\mathcal{W}$.

(d) Obtener la expresión de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathcal{W}$. Calcular el núcleo y la imagen de dicha aplicación.

Solución. (a) Sean $(x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2) \in \mathcal{W}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\alpha(x_1, y_1, z_1, t_1) + \beta(x_2, y_2, z_2, t_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2, \alpha t_1 + \beta t_2),$$

y calculamos

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + \beta x_2 + 2(\alpha y_1 + \beta y_2) + 3(\alpha z_1 + \beta z_2) + 4(\alpha t_1 + \beta t_2) &= \alpha(x_1 + 2y_1 + 3z_1 + 4t_1) \\ +\beta(x_2 + 2y_2 + 3z_2 + 4t_2) &= 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

por lo que $\mathcal{W}$ es un subespacio vectorial.

(b) Las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{W}$ son

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2\lambda - 3\mu - 4\nu, \\ y = \lambda, \\ z = \mu, \\ t = \nu, \end{array} \right. \qquad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R},$$

por lo que $(x, y, z, t) = \lambda(-2, 1, 0, 0) + \mu(-3, 0, 1, 0) + \nu(-4, 0, 0, 1)$, $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, y por tanto una base es $\{(-2, 1, 0, 0), (-3, 0, 1, 0), (-4, 0, 0, 1)\}$. Obtenemos a partir de ésta una base ortogonal $\mathcal{O} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, donde $\mathbf{v}_1 = (-2, 1, 0, 0)$ y

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= (-3, 0, 1, 0) - \frac{\langle (-3, 0, 1, 0), (-2, 1, 0, 0) \rangle}{\langle (-2, 1, 0, 0), (-2, 1, 0, 0) \rangle}(-2, 1, 0, 0) \\ &= (-3, 0, 1, 0) - \frac{6}{5}(-2, 1, 0, 0) = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, 1, 0 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 &= (-4, 0, 0, 1) - \frac{\langle (-4, 0, 0, 1), (-2, 1, 0, 0) \rangle}{\langle (-2, 1, 0, 0), (-2, 1, 0, 0) \rangle}(-2, 1, 0, 0) \\ &\quad - \frac{\left\langle (-4, 0, 0, 1), \left(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, 1, 0 \right) \right\rangle}{\left\langle \left(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, 1, 0 \right), \left(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, 1, 0 \right) \right\rangle} \left(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, 1, 0 \right) \\ &= (-4, 0, 0, 1) - \frac{8}{5}(-2, 1, 0, 0) - \frac{6}{7} \left(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, 1, 0 \right) = \left(-\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{6}{7}, 1 \right). \end{aligned}$$

Obtenemos ahora la base ortonormal $\mathcal{N} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ con

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{||\mathbf{v}_1||}\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}(-2, 1, 0, 0),$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{||\mathbf{v}_2||}\mathbf{v}_2 = \frac{\sqrt{70}}{14} \left(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, 1, 0 \right),$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{||\mathbf{v}_3||}\mathbf{v}_3 = \frac{\sqrt{105}}{15} \left(-\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{6}{7}, 1 \right).$$

(c) Un vector $(x, y, z, t) \in \mathcal{W}^\perp$ si y sólo si

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \langle (x, y, z, t), (-2, 1, 0, 0) \rangle = -2x + y, \\ 0 = \langle (x, y, z, t), (-3, 0, 1, 0) \rangle = -3x + z, \\ 0 = \langle (x, y, z, t), (-4, 0, 0, 1) \rangle = -4x + t, \end{array} \right.$$

por lo que

$$\mathcal{W}^{\perp} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : y = 2x,\ z = 3x,\ t = 4x\}.$$

(d) La aplicación pedida es

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(x,y,z,t) &= \left\langle (x,y,z,t), \frac{\sqrt{5}}{5}(-2,1,0,0) \right\rangle \frac{\sqrt{5}}{5}(-2,1,0,0) \\
&+ \left\langle (x,y,z,t), \frac{\sqrt{70}}{14}\left(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, 1, 0\right) \right\rangle \frac{\sqrt{70}}{14}\left(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, 1, 0\right) \\
&+ \left\langle (x,y,z,t), \frac{\sqrt{105}}{15}\left(-\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{6}{7}, 1\right) \right\rangle \frac{\sqrt{105}}{15}\left(-\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{6}{7}, 1\right) \\
&= \frac{1}{5}(-2x+y)(-2,1,0,0) + \frac{5}{14}\left(-\frac{3}{5}x - \frac{6}{5}y + z\right)\left(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, 1, 0\right) \\
&+ \frac{7}{15}\left(-\frac{2}{7}x - \frac{4}{7}y - \frac{6}{7}z + t\right)\left(-\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{6}{7}, 1\right) \\
&= \left(\frac{1}{30}(29x - 2y - 3z - 4t), \frac{1}{15}(-x + 13y - 3z - 4t),\right. \\
&\left.\frac{1}{10}(-x - 2y + 7z - 4t), \frac{1}{15}(-2x - 4y - 6z + 7t)\right).
\end{aligned}$$

Como sabemos $\mathrm{Ker}(\mathbf{p}) = \mathcal{W}^{\perp}$ e $\mathrm{Im}\,\mathbf{p} = \mathcal{W}$.

Dos empresas A y B de refrescos se disputan un mercado de 100 millones de consumidores. Cada año uno de cada tres consumidores de cada refresco cambia de marca. Si x_n e y_n denotan el número de consumidores de los refrescos de las empresas A y B, respectivamente, demostrar que

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

y calcular el $\lim_{n\to\infty} x_n$ si inicialmente había 30 millones de personas tomando el refresco de la empresa A.

Solución. Del enunciado se deriva que

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n,$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}y_n.$$

Si lo escribimos de forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Entonces, si denotamos por x_0 e y_0 los consumidores iniciales de cada producto

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}^n \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^n \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 70 \end{pmatrix}.$$

Para calcular $\mathbf{A}^n$ obtenemos en primer lugar los valores propios mediante la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} - t & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - t \end{vmatrix} = t^2 - \frac{4}{3}t + \frac{1}{3} = 0,$$

de donde

$$t = \frac{\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{4}{3}}}{2} = \frac{4 \pm 2}{6},$$

y los valores propios son 1 y 1/3. Los subespacios propios vienen dados por los sistemas

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y

$$\left(\mathbf{A} - \frac{1}{3}\mathbf{I}_2\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

por lo que son

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\},$$
$$\mathrm{Ker}\left(\mathbf{A} - \frac{1}{3}\mathbf{I}_2\right) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -y\},$$

y una base de vectores propios es $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, -1\}$. Entonces

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1},$$

donde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

y calculando la inversa

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to_{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \to_{-\frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$
$$\to_{F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right),$$

por lo que

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \mathbf{A}^n \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 70 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 70 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 - \frac{2}{3^n} \\ 50 + \frac{2}{3^n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 50 - \frac{2}{3^n} = 50 \text{ millones.}$$

Determinar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Existe una matriz invertible $\mathbf{P}$ tal que
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

(b) Si el sistema $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{b} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, es compatible determinado, entonces la matriz asociada $\mathbf{A}$ es diagonalizable.

Solución. (a) Dado que
$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0$$
y
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$
entonces
$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \left|\mathbf{P} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1}\right| = |\mathbf{P}| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot |\mathbf{P}^{-1}| \\ &= |\mathbf{P}| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{|\mathbf{P}|} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \end{aligned}$$
por lo que la afirmación es falsa.

(b) La afirmación es falsa. Basta considerar el sistema
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
que es compatible determinado. Sin embargo, los valores propios de la matriz del sistema se calculan con la ecuación
$$p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 0 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2 = 0,$$
que da lugar al valor propio 1, y su subespacio propio viene dado por el sistema
$$(\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
de donde $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, y por tanto $\dim \mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) = 1$, por lo que la matriz no es diagonalizable.

Capítulo 26

16–2–2006

Enunciado

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales y problemas de condiciones iniciales:

   (a) **(1 puntos)** $x^3 - 3xy^2 = (3x^2y - y^3)y'$, $y(1) = 2$.

   (b) **(1 puntos)** $y'' - 2y' + y = 2e^x$.

   (c) **(2 puntos)** $x' = 3x - y + e^t$; $y' = -x + 3y$. Estudiar además la estabilidad del punto crítico del sistema homogéneo.

2. **(4 puntos)** Esbozar el diagrama de fases del sistema

$$\begin{cases} x' = xy, \\ y' = 2x^2y, \end{cases}$$

   indicando la estabilidad de los puntos críticos.

3. **(2 puntos)** En una población se empieza a propagar un virus. La rapidez con la que la gente se contagia es proporcional al número de individuos sanos. Inicialmente no había ningún infectado y al pasar un día había 4. Determinar en cuánto tiempo se contagia la mitad de la población.

4. **(5 puntos)** Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x + y + bz, x + by + z, bx + y + z),$$

   donde $b \in \mathbb{R}$. Se pide:

   (a) Hallar la matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Calcular el núcleo de $\mathbf{f}$ en función del parámetro b.

   (c) Calcular la imagen de $\mathbf{f}$ en función del parámetro b, así como una base de la misma. ¿Cúal será la dimensión de la imagen de $\mathbf{f}$?

   (d) Determinar para qué valores del parámetro b la matriz obtenida en el primer apartado es o no diagonalizable.

5. **(5 puntos)** Sea $\mathcal{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0,\ y + z + t = 0\}$. Se pide:

(a) Calcular el subespacio ortogonal a $\mathcal{W}$.

(b) Obtener una base ortonormal de $\mathcal{W}$ a partir de la base $\mathcal{B} = \{(1,1,-1,0),(0,0,-1,1)\}$.

(c) Obtener la proyección ortogonal del vector $(1,1,1,1)$ sobre $\mathcal{W}$.

(d) Calcular la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathcal{W}$. Determinar su núcleo y su imagen.

6. **(4 puntos)** Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

se pide:

(a) Probar que es diagonalizable y hallar su forma diagonal.

(b) Probar que si $\mathbf{P}$ es una matriz invertible, entonces $(\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^{-1})^n = \mathbf{P}\cdot\mathbf{A}^n\cdot\mathbf{P}^{-1}$ para todo entero positivo n.

(c) Dado

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

calcular $\lim_{n\to\infty} x_n$ y $\lim_{n\to\infty} y_n$.

Examen resuelto

Resolver
$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = (3x^2y - y^3)y', \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Solución. Sean $P(x,y) = x^3 - 3xy^2$ y $Q(x,y) = y^3 - 3x^2y$. Entonces

$$-6xy = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y),$$

por lo que la ecuación es exacta y existe $f(x,y)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= x^3 - 3xy^2, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= y^3 - 3x^2y. \end{aligned}$$

Intergando respecto de x la primera condición obtenemos

$$f(x,y) = \int (x^3 - 3xy^2)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + g(y).$$

Derivando esta extresión respecto de y y utilizando la segunda condición

$$-3x^2y + g'(y) = y^3 - 3x^2y,$$

con lo que

$$g(y) = \int y^3 dy = \frac{y^4}{4}$$

y $f(x,y) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4}$. La solución general de la ecuación es por tanto

$$\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4} = c.$$

Utilizando las condiciones iniciales

$$c = \frac{1}{4} - \frac{3}{2}4 + \frac{16}{4} = -\frac{7}{4},$$

y la solución del problema de condiciones iniciales viene definido de forma implícita por la ecuación

$$\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4} = -\frac{7}{4}.$$

Despejando

$$y(x) = \sqrt{3x^2 + \sqrt{8x^4 - 7}}.$$

Resolver
$$y'' - 2y' + y = 2e^x.$$

Solución. Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea mediante la ecuación característica
$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0,$$
por lo que 1 es la única solución doble y la solución es por tanto
$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$
Como solución particular de la ecuación no homogénea proponemos $y_p(x) = Ax^2 e^x$. Derivamos dos veces
$$y_p'(x) = (Ax^2 + 2Ax)e^x,$$
$$y_p''(x) = (Ax^2 + 4Ax + 2A)e^x,$$
y sustituimos en la ecuación no homogénea y simplificando obtenemos
$$2Ae^x = 2e^x,$$
de donde igualando coeficientes $A = 1$ y la solución general de la ecuación no homogénea es
$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + x^2 e^x.$$

Resoler $x' = 3x - y + e^t$; $y' = -x + 3y$. Estudiar además la estabilidad del punto crítico del sistema homogéneo.

Solución. Escribimos el sistema de forma matricial
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix},$$
donde
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Calculamos los valores propios de la matriz mediante la ecuación
$$p(t) = \begin{vmatrix} 3-t & -1 \\ -1 & 3-t \end{vmatrix} = t^2 - 6t + 8 = 0,$$
y
$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2},$$
por lo que los valores propios son 4 y 2. Calculamos ahora
$$\frac{1}{p(t)} = \frac{a_1}{t-4} + \frac{a_2}{t-2} = \frac{(a_1+a_2)t - 2a_1 - 4a_2}{p(t)},$$

e igualando coeficientes obtenemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 + a_2 = 0, \\ -2a_1 - 4a_2 = 1, \end{array}\right.$$

y fácilmente tenemos que $a_1 = -a_2 = 1/2$. Por otra parte

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t-4} = t-2, \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{t-2} = t-4. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^{4t} a_1(\mathbf{A}) \cdot q_1(\mathbf{A}) + e^{2t} a_2(\mathbf{A}) \cdot q_2(\mathbf{A}) \\ &= \frac{e^{4t}}{2}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2) - \frac{e^{2t}}{2}(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}_2) \\ &= \frac{e^{4t}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{e^{2t}}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2t}+e^{4t} & e^{2t}-e^{4t} \\ e^{2t}-e^{4t} & e^{2t}+e^{4t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y la solución del sistema homogéneo es

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2t}+e^{4t} & e^{2t}-e^{4t} \\ e^{2t}-e^{4t} & e^{2t}+e^{4t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Proponemos ahora como solución particular del sistema no homogéneo $x_p(t) = Ae^t$ e $y_p(t) = Be^t$, cuyas derivadas coinciden con las funciones y sustituyendo y simplificando en el sistema no homogéneo tenemos

$$\left\{\begin{array}{l} Ae^t = 3Ae^t - Be^t + e^t, \\ Be^t = -Ae^t + 3Be^t, \end{array}\right.$$

de donde igualando coeficientes obtenemos el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} -2A + B = 1, \\ A - 2B = 0, \end{array}\right.$$

cuyas solución es $A = -2/3$ y $B = -1/3$. La solución general del sistema no homogéneo es por tanto

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{2t}+e^{4t} & e^{2t}-e^{4t} \\ e^{2t}-e^{4t} & e^{2t}+e^{4t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}e^t \\ -\frac{1}{3}e^t \end{pmatrix}.$$

o equivalentemente

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = \frac{c_1+c_2}{2}e^{2t} + \frac{c_1-c_2}{2}e^{4t} - \frac{2}{3}e^t, \\ x(t) = \frac{c_1+c_2}{2}e^{2t} - \frac{c_1-c_2}{2}e^{4t} - \frac{1}{3}e^t. \end{array}\right.$$

Al ser los dos valores propios de la matriz del sistema positivos se tiene que el punto crítico es inestable.

Esbozar el diagrama de fases del sistema

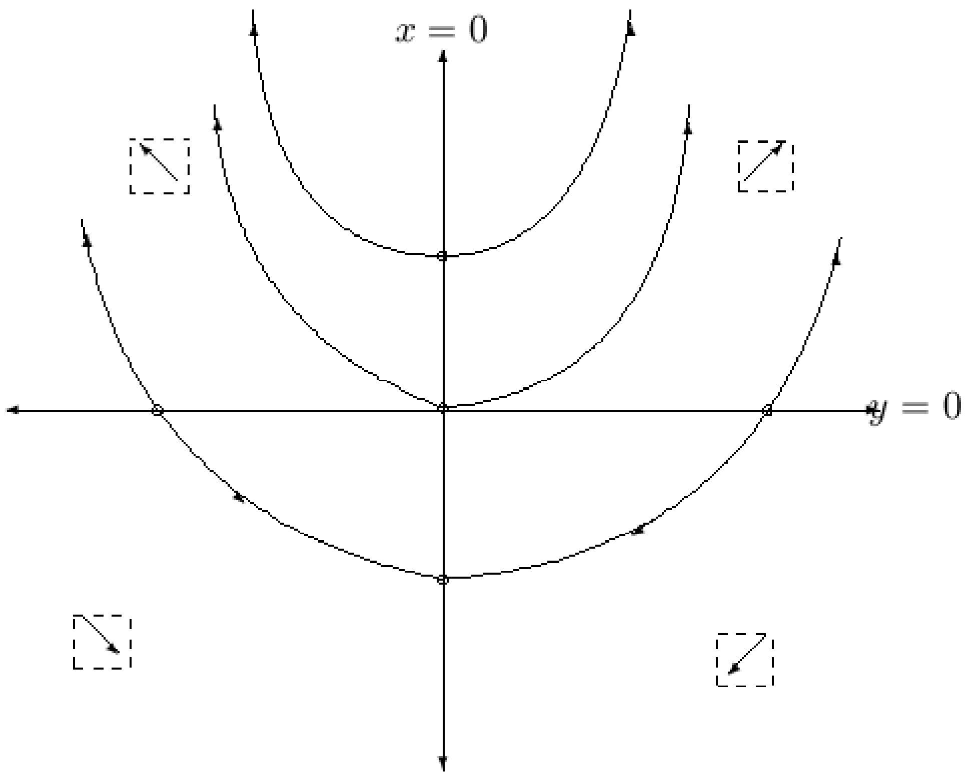
$$\begin{cases} x' = xy, \\ y' = 2x^2y, \end{cases}$$

indicando la estabilidad de los puntos críticos.

Solución. Es fácil ver que las rectas $x = 0$ e $y = 0$ son de puntos críticos, y que no hay isoclinas. En el primer cuadrante se tiene que $x' > 0$ e $y' > 0$, en el segundo $x' < 0$ e $y' > 0$, en el tercero $x' > 0$ e $y' < 0$ y en el cuarto $x' < 0$ e $y' < 0$. Finalmente las isoclinas vienen dadas por la ecuación

$$y' = \frac{2x^2y}{xy} = 2x,$$

de donde integrando obtenemos $y = x^2 + c$, que es una familia de parábolas que cortan al eje y en un punto y en dos al eje x siempre que $c < 0$, que corta a los ejes x e y en el origen de coordenadas si $c = 0$, y que corta al eje y en un punto y en ningún punto al eje x si $c > 0$. Con esta información construimos el diagrama



En una población se empieza a propagar un virus. La rapidez con la que la gente se contagia es proporcional al número de individuos sanos. Inicialmente no había ningún infectado y al pasar un día había 4. Determinar en cuánto tiempo se contagia la mitad de la población.

Solución. Sea $x(t)$ la cantidad de individuos infectados en el instante de tiempo t. Entonces

$$x'(t) = k(p - x(t)),$$

donde p es la cantidad total de individuos en la problación. Integrando

$$\int \frac{x'(t)}{p - x(t)} dt = \int k dt,$$

obtenemos

$$-\log(p - x(t)) = kt + c_1,$$

o equivalentemente

$$x(t) = p - ce^{-kt},\ c = e^{-c_1}.$$

Sabiendo que

$$x(0) = 0 = p - c,$$

obtenemos $c = p$, y de

$$x(1) = 4 = p - pe^{-k},$$

obtenemos

$$-k = \log\left(\frac{p-4}{p}\right),$$

con lo que la función

$$x(t) = p\left(1 - e^{t\log\left(\frac{p-4}{p}\right)}\right)$$

nos dará el número de individuos infectados. Buscamos ahora el tiempo t_0 para el cual $x(t_0) = p/2$ resolviendo la ecuación

$$\frac{p}{2} = p\left(1 - e^{t_0\log\left(\frac{p-4}{p}\right)}\right),$$

de donde

$$t_0 = \frac{\log\frac{1}{2}}{\log\left(\frac{p-4}{p}\right)} = \frac{\log 2}{\log p - \log(p-4)}.$$

Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x + y + bz, x + by + z, bx + y + z),$$

donde $b \in \mathbb{R}$. Se pide:

(a) Hallar la matriz asociada a $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) Calcular el núcleo de $\mathbf{f}$ en función del parámetro b.

(c) Calcular la imagen de $\mathbf{f}$ en función del parámetro b, así como una base de la misma. ¿Cúal será la dimensión de la imagen de $\mathbf{f}$?

(d) Determinar para qué valores del parámetro b la matriz obtenida en el primer apartado es o no diagonalizable.

Solución. (a) Si denotamos por $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$, se tiene

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & b & 1 \\ b & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) El núcleo se obtiene a partir del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & b & 1 \\ b & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & 0 \\ 1 & b & 1 & 0 \\ b & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow_{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-bF_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & 0 \\ 0 & b-1 & 1-b & 0 \\ 0 & 1-b & 1-b^2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow_{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & 0 \\ 0 & b-1 & 1-b & 0 \\ 0 & 0 & 2-b-b^2 & 0 \end{array}\right),$$

y resolviendo la ecuación $b^2+b-2=0$ obtenemos

$$b = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2},$$

por lo que la solución es -2 y 1. Entonces distinguimos los casos:

- Si $b=1$, entonces el núcleo tiene por ecuación $x+y+z=0$.
- Si $b=-2$, el núcleo tiene por ecuaciones $x+y-2z=0$ y $y=z$.
- Si $b \notin \{1,-2\}$, entonces el sistema es compatible determinado y $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(0,0,0)\}$.

(c) Se distinguen de nuevo los siguientes casos:

- Si $b \notin \{1,-2\}$, entonces

$$\dim \mathrm{Im}\, \mathbf{f} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = 3 - 0 = 3,$$

  por lo que $\mathrm{Im}\, \mathbf{f} = \mathbb{R}^3$.

- Si $b=1$, entonces un vector $(x,y,z) \in \mathrm{Im}\, \mathbf{f}$ si y sólo si existe $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

  Calculamos los rangos de las matrices del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \rightarrow_{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & z-x \end{array}\right)$$

  y obtenemos que para que ambos sean iguales debe cumplirse que $y=x=z$, que son las ecuaciones de la imagen. Es fácil ver entonces que todo vector de la imagen es de la forma $(x,y,z) = \lambda(1,1,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y una base es $\{(1,1,1)\}$, por lo que la dimensión es dos.

- Si $b=-2$, entonces un vector $(x,y,z)\in \operatorname{Im}\mathbf{f}$ si y sólo si existe $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ solución del sistema
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$
Calculamos los rangos de las matrices del sistema
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & x \\ 1 & -2 & 1 & y \\ -2 & 1 & 1 & z \end{array}\right)\to_{\substack{F_2-F_1\\ F_3+2F_1}}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -3 & 3 & y-x \\ 0 & 3 & -3 & z+2x \end{array}\right)\to_{F_3+F_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & -3 & 3 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & z+x+y \end{array}\right)$$
y obtenemos que para que ambos sean iguales debe cumplirse que $z+x+y=0$, que es la ecuación de la imagen. Su ecuación paramétrica es
$$\left\{\begin{array}{l} x=-\mu-\lambda, \\ y=\lambda, \\ z=\lambda, \end{array}\right. \qquad \lambda\in\mathbb{R},$$
por lo que $(x,y,z)=\lambda(-1,1,0)+\mu(-1,0,1)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, y por lo tanto una base de la imagen es $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$ y la dimensión es dos.

(d) Dado que la matriz es simétrica, se verifica que es diagonalizable para todo valor de b.

Sea $\mathcal{W}=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x-y=0,\ y+z+t=0\}$. Se pide:

(a) Calcular el subespacio ortogonal a $\mathcal{W}$.

(b) Obtener una base ortonormal de $\mathcal{W}$ a partir de la base $\mathcal{B}=\{(1,1,-1,0),(0,0,-1,1)\}$.

(c) Obtener la proyección ortogonal del vector $(1,1,1,1)$ sobre $\mathcal{W}$.

(d) Calcular la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathcal{W}$. Determinar su núcleo y su imagen.

Solución. (a) Las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{W}$ son
$$\left\{\begin{array}{l} x=-\lambda-\mu, \\ y=-\lambda-\mu, \\ z=\lambda, \\ t=\mu, \end{array}\right. \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R},$$
por lo que todo vector de $\mathcal{W}$ es de la forma $(x,y,z,t)=\lambda(-1,-1,1,0)+\mu(-1,-1,0,1)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Entonces una base es $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}=\{(-1,-1,1,0),(-1,-1,0,1)\}$. Así $(x,y,z,t)\in\mathcal{W}^{\perp}$ si y sólo si
$$\left\{\begin{array}{l} 0=\langle(x,y,z,t),(-1,-1,1,0)\rangle=-x-y+z, \\ 0=\langle(x,y,z,t),(-1,-1,0,1)\rangle=-x-y+t, \end{array}\right.$$
por lo que
$$\mathcal{W}^{\perp}=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+y-z=0,\ x+y-t=0\}.$$

(b) Obtenemos primero una base ortogonal $\mathcal{O} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ donde $\mathbf{v}_1 = (1,1,-1,0)$ y

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_2 &= (0,0,-1,1) - \frac{\langle (0,0,-1,1),(1,1,-1,0)\rangle}{\langle (1,1,-1,0),(1,1,-1,0)\rangle}(1,1,-1,0)\\ &= (0,0,-1,1) - \frac{1}{3}(1,1,-1,0) = \left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1\right).\end{aligned}$$

A continuación obtenemos una base ortonormal $\mathcal{N} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ donde

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{||\mathbf{v}_1||}\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,-1,0),$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{||\mathbf{v}_2||}\mathbf{v}_2 = \frac{\sqrt{15}}{5}\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1\right).$$

(c) Calculamos

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(1,1,1,1) &= \left\langle (1,1,1,1), \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,-1,0)\right\rangle \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,-1,0)\\ &\quad + \left\langle (1,1,1,1), \frac{\sqrt{15}}{5}\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1\right)\right\rangle \frac{\sqrt{15}}{5}\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1\right)\\ &= \frac{1}{3}(1,1,-1,0) - \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1\right) = \left(\frac{2}{5},\frac{2}{5},-\frac{1}{5},-\frac{1}{5}\right).\end{aligned}$$

(d) Calculamos

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(x,y,z,t) &= \left\langle (x,y,z,t), \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,-1,0)\right\rangle \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,-1,0)\\ &\quad + \left\langle (x,y,z,t), \frac{\sqrt{15}}{5}\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1\right)\right\rangle \frac{\sqrt{15}}{5}\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1\right)\\ &= \frac{1}{3}(x+y-z)(1,1,-1,0) + \frac{3}{5}\left(-\frac{x}{3}-\frac{y}{3}-\frac{2z}{3}+t\right)\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1\right)\\ &= \left(\frac{1}{5}(2x+2y-z-t), \frac{1}{5}(2x+2y-z-t), -\frac{1}{5}(x+y-3z+2t), -\frac{1}{5}(x+y-2z+3t)\right).\end{aligned}$$

Dado que se trata de una proyección ortogonal, se tiene que $\mathrm{Ker}(\mathbf{p}) = \mathcal{W}^{\perp}$ e $\mathrm{Im}\,\mathbf{p} = \mathcal{W}$.

Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

se pide:

(a) Probar que es diagonalizable y hallar su forma diagonal.

(b) Probar que si $\mathbf{P}$ es una matriz invertible, entonces $(\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^{-1})^n = \mathbf{P}\cdot\mathbf{A}^n\cdot\mathbf{P}^{-1}$ para todo entero positivo n.

(c) Dado

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}^n\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

calcular $\lim_{n\to\infty} x_n$ y $\lim_{n\to\infty} y_n$.

Solución. (a) Dado que la matriz es simétrica, es diagonalizable. Calculamos los valores propios de la matriz mediante la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} \frac{3}{4}-t & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}-t \end{vmatrix} = t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2} = 0,$$

de donde

$$t = \frac{\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2}}{2} = \frac{3\pm 1}{4},$$

por lo que los valores propios son 1 y 1/2. Los subespacios propios vienen dados por los sistemas

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I}_2)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y

$$\left(\mathbf{A}-\frac{1}{2}\mathbf{I}_2\right)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

por lo que

$$\operatorname{Ker}(\mathbf{A}-\mathbf{I}_2) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x = y\},$$
$$\operatorname{Ker}\left(\mathbf{A}-\frac{1}{2}\mathbf{I}_2\right) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y = 0\},$$

y una base de vectores propios es $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$, que será ortogonal. Entonces la base $\mathcal{N} = \{(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2),(\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2)\}$ es ortonormal y así

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{P}^t,$$

donde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

y

$$\mathbf{P}^t = \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) Calculamos

$$\begin{aligned}
(\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^{-1})^n &= (\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^{-1})\cdot(\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^{-1})\cdot\ldots\cdot(\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^{-1}) \\
&= \mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot(\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{P})\cdot\mathbf{A}\cdot(\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{P})\cdot\ldots\cdot(\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{P})\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^{-1}) \\
&= \mathbf{P}\cdot\mathbf{A}^n\cdot\mathbf{P}^{-1},
\end{aligned}$$

ya que $\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{P} = \mathbf{I}_2$.

(c) Teniendo en cuenta que $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^t$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \mathbf{A}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{P}\cdot\mathbf{D}^n\cdot\mathbf{P}^t\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}+\frac{1}{2^n}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1+\sqrt{2}-\frac{1}{2^n}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\frac{1}{2^n}}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \\
\lim_{n\to\infty} y_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}-\frac{1}{2^n}}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Capítulo 27

15–6–2006

Enunciado

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales y problemas de condiciones iniciales:

   (a) **(1 puntos)** $y' = e^x + ye^x$, $y(0) = 1$.

   (b) **(1 puntos)** $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

   (c) **(2 puntos)** $x' = 3x + y + t$; $y' = -x + y$. Estudiar además la estabilidad del punto crítico del sistema homogéneo.

2. **(4 puntos)** Esbozar el diagrama de fases del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = xy^2, \\ y' = 2xy, \end{array} \right.$$

   indicando la estabilidad de los puntos críticos.

3. **(2 puntos)** Un tanque contiene 50 litros de agua pura. Entonces empieza a entrar al tanque agua salada a razón de 3 litros por minuto a una concentración de 3 kilogramos de sal por litro. Se deja salir agua del tanque a la misma velocidad y la disolución permanece siempre agitada. Determinar la cantidad de sal en el tanque en el instante t y la cantidad máxima de sal que puede haber en el mismo.

Examen resuelto

Resolver
$$\begin{cases} y' = e^x + ye^x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Solución. Resolvemos primero la ecuación homogénea integrando
$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = \int e^x dx,$$
de donde
$$\log y(x) = e^x + c,$$
y así
$$y(x) = ke^{e^x},\ k = e^c.$$
Proponemos como solución de la ecuación no homogénea $y(x) = k(x)e^{e^x}$, que derivada
$$y'(x) = k'(x)e^{e^x} + k(x)e^{e^x}e^x,$$
y sustituida en la ecuación no homogénea nos da así
$$k'(x)e^{e^x} = e^x,$$
y entonces
$$k(x) = \int e^x e^{-e^x} = -e^{-e^x} + c,$$
y la solución general de la ecuación no homogénea es
$$y(x) = ce^{e^x} - 1.$$
De la condición inicial
$$y(0) = 1 = ce - 1,$$
obtenemos que $c = 2/e$, y la solución del problema de condiciones iniciales es
$$y(x) = 2e^{e^x - 1} - 1.$$

Resolver
$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^{2x}, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Solución. Resolvemos la ecuación homogénea mediante la ecuación característica
$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

de donde

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2},$$

y las soluciones son 2 y 1, y la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x.$$

Proponemos como solución de la ecuación no homogénea $y_p(t) = Axe^{2x}$, que derivándola dos veces

$$y_p'(t) = (2Ax + A)e^{2x},$$

$$y_p''(t) = (4Ax + 4A)e^{2x},$$

y sustituyéndola en la ecuación no homogénea y simplificando nos da

$$Ae^{2x} = e^{2x},$$

con lo que $A = 1$ y la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + xe^{2x}.$$

Utilizando las condiciones iniciales dervando previamente la solución general anterior

$$y'(x) = 2c_1 e^{2x} + c_2 e^x + (2x+1)e^{2x},$$

obtenemos el sistema

$$\begin{cases} y(0) = 0 = c_1 + c_2, \\ y'(0) = 0 = 2c_1 + c_2 + 1, \end{cases}$$

de donde $c_1 = -1$ y $c_2 = 1$ y la solución del problema de condiciones iniciales es

$$y(x) = -e^{2x} + e^x + xe^{2x}.$$

Resolver $x' = 3x + y + t$; $y' = -x + y$. Estudiar además la estabilidad del punto crítico del sistema homogéneo.

Solución. Escribimos el sistema de forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores propios de la matriz con la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 1 \\ -1 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 = 0,$$

que da 2 como única solución y por tanto $a_1 = q_1(x) = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^{2t} a_1(\mathbf{A}) \cdot q_1(\mathbf{A}) \cdot \sum_{i=0}^{1} (\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2)^i \frac{t^i}{i!} \\ &= e^{2t}(\mathbf{I}_2 + (\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2)t) \\ &= e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t}(1+t) & te^{2t} \\ -te^{2t} & e^{2t}(1-t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y la solución del sistema homogéneo es

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(1+t) & te^{2t} \\ -te^{2t} & e^{2t}(1-t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Proponemos como solución particular del sistema no homogéneo $x_p(t) = At + B$ e $y_p(t) = Ct + D$, cuyas derivadas son $x_p'(t) = A$ e $y_p'(t) = C$. Al sustituir en el sistema no homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 3At + 3B + Ct + D + t, \\ C = -At - B + Ct + D, \end{array} \right.$$

obtenemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} A - 3B - D = 0, \\ 3A + C = -1, \\ B + C - D = 0, \\ A - C = 0, \end{array} \right.$$

de donde $A = C = D = -1/4$ y $B = 0$. La solución general del sistema no homogéneo es

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(1+t) & te^{2t} \\ -te^{2t} & e^{2t}(1-t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}t \\ -\frac{1}{4}t - \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

o equivalentemente

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = c_1 e^{2t} + (c_1 + c_2)te^{2t} - \frac{1}{4}t, \\ y(t) = c_2 e^{2t} - (c_1 + c_2)te^{2t} - \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}. \end{array} \right.$$

Al ser el valor propio de la matriz del sistema positivo se verifica que el punto crítico es inestable.

Esbozar el diagrama de fases del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = xy^2, \\ y' = 2xy, \end{array} \right.$$

indicando la estabilidad de los puntos críticos.

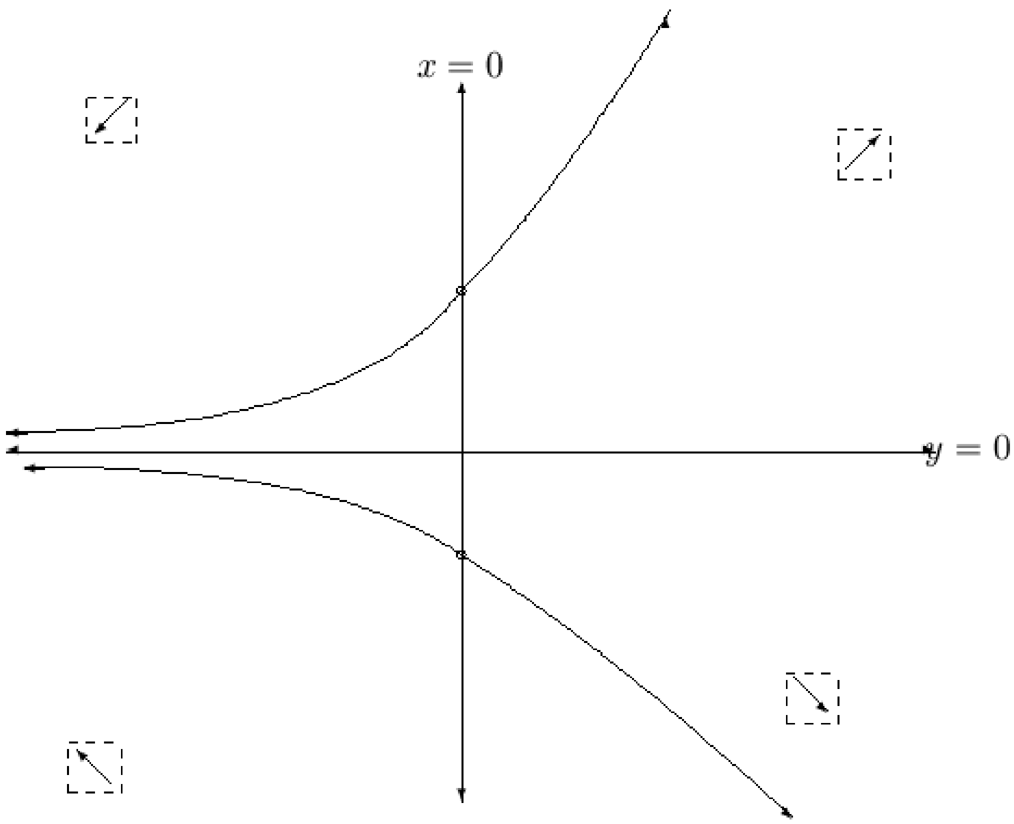
Solución. Es fácil ver que las rectas $x = 0$ e $y = 0$ son de puntos críticos, y que no hay isoclinas. En el primer cuadrante se tiene que $x' > 0$ e $y' > 0$, en el segundo $x' < 0$ e $y' < 0$, en el tercero $x' < 0$ e $y' > 0$ y en el cuarto $x' > 0$ e $y' < 0$. Finalmente las integrles primeras vienen dadas por la ecuación

$$y' = \frac{xy^2}{2xy} = 2y,$$

de donde integrando

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int 2dx,$$

obtenemos $\log y = 2x + c$, o $y = ke^{2x}$, que cortan al eje y en un punto y nunca al eje x salvo cuando $k = 0$, que se corresponde con una recta de puntos críticos. Con esta información construimos el diagrama



Vemos claramente del dibujo que de tan cerca como se quiera a cada punto critico parte una órbita que se aleja del mismo, por lo que todos los puntos críticos son inestables.

Un tanque contiene 50 litros de agua pura. Entonces empieza a entrar al tanque agua salada a razón de 3 litros por minuto a una concentración de 3 kilogramos de sal por litro. Se deja salir agua del tanque a la misma velocidad y la disolución permanece siempre agitada. Determinar la cantidad de sal en el tanque en el instante t y la cantidad máxima de sal que puede haber en el mismo.

Solución. Sea $x(t)$ la cantidad de sal en el tanque en el instante de tiempo t. Entonces

$$x'(t) = v_e - v_s,$$

donde la velocidad de entrada de sal en el tanque es

$$v_e = 3 \cdot 3 = 9,$$

y la velocidad de salida es

$$v_s = 3 \cdot \frac{x(t)}{50},$$

y la ecuación diferencial que modela el fenómeno es

$$x' = 9 - \frac{x}{50}.$$

La solución de la ecuación homogénea es $x_h(t) = ce^{-t/50}$, y si proponemos $x_p(t) = A$ como solución particular de la ecuación no homogénea tenemos que, al ser su derivada nula, al sustituir en la ecuación no homogénea

$$0 = 9 - \frac{A}{50},$$

de donde $A = 450$, y la solución general de la ecuación no homogénea es

$$x(t) = ce^{-t/50} + 450.$$

Utilizamos la condición inicial

$$x(0) = 0 = c + 450,$$

de donde $c = -450$ y la cantidad de sal es

$$x(t) = 450(1 - e^{-t/50}).$$

Dado que esta función es estrictamente creciente, su cantidad máxima será

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} 450(1 - e^{-t/50}) = 450.$$

Capítulo 28

10–7–2006

Enunciado

1. Dada $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{f}(x, y, z) = (ax + az, ay, x + az)$, se pide:

   (a) **(2.5 puntos)** Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ en la base canónica y las ecuaciones, bases y dimensiones del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$ en función del parámetro a.

   (b) **(2.5 puntos)** Averiguar para qué valores del parámetro a el vector $(0, 1, 2)$ pertenece a la imagen de $\mathbf{f}$. Averiguar para qué valores de a pertenece dicho vector al núcleo de $\mathbf{f}$.

   (c) **(2.5 puntos)** Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

   (d) **(2.5 puntos)** Averiguar para qué valores del parámetro a la matriz obtenida en el primer apartado es diagonalizable.

2. Sea $\mathcal{W}$ el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1, 0, 1, 0)$ y $(0, 1, 0, 1)$.

   (a) **(2.5 puntos)** Calcular el subespacio ortogonal de $\mathcal{W}$ y dar una base de éste.

   (b) **(2.5 puntos)** Obtener la expresión analítica de la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, es la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre el subespacio $\mathcal{W}$.

   (c) **(2.5 puntos)** ¿Cuál será el núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$? Calcular el subespacio vectorial suma del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$. ¿Será dicha suma directa?

   (d) **(2.5 puntos)** Obtener todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuya proyección ortogonal sobre $\mathcal{W}$ sea $(1, 1, 1, 1)$.

3. (**10 puntos**) Dar la expresión analítica de la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de forma que su núcleo tiene ecuaciones $x - y = 0$ y $x - z = 0$, $\mathbf{f}(1, 0, 0) = (1, 2, 3)$ y -2 es un valor propio de $\mathbf{f}$ con vector propio asociado $(1, 0, 1)$. Obtener la imagen de $\mathbf{f}$ y determinar si el vector $(1, 4, 5)$ pertenece a dicha imagen.

4. Resolver las siguientes ecuaciones diferencales y problemas de condiciones iniciales:

   (a) **(2.5 puntos)** $x^3 + y^2x + (xy^2 + 2x^2y)y' = 0$, $y(1) = 1$.

   (b) **(2.5 puntos)** $y'' - y' = x$, $y(0) = y'(0) = 1$.

(c) **(5 puntos)** $\left\{\begin{array}{l} x' = 3x - y \\ y' = -x + 3y \\ z' = -z. \end{array}\right\}$ ¿Es estable el punto crítico del sistema lineal anterior?

5. **(10 puntos)** Esbozar el diagrama de fases del siguiente sistema autónomo

$$\left\{\begin{array}{l} x' = yx - x, \\ y' = x - x^2, \end{array}\right.$$

y determinar la estabilidad de sus puntos críticos o equilibrios

6. Contestar de forma razonada a las siguientes cuestiones:

(a) **(5 puntos)** Entre los 150 alumnos de una asignatura se extiende el rumor de que el examen va a ser muy fácil. La velocidad con la que el rumor se extiende es proporcional al número de alumnos que no conocen ese rumor. Inicialmente lo sabía un alumno y al día siguiente ya conocían la noticia 10 alumnos. Determinar el numero de alumnos que no conocían el rumor el dia del examen una semana después.

(b) **(5 puntos)** Calcular los puntos críticos del sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x' = -x - y^2, \\ y' = -y + xy, \end{array}\right.$$

y utilizar la función $V(x, y) = x^2 + y^2$ para determinar su estabilidad.

Examen resuelto

Dada $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{f}(x, y, z) = (ax + az, ay, x + az)$, se pide:

(a) Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ en la base canónica y las ecuaciones, bases y dimensiones del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$ en función del parámetro a.

(b) Averiguar para qué valores del parámetro a el vector $(0, 1, 2)$ pertenece a la imagen de $\mathbf{f}$. Averiguar para qué valores de a pertenece dicho vector al núcleo de $\mathbf{f}$.

(c) Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

(d) Averiguar para qué valores del parámetro a la matriz obtenida en el primer apartado es diagonalizable.

Solución. (a) Denotando por $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ se tiene

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Entonces el núcleo se obtiene con el sistema

$$\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \end{array}\right) \to_{F_1 \times F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & a & 0 \end{array}\right) \to_{F_3 - aF_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a - a^2 & 0 \end{array}\right),$$

y resolvemos la ecuación $0 = a - a^2 = a(1 - a)$, cuyas soluciones son 0 y 1. Se distinguen entonces los siguientes casos:

- Si $a = 0$, entonces $\text{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$. Es fácil ver que una base es $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y la dimensión es dos.
- Si $a = 1$, entonces $\text{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0,\ y = 0\}$. Una base es $\{(1, 0, -1)\}$ y la dimensión es uno.
- Si $a \notin \{0, 1\}$, entonces $\text{Ker}(\mathbf{f}) = \{(0, 0, 0)\}$ y la dimensión es cero.

Procedemos a continuación con el núcleo, de nuevo con los siguientes casos:

- Si $a = 0$, entonces $(x, y, z) \in \operatorname{Im} \mathbf{f}$ si y sólo si existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

y para que los rangos de las matrices del sistema coincidan ha de cumplirse que $x = y = 0$, que son las ecuaciones de la imagen. Por otra parte

$$\dim \operatorname{Im} \mathbf{f} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker}(\mathbf{f}) = 3 - 2 = 1.$$

- Si $a = 1$, entonces $(x, y, z) \in \operatorname{Im} \mathbf{f}$ si y sólo si existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

y al calcular los rangos de las matrices del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 1 & 0 & 1 & z \end{array}\right) \rightarrow_{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & z - x \end{array}\right)$$

tentemos que para que éstos coincidan ha de cumplirse que $x = z$, que es la ecuación de la imagen. Por otra parte

$$\dim \operatorname{Im} \mathbf{f} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker}(\mathbf{f}) = 3 - 1 = 2.$$

- Si $a \notin \{0, 1\}$, entonces

$$\dim \operatorname{Im} \mathbf{f} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker}(\mathbf{f}) = 3 - 0 = 3,$$

y por tanto $\operatorname{Im} \mathbf{f} = \mathbb{R}^3$.

(b) Si $a = 0$ entonces $1 \neq 0$ y por tanto $(0, 1, 2)$ no cumple las ecuaciones de la imagen y no pertenece a ésta. Como su primera coordena es cero, este vector sí pertenece al núcleo.

Si $a = 1$, entonces $0 \neq 2$ y por tanto de nuevo no pertence a la imagen. Como la segunda coordenada es no nula tampoco pertenece al núcleo.

Finalmente, si $a \notin \{0, 1\}$, el vector pertenece a la imagen y no al núcleo.

(c) La matriz pedida es

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}),$$

donde

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y $\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})]^{-1}$. Al calcular la inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow_{F_2 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow_{F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

tenemos que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y por tanto

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & a \\ -1 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

(d) Al ser una matriz simétrica se tiene que es diagonalizable para todo valor de a.

Sea $\mathcal{W}$ el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1,0,1,0)$ y $(0,1,0,1)$.

(a) Calcular el subespacio ortogonal de $\mathcal{W}$ y dar una base de éste.

(b) Obtener la expresión analítica de la aplicación lineal $\mathbf{f}:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, es la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre el subespacio $\mathcal{W}$.

(c) ¿Cuál será el núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$? Calcular el subespacio vectorial suma del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$. ¿Será dicha suma directa?

(d) Obtener todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuya proyección ortogonal sobre $\mathcal{W}$ sea $(1,1,1,1)$.

Solución. (a) Es fácil ver que el conjunto generador de $\mathcal{W}$ es linealmente independiente y por tanto una base de éste. Entonces $(x,y,z,t) \in \mathcal{W}^{\perp}$ si y sólo si

$$\begin{cases} 0 = \langle (x,y,z,t),(1,0,1,0)\rangle = x+z, \\ 0 = \langle (x,y,z,t),(0,1,0,1)\rangle = y+t, \end{cases}$$

de donde

$$\mathcal{W}^{\perp} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+z=0,\ y+t=0\}.$$

(b) Observemos en primer lugar una base de $\mathcal{W}$ dada en el enunciado es ortogonal. Obtenemos una base ortonormal $\mathcal{N} = \{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ donde

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{||(1,0,1,0)||}(1,0,1,0) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1,0),$$

y

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{||(0,1,0,1)||}(0,1,0,1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,0,1).$$

La proyección ortogonal es entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x,y,z,t) &= \left\langle (x,y,z,t), \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1,0) \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1,0) + \left\langle (x,y,z,t), \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,0,1) \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}(0,1,0,1) \\ &= \frac{1}{2}(x+z)(1,0,1,0) + \frac{1}{2}(y+z)(0,1,0,1) \\ &= \left(\frac{x+z}{2}, \frac{y+t}{2}, \frac{x+z}{2}, \frac{y+t}{2} \right). \end{aligned}$$

(c) Como sabemos $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \mathcal{W}^{\perp}$ e $\mathrm{Im}\,\mathbf{f} = \mathcal{W}$, que como sabemos tienen suma directa.

(d) La matriz de la proyección en la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$ es

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Dichos vectores serán solución del sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y al resolverlo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \to_{\substack{F_3-F_1 \\ F_4-F_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

de donde tenemos las solución

$$\begin{cases} x = 2 - \lambda, \\ y = 2 - \mu, \\ z = \lambda, \\ t = \mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

> Dar la expresión analítica de la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de forma que su núcleo tiene ecuaciones $x - y = 0$ y $x - z = 0$, $\mathbf{f}(1,0,0) = (1,2,3)$ y -2 es un valor propio de $\mathbf{f}$ con vector propio asociado $(1,0,1)$. Obtener la imagen de $\mathbf{f}$ y determinar si el vector $(1,4,5)$ pertenece a dicha imagen.

Solución. Las ecuaciones paramétricas del núcleo son

$$\begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

por lo que un vector del mismo satisface $(x,y,z) = \lambda(1,1,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y una base del núcleo es $\{(1,1,1)\}$. Entonces $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,0,0),(1,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ ya que al calcular el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to_{F_1 \times F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to_{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obtenemos que éste es tres. Entonces la aplicación lineal buscada satisface

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(1,1,1) &= (0,0,0), \\ \mathbf{f}(1,0,0) &= (1,2,3), \\ \mathbf{f}(1,0,1) &= (-2,0,-2), \end{aligned}$$

por lo que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

siendo $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Entonces

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}),$$

donde

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$

y al calcular la inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{F_1 \times F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\longrightarrow_{F_2 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

obtenemos que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

y así

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Entonces la aplicación lineal buscada es

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x,y,z) &= \left(\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right)^t = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right)^t \\ &= (x + 2y - 3z, 2x - 2z, 3x + 2y - 5z). \end{aligned}$$

Un vector $(x, y, z) \in \operatorname{Im} \mathbf{f}$ si y sólo si existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Al calcular el rango de las matrices del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & x \\ 2 & 0 & -2 & y \\ 3 & 2 & -5 & z \end{array}\right) \longrightarrow_{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & x \\ 0 & -4 & 4 & y - 2x \\ 0 & -4 & 4 & z - 3x \end{array}\right) \longrightarrow_{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & x \\ 0 & -4 & 4 & y - 2x \\ 0 & 0 & 0 & z - y - x \end{array}\right)$$

se tiene que para que ambos sean dos, debe cumplirse que $z - x - y = 0$, que es la ecuación implícita de la imagen. Por otra parte, dado que $5 - 1 - 4 = 0$, el vector $(1, 4, 5) \in \operatorname{Im} \mathbf{f}$.

Resolver

$$\begin{cases} x^3 + y^2 x + (xy^2 + 2x^2 y)y' = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Solución. Sean $P(x, y) = x^3 + y^2 x$ y $Q(x, y) = xy^2 + 2x^2 y$. Entonces

$$2yx = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = y^2 + 4xy,$$

por lo que la ecuación no es exacta y hemos de buscar un factor integrante $\mu(x, y)$ mediante la ecuación

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\mu(x, y) + P(x, y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\mu(x, y) + Q(x, y)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x, y)$$

que nos da

$$2yx\mu(x, y) + (x^3 + y^2 x)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x, y) = (y^2 + 4xy)\mu(x, y) + (xy^2 + 2x^2 y)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x, y).$$

y si $\mu(x)$, simplificamos a

$$-\mu(x) = x\mu'(x),$$

que integrando

$$\int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} dx = -\int \frac{dx}{x},$$

obtenemos

$$\log \mu(x) = -\log x,$$

por lo que $\mu(x) = 1/x$ y la ecuación

$$x^2 + y^2 + (y^2 + 2xy)y' = 0$$

es exacta por lo que existe $f(x, y)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= x^2 + y^2, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y^2 + 2xy. \end{aligned}$$

Integramos la primera condición respecto de x y obtenemos

$$f(x, y) = \int (x^2 + y^2) dx = \frac{x^3}{3} + xy^2 + g(y),$$

y utilizando la segunda condición y derivando respecto de y la expresión anterior

$$2xy + g'(y) = y^2 + 2xy,$$

por lo que

$$g(y) = \int y^2 dy = \frac{y^3}{3},$$

y la función es $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy^2 + \frac{y^3}{3}$. La solución general de la ecuación es

$$\frac{x^3}{3} + xy^2 + \frac{y^3}{3} = c.$$

Utilizamos la condición inicial para concluir que

$$\frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} = \frac{5}{3} = c,$$

y la curva

$$\frac{x^3}{3} + xy^2 + \frac{y^3}{3} = \frac{5}{3}$$

define implícitamente la solución de la ecuación diferencial.

Resolver

$$\begin{cases} y'' - y' = x, \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$$

Solución. Resolvemos primero la ecuación homogénea mediante la ecuación característica

$$x^2 - x = x(x-1) = 0,$$

cuyas soluciones son 0 y 1, y la solución es

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^x.$$

Proponemos la solución particular de la ecuación no homogénea $y_p(x) = Ax^2 + Bx$, y derivando dos veces

$$y_p'(x) = 2Ax + B,$$
$$y_p'(x) = 2A,$$

y sustituimos en la ecuación no homogéna y simplificando

$$2A - 2Ax - B = x,$$

e igualando coeficientes obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 2A - B = 0, \\ -2A = 1, \end{cases}$$

y fácilmente $A = -1/2$ y $B = 1$, y la solución general de la ecuación no homogénea

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x - \frac{1}{2}x^2 + x.$$

Derivamos esta solución

$$y'(x) = c_2 e^x - x + 1,$$

y utilizando las condiciones iniciales

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 1 = c_1 + c_2, \\ y'(0) = 1 = c_2 + 1, \end{array} \right.$$

y resolvemos $c_2 = 0$, $c_1 = 1$. La solución del problema de condiciones iniciales es

$$y(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x.$$

Resolver

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 3x - y \\ y' = -x + 3y \\ z' = -z. \end{array} \right\}$$

¿Es estable el punto crítico del sistema lineal anterior?

Solución. Nos damos cuenta de que la última variable podemos obtenerla directamente de la ecuación $z' = -z$, cuya solución general es $z(t) = c_3 e^{-t}$. Escribimos en forma matricial el sistema restante

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores propios de la matriz con la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 3-t & -1 \\ -1 & 3-t \end{vmatrix} = t^2 - 6t + 10 = 0,$$

de donde

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36-40}}{2} = 3 \pm i.$$

Calculamos ahora

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{a_1}{t-3-i} + \frac{a_2}{t-3+i} = \frac{(a_1+a_2)t - (3-i)a_1 - (3+i)a_2}{p(t)}$$

e igualando coeficientes obtenemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 = 0, \\ -(3-i)a_1 - (3+i)a_2 = 1, \end{array} \right.$$

y fácilmente $a_1 = -a_2 = \frac{1}{6i}$. Por otro lado

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t-3-i} = t - 3 + i, \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{t-3+i} = t - 3 + i. \end{aligned}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
e^{t\mathbf{A}} &= e^{t(3+i)}a_1(\mathbf{A})\cdot q_1(\mathbf{A}) + e^{t(3-i)}a_2(\mathbf{A})\cdot q_2(\mathbf{A}) \\
&= e^t\frac{e^{it}}{6i}(\mathbf{A}-(3-i)\mathbf{I}_2) - e^t\frac{e^{-it}}{6i}(\mathbf{A}-(3+i)\mathbf{I}_2) \\
&= e^t\left(\frac{e^{it}}{6i}\begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix} + \frac{e^{-it}}{6i}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{e^t}{3}\left(\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i(e^{it}+e^{-it}) & -(e^{it}-e^{-it}) \\ -(e^{it}-e^{-it}) & i(e^{it}+e^{-it}) \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{e^t}{3}\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

La solución del sistema es

$$
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{e^t}{3}\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},
$$

o equivalentemente

$$
\begin{cases} x(t) = \frac{c_1}{3}e^t\cos t - \frac{c_2}{3}e^t\sin t, \\ y(t) = -\frac{c_1}{3}e^t\sin t + \frac{c_2}{3}e^t\cos t, \\ z(t) = c_3e^{-t}. \end{cases}
$$

Esbozar el diagrama de fases del siguiente sistema autónomo

$$
\begin{cases} x' = yx - x, \\ y' = x - x^2, \end{cases}
$$

y determinar la estabilidad de sus puntos críticos o equilibrios.

Solución. Calculamos los puntos críticos con el sistema.

$$
\begin{cases} 0 = yx - x = x(y-1), \\ 0 = x - x^2 = x(1-x), \end{cases}
$$

y obtenemos que $x = 0$ es una recta de puntos críticos y $(1,1)$ es otro punto crítico aislado. Las isoclinas son las rectas $y = 1$ y $x = 1$. En la primera $x' = 0$ e $y' = x(1-x)$, por lo que $y' > 0$ si $x \in (0,1)$ e $y' < 0$ en otro caso. En la segunda isoclina $y' = 0$ y $x' = y - 1$, por lo que $x' > 0$ si $y > 1$ y $x' < 0$ en otro caso. Además $x' > 0$ si y sólo si o bien $x > 0$ e $y > 1$ o bien $x < 0$ e $y < 1$. Se tiene también $y' > 0$ si y sólo si $x \in (0,1)$.

Las integrales primeras son

$$
y' = \frac{x - x^2}{yx - x} = \frac{1-x}{y-1},
$$

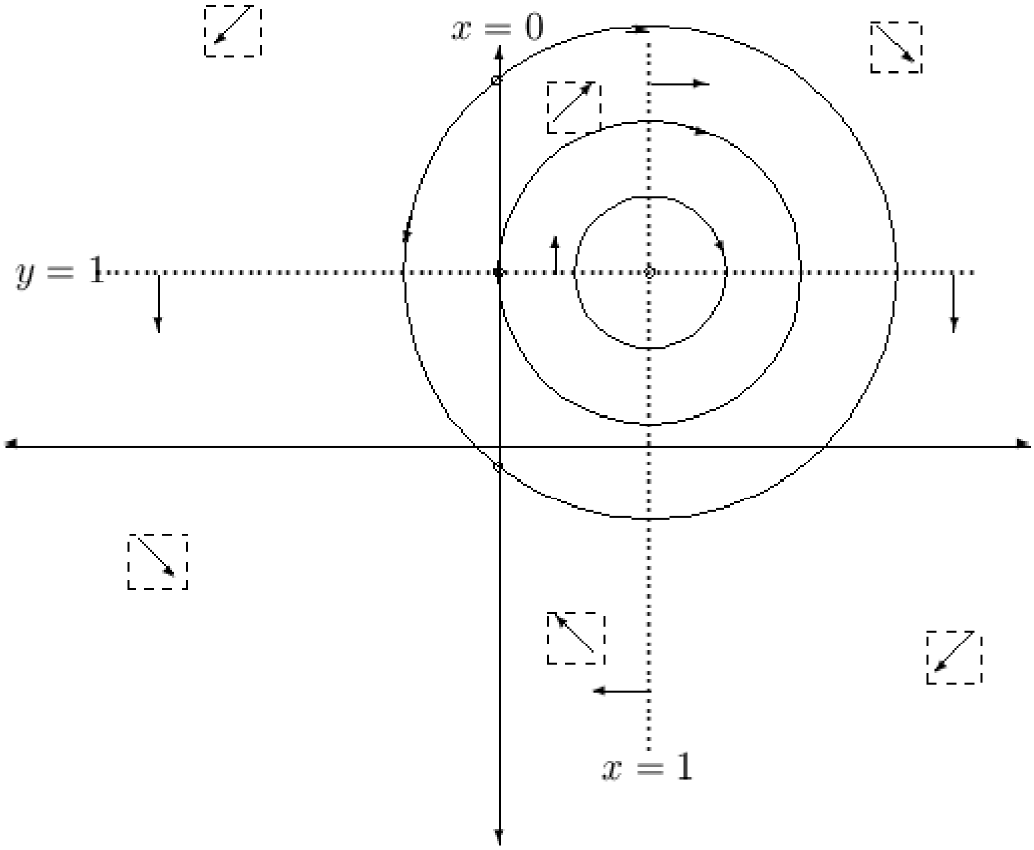
e integrando

$$
\int (y(x)-1)y'(x)dx = -\int (x-1)dx
$$

obtenemos

$$
(x-1)^2 + (y-1)^2 = c,
$$

que es una familia de circunferencias concéntricas que será disjunta con la recta de puntos críticos si $c < 1$, tangente si $c = 1$ y secante si $c > 1$. Con esta información tenemos el diagrama de fases



Vemos que cerca de $(1, 1)$ las órbitas son periódicas, y por tanto dicho punto crítico es estable aunque no asintóticamente estable. En la recta de puntos críticos tenemos lo siguiente: si $y \geq 0$, tan cerca como se quiera a cada punto crítico parte una órbita que se aleja del mismo, por lo que serán inestables. Lo contrario ocurre si $y < 0$, aunque, dado que en cada entorno de cada punto crítico hay una órbita degenerada que no converge a él, el punto crítico no puede ser asintóticamente estable.

Entre los 150 alumnos de una asignatura se extiende el rumor de que el examen va a ser muy fácil. La velocidad con la que el rumor se extiende es proporcional al número de alumnos que no conocen ese rumor. Inicialmente lo sabía un alumno y al día siguiente ya conocían la noticia 10 alumnos. Determinar el numero de alumnos que no conocían el rumor el dia del examen una semana después.

Solución. Sea $x(t)$ el número de alumnos que conocen la noticia. Entonces

$$x'(t) = k(150 - x(t)).$$

Integrando

$$\int \frac{x'(t)}{150 - x(t)} dt = \int k dt,$$

obtenemos

$$-\log(150 - x(t)) = kt + c_1,$$

y despejando

$$x(t) = 150 - ce^{-kt},\ c = e^{-c_1}.$$

De las condiciones iniciales

$$x(0) = 0 = 150 - c,$$

con lo que $c = 150$, y

$$x(1) = 10 = 150 - 150e^{-k},$$

y despejando

$$-k = \log\frac{14}{15},$$

con lo que la función que mide el número de individuos que conocen la noticia es

$$x(t) = 150(1 - e^{t\log\frac{14}{15}}).$$

Al cabo de una semana

$$x(7) = 150(1 - e^{7\log\frac{14}{15}}) \approx 57 \text{ alumnos.}$$

Calcular los puntos críticos del sistema

$$\begin{cases} x' = -x - y^2, \\ y' = -y + xy, \end{cases}$$

y utilizar la función $V(x,y) = x^2 + y^2$ para determinar su estabilidad.

Solución. Los puntos críticos los calculamos con el sistema

$$\begin{cases} 0 = -x - y^2, \\ 0 = -y + xy = y(x-1), \end{cases}$$

y de la segunda ecuación $y = 0$ o $x = 1$. En el primer caso $x = 0$ y $(0,0)$ es punto crítico. En el segundo $x = 1$ e $y^2 = -1$, por lo que no hay otros puntos críticos. Comprobamos que:

- $V(0,0) = 0$.
- $V(x,y) = x^2 + y^2 > 0$ si $(x,y) \neq (0,0)$.
- $\dot{V}\ (x,y) = \langle \mathrm{grad} V(x,y), \mathbf{f}(x,y)\rangle = \langle (2x,2y), (-x-y^2, -y+xy)\rangle = -2x^2 - 2y^2 < 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$.

Por lo tanto $V(x,y)$ es una función de Lyapunov estricta para el punto crítico y por tanto es asintóticamente estable.

Capítulo 29

18–9–2006

Enunciado

1. Dada $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{f}(x, y, z) = (ax + y + z, x + y, x + z)$, se pide:

   (a) **(2.5 puntos)** Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ en la base canónica y las ecuaciones, bases y dimensiones del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$ en función del parámetro a.

   (b) **(2.5 puntos)** Averiguar para qué valores del parámetro a el vector $(1, -1, -1)$ pertenece a la imagen de $\mathbf{f}$. Averiguar para qué valores de a pertenece dicho vector al núcleo de $\mathbf{f}$.

   (c) **(2.5 puntos)** Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.

   (d) **(2.5 puntos)** Averiguar para qué valores del parámetro a la matriz obtenida en el primer apartado es diagonalizable y obtener su forma diagonal en caso de que 0 sea valor propio de la matriz.

2. Sea $\mathcal{W}$ el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$ y $(1, 1, 1, 1)$.

   (a) **(2.5 puntos)** Calcular el subespacio ortogonal de $\mathcal{W}$ y dar una base de éste.

   (b) **(2.5 puntos)** Obtener la expresión analítica de la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, donde $\mathbf{f}$ es la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre el subespacio $\mathcal{W}$.

   (c) **(2.5 puntos)** ¿Cuál será el núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$? Calcular el subespacio vectorial suma del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$. ¿Será dicha suma directa?

   (d) **(2.5 puntos)** Obtener todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuya proyección ortogonal sobre $\mathcal{W}$ sea $(1, 1, 0, 0)$.

3. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales y problemas de condiciones iniciales:

   (a) **(2.5 puntos)** $x^2 + y^2 + x + xyy' = 0$, $y(1) = 1$.

   (b) **(2.5 puntos)** $y'' - 2y' + y = \cos x$, $y(0) = y'(0) = 1$.

   (c) **(5 puntos)** $\left\{ \begin{array}{l} x' = 2x - y + e^t \\ y' = -2x + 3y \end{array} \right\}$ ¿Es estable el punto crítico del sistema homogéneo asociado al sistema lineal anterior?

4. **(10 puntos)** Esbozar el diagrama de fases del siguiente sistema autónomo

$$\begin{cases} x' = yx, \\ y' = xy^2, \end{cases}$$

y determinar la estabilidad de sus puntos críticos o equilibrios.

Examen resuelto

> Dada $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{f}(x, y, z) = (ax + y + z, x + y, x + z)$, se pide:
>
> (a) Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ en la base canónica y las ecuaciones, bases y dimensiones del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$ en función del parámetro a.
>
> (b) Averiguar para qué valores del parámetro a el vector $(1, -1, -1)$ pertenece a la imagen de $\mathbf{f}$. Averiguar para qué valores de a pertenece dicho vector al núcleo de $\mathbf{f}$.
>
> (c) Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.
>
> (d) Averiguar para qué valores del parámetro a la matriz obtenida en el primer apartado es diagonalizable y obtener su forma diagonal en caso de que 0 sea valor propio de la matriz.

Solución. (a) Si denotamos por $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ se tiene que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces el núcleo se obtiene a partir del sistema

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \xrightarrow[F_1 \times F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - aF_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-a & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 - F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a & 0 \end{array}\right),$$

tenemos los siguientes casos:

- Si $a \neq 2$, entonces el sistema es compactible determinado y $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(0, 0, 0)\}$ y su dimensión es por tanto cero.
- Si $a = 2$, entonces $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0,\ y - z = 0\}$, cuyas ecuaciones paramétricas son
$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\lambda, \\ y = \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = \lambda, \end{array} \right.$$
y por tanto $(x, y, z) = \lambda(-1, 1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y una base del núcleo es $\{(-1, 1, 1)\}$, con dimensión uno.

Caclulamos ahora la imagen según los siguientes casos:

- Si $a \neq 2$, entonces
$$\dim \operatorname{Im} \mathbf{f} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker}(\mathbf{f}) = 3 - 0 = 3,$$
y por tanto $\operatorname{Im} \mathbf{f} = \mathbb{R}^3$.

- Si $a = 2$, enronces $(x, y, z) \in \operatorname{Im} \mathbf{f}$ si y sólo si existe una solución $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ del sistema
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$
y al calcular los rangos de las matrices del sistema
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 1 & 0 & 1 & z \end{array}\right) \to_{F_1 \times F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & z \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 2 & 1 & 1 & x \end{array}\right) \to_{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 1 & -1 & y - z \\ 0 & 1 & -1 & x - 2z \end{array}\right)$$
$$\to_{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 1 & -1 & y - z \\ 0 & 0 & 0 & x - y - z \end{array}\right),$$
tenemos que ambos rangos son iguales a dos si $x - y - z = 0$, que es la ecuación de la imagen. Las ecuaciones paramétricas son
$$\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda + \mu, \\ y = \lambda, \\ z = \mu, \end{array} \right. \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$
de donde $(x, y, z) = \lambda(1, 1, 0) + \mu(1, 0, 1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, por lo que una base es $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ y la dimensión es dos.

(b) Si $a \neq 0$, entonces el vector no pertenece al núcleo y sí a la imagen. Si $a = 2$, entonces $1 - (-1) - (-1) = 3 \neq 0$, por lo que el vector no satisface las ecuaciones de la imagen y consecuentemente no pertenece a ésta. Por otra parte $1 - (-1) = 0$ y $-1 - (-1) = 0$, por lo que sí satisface las ecuaciones del núcleo y sí pertenece a éste.

(c) La matriz pedida es
$$\mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}),$$
donde
$$\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
y $\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})]^{-1}$, y al calcular la inversa
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to_{\substack{F_2 - F_3 \\ F_1 - F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to_{F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

obtenemos

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & a-1 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(d) Dado que la matriz es diagonalizable, se tiene que la matriz es siempre diagonalizable. Vimos anteriormente que 0 es valor propio de $\mathbf{A}$ cuando $a = 2$. Calculamos los otros valores propios por la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 1 & 1 \\ 1 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = -t(t^2 - 4t + 3) = 0,$$

de donde

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = 2 \pm 1,$$

por lo que los valores propios son 3 y 1 y la forma diagonal de la matriz es

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea $\mathcal{W}$ el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1,1,0,0)$, $(0,0,1,1)$ y $(1,1,1,1)$.

(a) Calcular el subespacio ortogonal de $\mathcal{W}$ y dar una base de éste.

(b) Obtener la expresión analítica de la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, donde $\mathbf{f}$ es la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre el subespacio $\mathcal{W}$.

(c) ¿Cuál será el núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$? Calcular el subespacio vectorial suma del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$. ¿Será dicha suma directa?

(d) Obtener todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuya proyección ortogonal sobre $\mathcal{W}$ sea $(1,1,0,0)$.

Solución. (a) Fácilmente vemos que el tercer vector generado de $\mathcal{W}$ es suma de los otros dos, que son linealmente independientes, por lo que una base es $\mathcal{B}_{\mathcal{W}} = \{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$. Entonces $(x,y,z,t) \in \mathcal{W}^\perp$ si y sólo si

$$\begin{cases} 0 = \langle (x,y,z,t),(1,1,0,0)\rangle = x+y, \\ 0 = \langle (x,y,z,t),(0,0,1,1)\rangle = z+t, \end{cases}$$

y así

$$\mathcal{W}^\perp = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0,\ z+t=0\}.$$

Sus ecuaciones paramétricas son

$$\left\{\begin{array}{l} x=-\lambda, \\ y=\lambda, \\ z=-\mu, \\ t=\mu, \end{array}\right. \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R},$$

por lo que $(x,y,z,t)=\lambda(-1,1,0,0)+\mu(0,0,-1,1)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, y por lo tanto una base de subespacio $\mathcal{W}^{\perp}$ es $\{(-1,1,0,0),(0,0,-1,1)\}$.

(b) Los dos vectores de la base $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ son ortogonales, por lo que obtenemos una base ortonormal $\mathcal{N}=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$, donde

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{u}_1 & = & \dfrac{1}{||(1,1,0,0)||}(1,1,0,0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0,0), \\ \mathbf{u}_1 & = & \dfrac{1}{||(0,0,1,1)||}(0,0,1,1)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(0,0,1,1). \end{array}$$

Entonces

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{f}(x,y,z,t) & = & \left\langle (x,y,z,t),\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0,0)\right\rangle \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0,0)+\left\langle (x,y,z,t),\dfrac{\sqrt{2}}{2}(0,0,1,1)\right\rangle \dfrac{\sqrt{2}}{2}(0,0,1,1) \\ & = & \dfrac{1}{2}(x+y)(1,1,0,0)+\dfrac{1}{2}(z+t)(0,0,1,1) \\ & = & \left(\dfrac{x+y}{2},\dfrac{x+y}{2},\dfrac{z+t}{2},\dfrac{z+t}{2}\right). \end{array}$$

(c) Dado que se trata de una proyección ortogonal $\operatorname{Im}\mathbf{f}=\mathcal{W}$ y $\operatorname{Ker}(\mathbf{f})=\mathcal{W}^{\perp}$, por lo que su suma será directa e igual a $\mathbb{R}^4$.

(d) Si denotamos por $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^4$, entonces

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(\mathbf{f})=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

y por tanto los vectores que buscamos satisfacen el sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)\xrightarrow[F_4-F_3]{F_2-F_1}\left(\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

obtenemos el conjunto de vectores

$$\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+y=2,\ z+t=0\},$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} x = 2 - \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = -\mu, \\ t = \mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Resolver

$$x^2 + y^2 + x + xyy' = 0,$$

con la condición inicial $y(1) = 1$.

Solución. Sean $P(x, y) = x^2 + y^2 + x$ y $Q(x, y) = xy$. Entonces

$$2y = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = y,$$

por lo que la ecuación no es exacta y hemos de buscar un factor integrante $\mu(x, y)$ mediante la ecuación

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\mu(x, y) + P(x, y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\mu(x, y) + Q(x, y)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x, y)$$

que nos da

$$2y\mu(x, y) + (x^2 + y^2 + x)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x, y) = y\mu(x, y) + xy\frac{\partial \mu}{\partial x}(x, y).$$

Suponiendo que $\mu(x)$ la ecuación se simplifica a

$$\mu(x) = x\mu'(x),$$

que integrando

$$\int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}dx = \int \frac{dx}{x},$$

de donde $\mu(x) = x$ y la ecuación

$$x^3 + xy^2 + x^2 + x^2yy' = 0$$

es exacta, por lo que existe $f(x, y)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= x^3 + xy^2 + x^2, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x^2y. \end{aligned}$$

Integrando respecto de x la primera condición tenemos

$$f(x, y) = \int (x^3 + xy^2 + x^2)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} + g(y).$$

Derivando respecto de y esta expresión y sustituyendo en la segunda condición

$$x^2y + g'(y) = x^2y,$$

por lo que $g'(y) = 0$ y $g(y)$ es constante y por ello $f(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ y la solución general de la ecuación es

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} = c.$$

Utilizamos las condiciones iniciales para obtener

$$c = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{13}{12},$$

y la ecuación

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} = \frac{13}{12}$$

define implícitamente la solución del problema de condiciones iniciales que despejando

$$y(x) = \sqrt{\frac{13}{6} - \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^3}.$$

Resolver

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = \cos x, \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$$

Solución. Calculamos en primer lugar la solución de la ecuación homogénea mediante la ecuación característica

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0,$$

por lo que 1 es la única solución y

$$y_h(x) = c_1e^x + c_2xe^x.$$

Proponemos como solución particular de la ecuación no homogénea $y_p(x) = A\cos x + B\sin x$. Derivamos dos veces

$$y_p'(x) = -A\sin x + B\cos x,$$
$$y_p''(x) = -A\cos x - B\sin x,$$

y sustituimos en la ecuación no homogénea y simplificando

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \cos x,$$

de donde igualando coeficientes $A = 0$ y $B = 1/2$, y la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{1}{2}\cos x.$$

Derivamos la solución

$$y'(x) = (c_1 + c_2)e^x + c_2xe^x - \frac{1}{2}\sin x,$$

y utilizamos las condiciones iniciales para construir el sistema

$$\begin{cases} y(0) = 1 = c_1 + \frac{1}{2}, \\ y'(0) = 1 = c_1 + c_2, \end{cases}$$

de donde $c_1 = 1/2$ y $c_2 = 1/2$ y la solución del problema de condiciones iniciales es

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}\cos x.$$

Resolver

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 2x - y + e^t \\ y' = -2x + 3y \end{array} \right\}$$

¿Es estable el punto crítico del sistema homogéneo asociado al sistema lineal anterior?

Solución. Escribimos el sistema de forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores propios con la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 2-t & -1 \\ -2 & 3-t \end{vmatrix} = t^2 - 5t + 4 = 0,$$

y así

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2},$$

por lo que los valores propios son 4 y 1. Calculamos ahora

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{a_1}{t-4} + \frac{a_2}{t-1} = \frac{(a_1 + a_2)t - a_1 - 4a_2}{p(t)},$$

e igualando coeficientes

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 = 0, \\ -a_1 - 4a_2 = 1, \end{array} \right.$$

de donde $a_1 = -a_2 = 1/3$. Por otra parte

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t-4} = t - 1, \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{t-1} = t - 4. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^{4t} a_1(\mathbf{A}) \cdot q_1(\mathbf{A}) + e^t a_2(\mathbf{A}) \cdot q_2(\mathbf{A}) \\ &= \frac{e^{4t}}{3}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) - \frac{e^t}{3}(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}_2) \\ &= \frac{e^{4t}}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \frac{e^t}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{4t} + 2e^t & e^t - e^{4t} \\ 2(e^t - e^{4t}) & 2e^{4t} + e^t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y la solución del sistema homogéneo es

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{4t}+2e^t & e^t-e^{4t} \\ 2(e^t-e^{4t}) & 2e^{4t}+e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Proponemos como solución particular del sistema no homogéneo $x_p(t) = (At+B)e^t$ e $y_p(t) = (Ct+D)e^t$, cuyas derivadas son $x_p'(t) = (At+A+B)e^t$ e $y_p'(t) = (Ct+C+D)e^t$

$$\begin{cases} (At+A+B)e^t = 2(At+B)e^t - (Ct+D)e^t + e^t, \\ (Ct+C+D)e^t = -2(At+B)e^t + 3(Ct+D)e^t, \end{cases}$$

e igualando coeficientes

$$\begin{cases} A - C = 0, \\ A - B - D = 1, \\ 2A - 2C = 0, \\ 2B + C - 2D = 0, \end{cases}$$

y al resolverlo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to_{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-2F_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to_{F_4+2F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right),$$

de donde

$$\begin{cases} A = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\lambda, \\ B = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\lambda, \\ C = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\lambda, \\ D = \lambda, \end{cases}$$

y dando a $\lambda = 1$ obtenemos la solución del sistema no homogéneo

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{4t}+2e^t & e^t-e^{4t} \\ 2(e^t-e^{4t}) & 2e^{4t}+e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2te^t \\ 2te^t+e^t \end{pmatrix}$$

y equivalentemente

$$\begin{cases} x(t) = \frac{c_1-c_2}{3}e^{4t} + \frac{2c_1+c_2}{3}e^t + 2te^t, \\ y(t) = \frac{2c_2-2c_1}{3}e^{4t} + \frac{2c_1+c_2}{3}e^t + 2te^t + e^t. \end{cases}$$

Esbozar el diagrama de fases del siguiente sistema autónomo

$$\begin{cases} x' = yx, \\ y' = xy^2, \end{cases}$$

y determinar la estabilidad de sus puntos críticos o equilibrios.

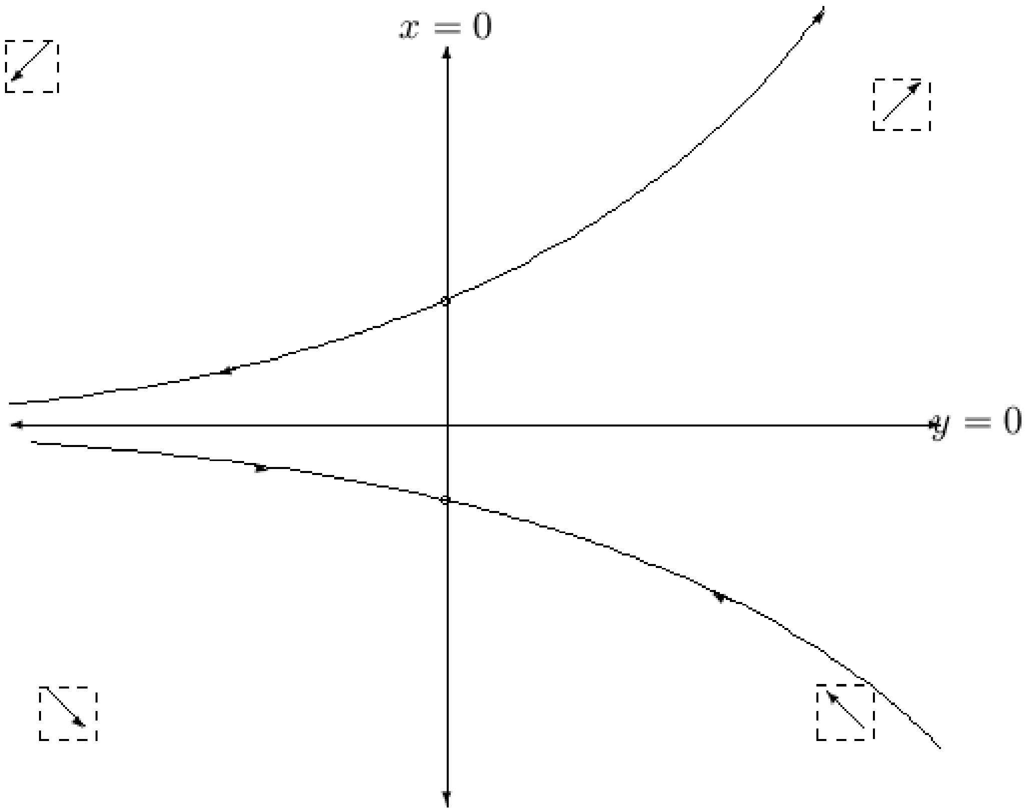
Solución. Es fácil ver que las rectas $x = 0$ e $y = 0$ son de puntos críticos, y que no hay isoclinas. En el primer cuadrante se tiene que $x' > 0$ e $y' > 0$, en el segundo $x' < 0$ e $y' < 0$, en el tercero $x' > 0$ e $y' < 0$ y en el cuarto $x' < 0$ e $y' > 0$. Finalmente las integrales primeras vienen dadas por la ecuación

$$y' = \frac{xy^2}{xy} = y,$$

de donde integrando

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = \int dx,$$

obtenemos $\log y = x + c$, o $y = ke^x$, que cortan al eje y en un punto y nunca al eje x salvo cuando $k = 0$, que se corresponde con una recta de puntos críticos. Con esta información construimos el diagrama



La recta $y = 0$ está formada por puntos críticos inestables ya que claramente, todas las órbitas se alejan de cualquier punto crítico menos la degenerada formada por él mismo. En la recta $x = 0$, se tiene que si $x \geq 0$ entonces las órbitas se alejan de los puntos críticos, y de nuevo son inestables. Lo contrario ocurre si $y < 0$, por lo que en este caso serán estables, aunque dado que existen puntos críticos tan cerca unos de otros, no pueden ser asintóticamente estables.

Capítulo 30

1–2–2007

Enunciado

1. Dada la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{f}(x, y, z) = ((2+a)x - ay + az, 2y + 2z, (a-2)x + (2-a)y + (2+a)z)$, se pide:

   (a) **(2.5 puntos)** Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ en la base canónica y las ecuaciones, bases y dimensiones del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$ en función del parámetro a.

   (b) **(2.5 puntos)** Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$.

   (c) **(2.5 puntos)** Determinar para el valor del parámetro $a = 1$ si la matriz obtenida en el primer apartado es diagonalizable y obtener su forma diagonal en caso afirmativo.

   (d) **(2.5 puntos)** Explica qué son el núcleo y la imagen de una aplicación lineal $\mathbf{g}$ y prueba que el núcleo de $\mathbf{g}$ es un subespacio vectorial.

2. Sea $\mathcal{W}$ el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1, a, 1)$, $(a, 1, 1)$, siendo a un parámetro real. Se pide:

   (a) **(2.5 puntos)** Calcular el subespacio ortogonal a $\mathcal{W}$ y dar una base de éste.

   (b) **(2.5 puntos)** Para el valor del parámetro $a = 2$, obtener la expresión analítica de la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, donde $\mathbf{f}$ es la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre el subespacio $\mathcal{W}$.

   (c) **(2.5 puntos)** Determinar para qué valores del parámetro a se verifica que la suma $\mathcal{S} + \mathcal{W}$ es directa, donde $\mathcal{S}$ es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ dado por la ecuación $x + y + z = 0$.

   (d) **(2.5 puntos)** Discute la validez o falsedad de la siguiente afirmación: “si el vector $\mathbf{u}$ es la proyección ortogonal del vector $\mathbf{v}$ sobre el subespacio vectorial $\mathcal{T}$, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente independientes”.

3. **(10 puntos)** Dos compañías de gas, Al rico calorcito S.L. e Invierno caliente S.L., se reparten un mercado de 10 millones de familias. Cada año, uno de cada ocho de los abonados de la primera compañía se pasan a la segunda y uno de cada cuatro se pasa de Invierno caliente S.L. a Al rico calorcito S.L. Si la población no crece e inicialmente había 4 millones de clientes de la primera compañía y 6 millones de la segunda, determinar cúal será la evolución de las dos empresas con el paso del tiempo.

4. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales y problemas de condiciones iniciales:

   (a) **(2.5 puntos)** $y' = (x+y)^2$, $y(1) = 1$.

   (b) **(2.5 puntos)** $y'' - (a+b)y' + aby = x$, siendo a y b parámetros reales.

   (c) **(5 puntos)** $\left\{ \begin{array}{l} x' = 3x - 2y + t \\ y' = 2x - 2y \end{array} \right\}$ ¿Es estable el punto crítico del sistema homogéneo asociado al sistema lineal anterior?

5. **(10 puntos)** Esbozar el diagrama de fases del siguiente sistema autónomo

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = y - x - 2, \\ y' = xy(y - x - 2). \end{array} \right.$$

Examen resuelto

Dada la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{f}(x, y, z) = ((2 + a)x - ay + az, 2y + 2z, (a - 2)x + (2 - a)y + (2 + a)z)$, se pide:

(a) Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ en la base canónica y las ecuaciones, bases y dimensiones del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$ en función del parámetro a.

(b) Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$.

(c) Determinar para el valor del parámetro $a = 1$ si la matriz obtenida en el primer apartado es diagonalizable y obtener su forma diagonal en caso afirmativo.

(d) Explica qué son el núcleo y la imagen de una aplicación lineal $\mathbf{g}$ y prueba que el núcleo de $\mathbf{g}$ es un subespacio vectorial.

Solución. (a) Si denotamos por $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ se tiene que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 2+a & -a & a \\ 0 & 2 & 2 \\ a-2 & 2-a & 2+a \end{pmatrix}.$$

El núcleo satisface el sistema

$$\begin{pmatrix} 2+a & -a & a \\ 0 & 2 & 2 \\ a-2 & 2-a & 2+a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2+a & -a & a & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ a-2 & 2-a & 2+a & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_3 - \frac{a-2}{a+2}F_1 \\ a \neq -2}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2+a & -a & a & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{4-2a}{a+2} & \frac{4+6a}{a+2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 - \frac{2-a}{a+2}F_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2+a & -a & a & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8a}{a+2} & 0 \end{array}\right),$$

y distinguimos los siguientes casos:

- Si $a = 0$, entonces $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0,\ y + z = 0\}$. Es fácil ver que una base es $\{(0, 1, -1)\}$ y por tanto su dimensión es uno.
- Si $a \notin \{0, -2\}$, entonces el sistema es compatible determinado y por tanto $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(0, 0, 0)\}$ y su dimensión es cero.
- Si $a = -2$, resolvemos el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow_{F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

  y el sistema es compatible determinado y por tanto $\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(0, 0, 0)\}$ y su dimensión es cero.

Calculamos ahora la imagen distinguiendo los siguientes casos:

- Si $a \neq 0$, entonces
$$\dim \operatorname{Im} \mathbf{f} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker}(\mathbf{f}) = 3 - 0 = 0,$$
y por tanto $\operatorname{Im} \mathbf{f} = \mathbb{R}^3$.

- Si $a = 0$, un vector $(x, y, z) \in \operatorname{Im} \mathbf{f}$ si y sólo si existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ solución del sistema
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$
y al calcular los rangos de las matrices del sistema
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & x \\ 0 & 2 & 2 & y \\ -2 & 2 & 2 & z \end{array}\right) \rightarrow_{F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & x \\ 0 & 2 & 2 & y \\ 0 & 2 & 2 & z+x \end{array}\right) \rightarrow_{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & x \\ 0 & 2 & 2 & y \\ 0 & 0 & 0 & z+x-y \end{array}\right),$$
obtenemos que para que ambos sean iguales a dos $x - y + z = 0$, que es la ecuación de la imagen. Las ecuaciones paramétricas son
$$\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda - \mu, \\ y = \lambda, \\ z = \mu, \end{array} \right. \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$
por lo que $(x, y, z) = \lambda(1, 1, 0) + \mu(-1, 0, 1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, y por tanto una base es $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ y la dimensión es dos.

(b) La matriz pedida es
$$\mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}),$$
donde
$$\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
y $\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})]^{-1}$, y al calcular la inversa
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow_{\substack{F_2-F_3 \\ F_1-F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow_{F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
obtenemos
$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Entonces
$$\mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2+a & -a & a \\ 0 & 2 & 2 \\ a-2 & 2-a & 2+a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 & 0 & a-2 \\ 2-a & 2 & 2-a \\ a-2 & 0 & a+2 \end{pmatrix}.$$

(c) Calculamos los valores propios con la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 3-t & -1 & 1 \\ 0 & 2-t & 2 \\ -1 & 1 & 3-t \end{vmatrix} = -t^3 + 8t^2 - 20t + 16 = 0,$$

que por el método de Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 8 & -20 & 16 \\ 2 & & -2 & 12 & -16 \\ \hline & -1 & 6 & -8 & 0 \end{array}$$

obtenemos que 2 es raíz siendo las otras dos

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = 3 \pm 1,$$

de donde los valores propios son 4 y 2, que es doble. Así la matriz será diagonalizable si $\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3) = 2$, siendo $\mathbf{A}$ la matriz que estamos estudiando. Dicho subespacio propios satisface la ecuación

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow_{F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right),$$

de donde $\operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0,\ x = y\}$. Fácilmente vemos que una base $\{(1,1,0)\}$, $\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_3) = 1$ y la matriz no es diagonalizable.

(d) Teoría.

Sea $\mathcal{W}$ el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1,a,1)$, $(a,1,1)$, siendo a un parámetro real. Se pide:

(a) Calcular el subespacio ortogonal a $\mathcal{W}$ y dar una base de éste.

(b) Para el valor del parámetro $a = 2$, obtener la expresión analítica de la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, donde $\mathbf{f}$ es la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre el subespacio $\mathcal{W}$.

(c) Determinar para qué valores del parámetro a se verifica que la suma $\mathcal{S} + \mathcal{W}$ es directa, donde $\mathcal{S}$ es el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ dado por la ecuación $x+y+z=0$.

(d) Discute la validez o falsedad de la siguiente afirmación: "si el vector $\mathbf{u}$ es la proyección ortogonal del vector $\mathbf{v}$ sobre el subespacio vectorial $\mathcal{T}$, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente independientes".

Solución. (a) Calculamos el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow_{F_2 - aF_1} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \end{pmatrix},$$

de donde vemos que si $a = 1$, entonces los dos vectores son linealmente dependientes y una base de $\mathcal{W}$ es $\{(1,1,1)\}$, y si $a \neq 1$ ambos vectores son linealmente independientes y por lo tanto ambos vectores forman una base de $\mathcal{W}$. Entonces:

- Si $a = 1$, un vector $(x, y, z) \in \mathcal{W}^{\perp}$ si y sólo si

$$0 = \langle (x,y,z), (1,1,1) \rangle = x + y + z,$$

  por lo que $\mathcal{W}^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$. Sus ecuaciones paramétricas son

$$\left\{ \begin{array}{ll} x = -\lambda - \mu, & \\ y = \lambda, & \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\ z = \mu, & \end{array} \right.$$

  y $(x,y,z) = \lambda(-1,1,0) + \mu(-1,0,1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, y una base es por tanto $\{(-1,1,0), (-1,0,1)\}$.

- Si $a \neq 1$, un vector $(x, y, z) \in \mathcal{W}^{\perp}$ si y sólo si

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \langle (x,y,z), (1,a,1) \rangle = x + ay + z, \\ 0 = \langle (x,y,z), (a,1,1) \rangle = ax + y + z, \end{array} \right.$$

  por lo que $\mathcal{W}^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + ay + z = 0,\ ax + y + z = 0\}$. Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \to_{F_2 - aF_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 0 \end{array} \right),$$

  y obtenemos las ecuaciones paramétricas son

$$\left\{ \begin{array}{ll} x = \lambda, & \\ y = \lambda, & \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\ z = -(1+a)\lambda, & \end{array} \right.$$

  y $(x,y,z) = \lambda(1,1,-(1+a))$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y una base es por tanto $\{(1,1,-(1+a))\}$.

(b) Una base de $\mathcal{W}$ es $\{(1,2,1),(2,1,1)\}$ y obtenemos una base ortogonal $\mathcal{O} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ donde $\mathbf{v}_1 = (1,2,1)$ y

$$\mathbf{v}_2 = (2,1,1) - \frac{\langle (2,1,1),(1,2,1) \rangle}{\langle (1,2,1),(1,2,1) \rangle}(1,2,1) = (2,1,1) - \frac{5}{6}(1,2,1) = \left(\frac{7}{6}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{6} \right).$$

Construimos una base ortonormal $\mathcal{N} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ donde

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{||(1,2,1)||}(1,2,1) = \frac{\sqrt{30}}{5}(1,2,1),$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{||\left(\frac{7}{6}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)||} \left(\frac{7}{6}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{6} \right) = \frac{\sqrt{66}}{11} \left(\frac{7}{6}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{6} \right).$$

La proyección ortogonal es

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(x,y,z) &= \left\langle (x,y,z), \frac{\sqrt{30}}{5}(1,2,1)\right\rangle \frac{\sqrt{30}}{5}(1,2,1)\\
&\quad + \left\langle (x,y,z), \frac{\sqrt{66}}{11}\left(\frac{7}{6},-\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right)\right\rangle \frac{\sqrt{66}}{11}\left(\frac{7}{6},-\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right)\\
&= \frac{6}{5}(x+2y+z)(1,2,1)+\frac{6}{11}\left(\frac{7}{6}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{6}z\right)\left(\frac{7}{6},-\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right)\\
&= \left(\frac{1}{330}(641x+652y+431z), \frac{2}{165}(163x+416y+193z), \frac{1}{330}(431x+772y+401z)\right).
\end{aligned}$$

(c) Démonos cuenta que $\mathcal{S}=\mathcal{W}^{\perp}$ cuando $a=1$. En este caso $\mathcal{S}$ y $\mathcal{W}$ están en suma directa. Si $a\neq 1$, entonces

$$\dim(\mathcal{S}+\mathcal{W}) = \dim\mathcal{S}+\dim\mathcal{W}-\dim(\mathcal{S}\cap\mathcal{W}) = 4-\dim(\mathcal{S}\cap\mathcal{W}),$$

y como $\dim(\mathcal{S}+\mathcal{W})\leq 3$, se tiene que $\dim(\mathcal{S}\cap\mathcal{W})\geq 1$, y por tanto $\mathcal{S}\cap\mathcal{W}\neq\emptyset$, y la suma no es directa.

(d) Falso, si $\mathbf{u}\in\mathcal{T}$, enotnces su proyección coincide con el mismo y por tanto no pueden ser linealmente independientes.

Dos compañías de gas, Al rico calorcito S.L. e Invierno caliente S.L., se reparten un mercado de 10 millones de familias. Cada año, uno de cada ocho de los abonados de la primera compañía se pasan a la segunda y uno de cada cuatro se pasa de Invierno caliente S.L. a Al rico calorcito S.L. Si la población no crece e inicialmente había 4 millones de clientes de la primera compañía y 6 millones de la segunda, determinar cúal será la evolución de las dos empresas con el paso del tiempo.

Solución. Sean x_n e y_n la cantidad de abonados a cada una de las dos empresas en el año n. Entonces

$$\begin{aligned}
x_n &= \frac{7}{8}x_{n-1}+\frac{1}{4}y_{n-1},\\
y_n &= \frac{1}{8}x_{n-1}+\frac{3}{4}y_{n-1}.
\end{aligned}$$

De forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_n\\ y_n\end{pmatrix} = \mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix} x_{n-1}\\ y_{n-1}\end{pmatrix},$$

con

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \frac{7}{8} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} x_n\\ y_n\end{pmatrix} = \mathbf{A}^n\cdot\begin{pmatrix} x_0\\ y_0\end{pmatrix} = \mathbf{A}^n\cdot\begin{pmatrix} 4\\ 6\end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores propios con la ecuación

$$p(t)=\begin{vmatrix} \frac{7}{8}-t & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4}-t\end{vmatrix} = t^2-\frac{13}{8}t+\frac{5}{8}=0,$$

y

$$t=\frac{\frac{13}{8}\pm\sqrt{\frac{169}{64}-\frac{5}{2}}}{2}=\frac{13\pm 3}{16},$$

y los valores propios son 1 y 5/8. Los subespacios propios vienen dados por los sistemas

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I}_2)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(\mathbf{A}-\frac{5}{8}\mathbf{I}_2\right)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y entonces

$$\operatorname{Ker}(\mathbf{A}-\mathbf{I}_2)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-2y=0\},$$

$$\operatorname{Ker}\left(\mathbf{A}-\frac{5}{8}\mathbf{I}_2\right)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=0\},$$

y una base de vectores propios es $\{(2,1),(1,-1)\}$. Entonces

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{P}^{-1},$$

donde

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

y calculamos la inversa

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to_{F_1-2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to_{F_1\times F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$
$$\to_{\frac{1}{3}F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \to_{F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}\right),$$

y

$$\mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \mathbf{A}^n\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{P}\cdot\mathbf{D}^n\cdot\mathbf{P}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{5^n}{8^n} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\left(5-2\frac{5^n}{8^n}\right) \\ \frac{2}{3}\left(5+4\frac{5^n}{8^n}\right) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Además

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\left(5-2\frac{5^n}{8^n}\right)=\frac{20}{3},$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\left(5 + 4\frac{5^n}{8^n}\right) = \frac{10}{3}.$$

Resolver

$$y' = (x+y)^2,$$

con la condición inicial $y(1) = 1$.

Solución. Hacemos el cambio de variable dependiente $z = x + y$, y derivando

$$y' = z' = z^2,$$

por lo que integrando

$$\int \frac{z'(x)}{z(x)^2} dx = \int dx,$$

obtenemos

$$-\frac{1}{z(x)} = x + c,$$

o equivalentemente

$$z(x) = -\frac{1}{x+c},$$

con lo que deshaciendo el cambio

$$y(x) = -\frac{1}{x+c} - x.$$

Utilizando las condiciones iniciales

$$y(1) = 1 = -\frac{1}{1+c} - 1,$$

de donde $c = -3/2$ y la solución del problema de condiciones iniciales es

$$y(x) = -\frac{1}{x - \frac{3}{2}} - x.$$

Resolver

$$y'' - (a+b)y' + aby = x,$$

siendo a y b parámetros reales.

Solución. Obtenemos en primer lugar la solución de la ecuación homogénea por medio de la ecuación característica

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0,$$

de donde

$$x = \frac{a + b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}{2} = \frac{a + b \pm (a-b)}{2},$$

por lo que las soluciones son a y b. Distinguimos los siguientes casos:

- Si $a \neq b$, entonces
$$y_h(x) = c_1 e^{ax} + c_2 e^{bx}.$$
- Si $a = b$, entonces
$$y_h(x) = c_1 e^{ax} + c_2 x e^{ax}.$$

Buscamos ahora una solución particular de la euación no homogénea según los siguientes casos:

- $a \neq b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$. Proponemos entonces una solución particular de la forma $y_p(x) = Ax + B$, cuyas derivadas son $y_p'(x) = A$ e $y_p''(x) = 0$, y sustituyendo en la ecuación
$$-(a+b)A + ab(Ax + B) = x,$$
de donde tenemos el sistema
$$\begin{cases} abA = 1, \\ -(a+b)A + abB = 0, \end{cases}$$
y $A = \frac{1}{ab}$ y $B = \frac{a+b}{(ab)^2}$. La solución es por tanto
$$y(x) = c_1 e^{ax} + c_2 e^{bx} + \frac{1}{ab}x + \frac{a+b}{(ab)^2}.$$
- $a \neq b$, $a = 0$. Proponemos entonces una solución particular de la forma $y_p(x) = Ax^2 + Bx$, cuyas derivadas son $y_p'(x) = 2Ax + B$ e $y_p''(x) = 2A$, y sustituyendo en la ecuación
$$2A - b(2Ax + B) = x,$$
de donde tenemos el sistema
$$\begin{cases} -2bA = 1, \\ 2A - bB = 0, \end{cases}$$
y $A = -\frac{1}{2b}$ y $B = -\frac{1}{b^2}$. La solución es por tanto
$$y(x) = c_1 + c_2 e^{bx} - \frac{1}{2b}x - \frac{1}{b^2}.$$
- $a = b$, $a \neq 0$. Proponemos entonces una solución particular de la forma $y_p(x) = Ax + B$, y procediendo como en el rpimer caso tenemos
$$y(x) = c_1 e^{ax} + c_2 x e^{ax} + \frac{1}{ab}x + \frac{a+b}{(ab)^2}.$$
- $a = b = 0$. Proponemos entonces una solución particular de la forma $y_p(x) = Ax^3 + Bx^2$, cuyas derivadas son $y_p'(x) = 3Ax^2 + 2Bx$ e $y_p''(x) = 6Ax + 2B$, y sustituyendo en la ecuación
$$6Ax + 2B = x,$$
de donde tenemos el sistema
$$\begin{cases} 6A = 1, \\ 2B = 0, \end{cases}$$
y $A = \frac{1}{6}$ y $B = 0$. La solución es por tanto
$$y(x) = c_1 + c_2 x + \frac{1}{6}x^3.$$

Resolver

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = 3x - 2y + t \\ y' = 2x - 2y \end{array} \right\}$$

¿Es estable el punto crítico del sistema homogéneo asociado al sistema lineal anterior?

Solución. Escribimos el sistema de forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores propios de la matriz con la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 3-t & -2 \\ 2 & -2-t \end{vmatrix} = t^2 - t - 2 = 0,$$

de donde

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2},$$

de donde los valores propios son -1 y 2. Calculamos ahora

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{a_1}{t+1} + \frac{a_2}{t-2} = \frac{(a_1 + a_2)t - 2a_1 + a_2}{p(t)},$$

e igualando coeficientes

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 = 0, \\ -2a_1 + a_2 = 1, \end{array} \right.$$

y obtenemos $a_2 = -a_1 = 1/3$. Por otra parte

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t+1} = t - 2, \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{t-2} = t + 1. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^{-t} a_1(\mathbf{A}) \cdot q_1(\mathbf{A}) + e^{2t} a_2(\mathbf{A}) \cdot q_2(\mathbf{A}) \\ &= -\frac{e^{-t}}{3}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2) + \frac{e^{2t}}{3}(\mathbf{A} + \mathbf{I}_2) \\ &= -\frac{e^{-t}}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} + \frac{e^{2t}}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4e^{2t} - e^{-t} & 2(e^{-t} + e^{2t}) \\ 2(e^{2t} - e^{-t}) & 4e^{-t} - e^{2t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y la solución del sistema homogéneo es

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4e^{2t} - e^{-t} & 2(e^{-t} + e^{2t}) \\ 2(e^{2t} - e^{-t}) & 4e^{-t} - e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Proponemos como solución particular del sistema no homogéneo $x_p(t) = At+B$ e $y_p(t) = Ct+D$, cuyas derivadas son $x_p(t) = A$ e $y_p(t) = C$. Sustituimos en le sistema no homogéneo

$$\begin{cases} A = 3At + 3B - 2Ct - 2D + t, \\ C = 2At + 2B - 2Ct - 2D, \end{cases}$$

para obtener el sistema

$$\begin{cases} -3A + 2C = 1, \\ A - 3B + 2D = 0, \\ 2A - 2C = 0, \\ -2B + C + 2D = 0, \end{cases}$$

de donde $A = C = -1$, $B = 1$, $D = 3/2$, y la solución general del sistema no homogéneo es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4e^{2t} - e^{-t} & 2(e^{-t} + e^{2t}) \\ 2(e^{2t} - e^{-t}) & 4e^{-t} - e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t+1 \\ -t+\frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} x(t) = \frac{4c_1+2c_2}{3} e^{2t} + \frac{c_2-c_1}{3} e^{-t} - t + 1, \\ y(t) = \frac{2c_1-c_2}{3} e^{2t} - \frac{c_2-2c_1}{3} e^{-t} - t + \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Dado que un valor propio es positivo,se tiene que el punto crítico del sistema es inestable.

Esbozar el diagrama de fases del siguiente sistema autónomo

$$\begin{cases} x' = y - x - 2, \\ y' = xy(y - x - 2). \end{cases}$$

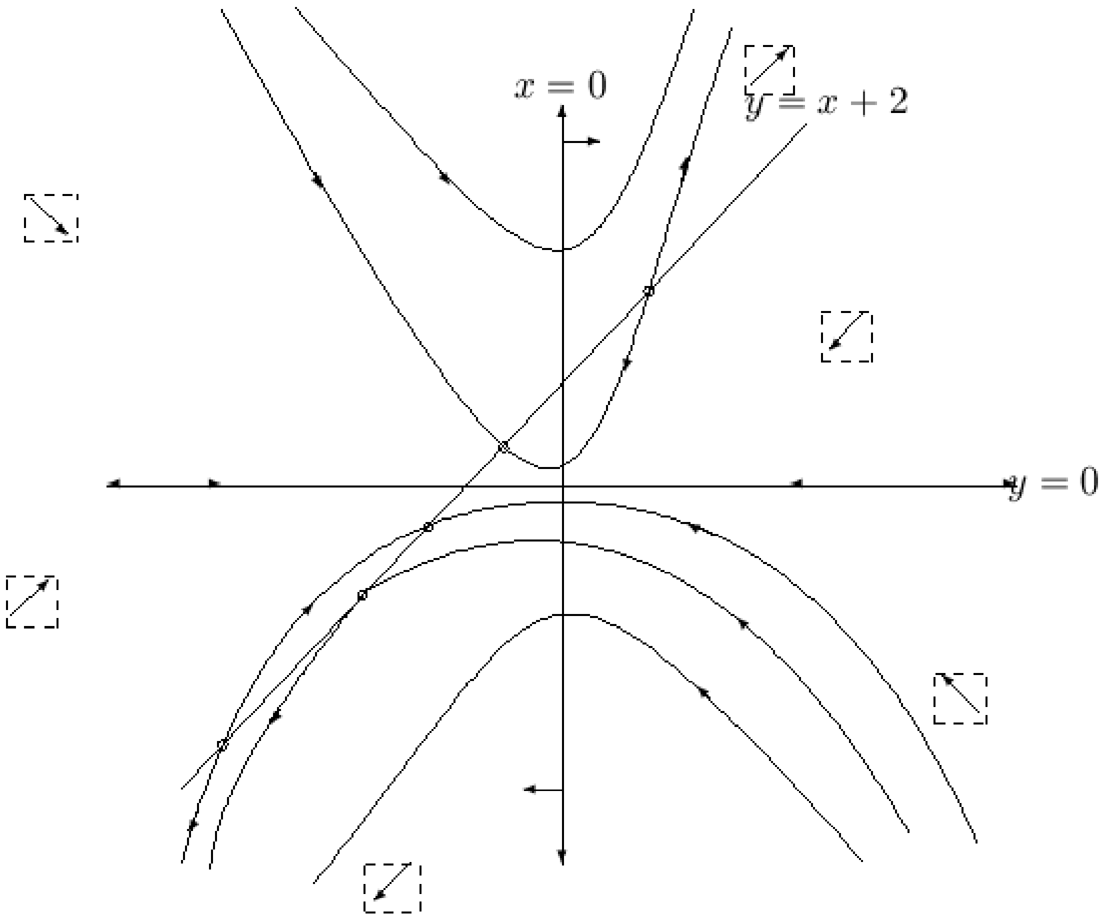
Solución. Es fácil ver que la recta $y - x - 2 = 0$ es de puntos críticos, y que no hay más puntos críticos. Por otra parte las isoclinas son las rectas $x = 0$ e $y = 0$, teniéndose en ambas que $y' = 0$ siendo $x' > 0$ si $y - x - 2 > 0$ y $x' < 0$ en caso contrario. Tenemos además que $y' > 0$ si o bien $xy > 0$ y $y - x - 2 > 0$ o bien $xy < 0$ y $y - x - 2 < 0$, siendo en otro caso $y' < 0$. Finalmente las integrales primeras vienen dadas por la ecuación

$$y' = \frac{xy(y - x - 2)}{y - x - 2} = xy,$$

de donde integrando

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int x dx,$$

obtenemos $\log y = \frac{x^2}{2} + c$, o $y = ke^{x^2/2}$, que pueden cortar a la recta de puntos críticos en un punto. Con esta información construimos el diagrama



Capítulo 31

14–6–2007

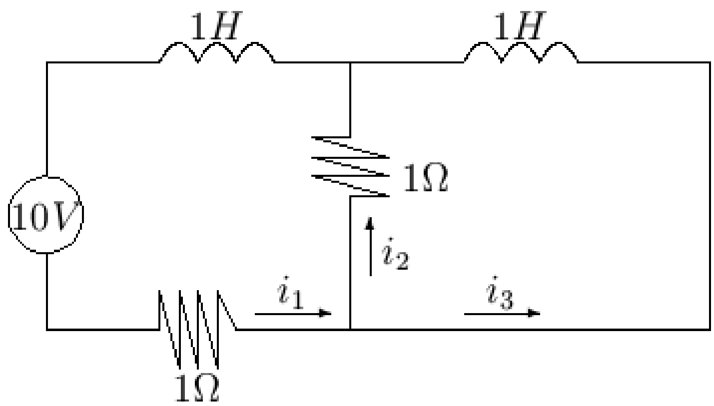
Enunciado

1. **(2 puntos)** Esbozar el diagrama de fases del sistema

$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x - 2y, \end{cases}$$

indicando la estabilidad de los puntos críticos.

2. **(2 puntos)** Dado el circuito de la figura que está inicialmente descargado



se pide:

(a) Comprobar que satisface las ecuaciones

$$\begin{cases} i_1' = -2i_1 + i_3 + 10, \\ i_3' = i_1 - i_3. \end{cases}$$

(b) Determinar los valores estimados de i_1, i_2 e i_3 cuando el tiempo es suficientemente grande.

3. **(2 puntos)** Dado el sistema

$$\begin{cases} x' = y + \varepsilon(x + xy), \\ y' = -x - 2\varepsilon y x^3, \end{cases}$$

determinar la estabilidad local del punto crítico $(0, 0)$ en función del parámetro $\varepsilon \geq 0$.

4. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales y problemas de condiciones iniciales:

   (a) **(1 punto)** $y' = y^2 - 4y$, $y(0) = 0$.

   (b) **(1 punto)** $x^2 y'' - 3xy' + 2y = x^2$.

   (c) **(2 puntos)** $x' = 3x - y + e^t$; $y' = x + y$. Estudiar además la estabilidad del punto crítico del sistema homogéneo.

Examen resuelto

Esbozar el diagrama de fases del sistema

$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x - 2y, \end{cases}$$

indicando la estabilidad de los puntos críticos.

Solución. Es sencillo ver que $(0,0)$ es el único punto crítico del sistema. Las isoclinas son las rectas $x+2y=0$ e $y=x$. En la primera se tiene que $x'=0$ e $y'=3x$, por lo que $y'>0$ si $x>0$ e $y'<0$ si $x<0$. En la segunda isoclina se verifica que $y'=0$ y $x'=3x$, por lo que $x'>0$ si $x>0$ e $x'<0$ si $x<0$. Calculamos ahora los valores propios de la matriz del sistema con la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 2 & -2-t \end{vmatrix} = t^2 + t - 6 = 0,$$

con lo que

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2},$$

por lo que los valores propios son -3 y 2. Denotando por $\mathbf{A}$ la matriz del sistema, los subespacios propios vienen dados por los sistemas

$$(\mathbf{A} + 3\mathbf{I}_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y

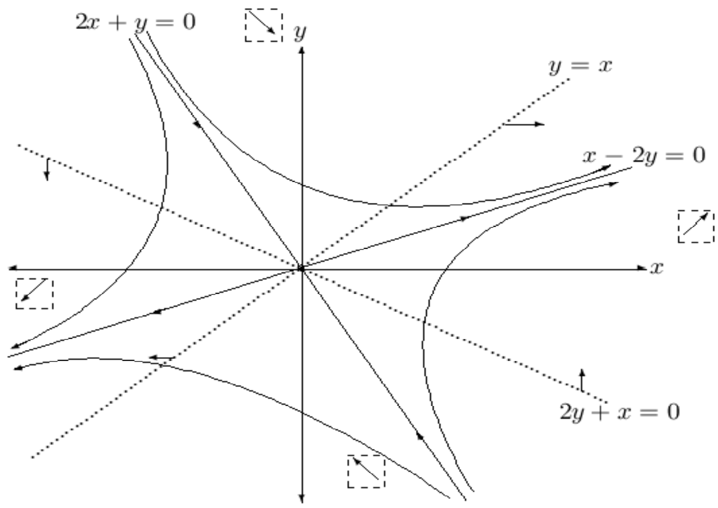
$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

por lo que

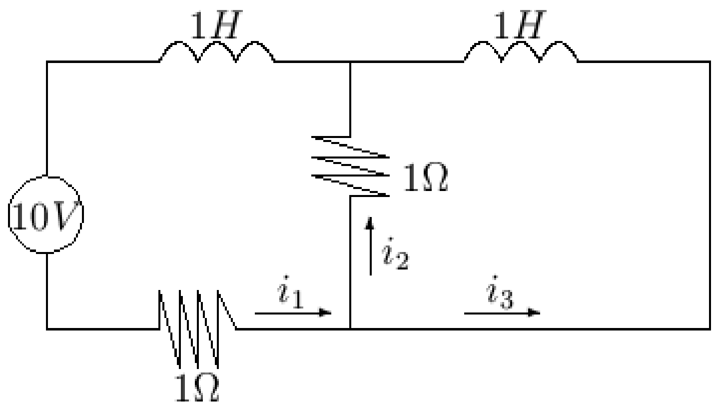
$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A} + 3\mathbf{I}_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = 0\},$$

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\}.$$

Entonces tenemos el diagrama de fases



Dado el circuito de la figura que está inicialmente descargado



se pide:

(a) Comprobar que satisface las ecuaciones

$$\begin{cases} i_1' = -2i_1 + i_3 + 10, \\ i_3' = i_1 - i_3. \end{cases}$$

(b) Determinar los valores estimados de i_1, i_2 e i_3 cuando el tiempo es suficientemente grande.

Solución. (a) En cada nudo se verifica que $i_1 = i_2 + i_3$. Suponiendo que la corriente gira en cada subcircuito en sentido contrario a las agujas del reloj, se tiene

$$V(t) = V_{L_1} + V_{R_1} + V_{R_2},$$

para el subcircuito de la izquierda y

$$0 = V_{L_2} - V_{R_2},$$

para el de la derecha, donde $V(t) = 10V$, $L_1 = L_2 = 1H$ y $R_1 = R_2 = 1\Omega$. Entonces

$$\begin{cases} 10 = i_1' + i_1 + i_2, \\ 0 = i_3' - i_2, \end{cases}$$

y utilizando la ecuación para el nudo y simplificando obtenemos

$$\begin{cases} i_1' = -2i_1 + i_3 + 10, \\ i_3' = i_1 - i_3. \end{cases}$$

(b) Escribimos el sistema de forma matricial

$$\begin{pmatrix} i_1' \\ i_3' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} i_1 \\ i_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores propios de la matriz a partir de la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} -2-t & 1 \\ 1 & -1-t \end{vmatrix} = t^2 + 3t + 1 = 0,$$

de donde

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

por lo que los valores propios son negativos. Entonces

$$\lim_{t\to\infty} e^{t\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Proponemos una solución particular del sistema $i_{1,p}(t) = A$ y $i_{3,p}(t) = B$, cuyas derivadas son nulas, y al sustituir en el sistema no homogéneo

$$\begin{cases} 0 = -2A + B + 10, \\ 0 = A - B, \end{cases}$$

de donde $A = B = 10$ por lo que la solución del sistema no homogéneo es

$$\begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_3(t) \end{pmatrix} = e^{t\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix},$$

de donde

$$\lim_{t\to\infty} \begin{pmatrix} i_1(t) \\ i_3(t) \end{pmatrix} = \lim_{t\to\infty} \left(e^{t\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix},.$$

y

$$\lim_{t\to\infty} i_2(t) = \lim_{t\to\infty} (i_1(t) - i_3(t)) = 0.$$

Dado el sistema

$$\begin{cases} x' = y + \varepsilon(x + xy), \\ y' = -x - 2\varepsilon y x^3, \end{cases}$$

determinar la estabilidad local del punto crítico $(0,0)$ en función del parámetro $\varepsilon \geq 0$.

Solución. El jacobiano del sistema es

$$\mathbf{Jf}(x,y) = \begin{pmatrix} \varepsilon(1+y) & 1 + \varepsilon x \\ -1 - 6\varepsilon y x^2 & -2\varepsilon x^3 \end{pmatrix},$$

y así

$$\mathbf{Jf}(0,0) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios se obtienen de la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} \varepsilon - t & 1 \\ -1 & -t \end{vmatrix} = t^2 - \varepsilon t + 1 = 0,$$

de donde

$$t = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4}}{2}.$$

Se distinguen entonces los siguientes casos:

- Si $\varepsilon^2 - 4 \geq 0$, esto es $\varepsilon \geq 2$, entonces los valores propios son reales teniéndose que como $\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4} > 0$, ambos son positivos y por tanto el punto crítico es hiperbólico. Por el teorema de Hartmen–Grobman concluimos que el punto crítico es inestable.

- Si $\varepsilon^2 - 4 < 0$, esto es $\varepsilon < 2$, entonces los valores propios son complejos conjugados siendo la parte real $\varepsilon/2$. Si $\varepsilon > 0$, la parte real es positiva y por tanto el punto crítico es hiperbólico. Por el teorema de Hartmen–Grobman concluimos que el punto crítico es inestable. Si $\varepsilon = 0$, el sistema se escribe como
$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x, \end{cases}$$
y sus valores propios son $\pm i$, por lo que al tener dos valores propios distintos con parte real nula es sistema lineal es estable, pero no asintóticamente estable.

Resolver
$$y' = y^2 - 4y,$$
con la condición inicial $y(0) = 0$.

Solución. Dado que si $f(y) = y^2 - 4y$, entonces $f(0) = 0$, entonces las solución (singular) del problema de condiciones iniciales es $y(x) = 0$.

Resolver
$$x^2y'' - 3xy' + 2y = x^2.$$

Solución. Se trata de una ecuación de Cauchy–Euler que con el cambio $x = e^t$ se convierte en una ecuación lineal con coeficientes constantes. Si denotamos la derivada respecto de t por $\dot{y}$, se tiene que
$$y' = \dot{y}\,\frac{dt}{dx} = \dot{y}\,\frac{1}{x} = \dot{y}\,e^{-t},$$
y
$$y'' = \frac{d}{dt}(\dot{y}\,e^{-t})\frac{dt}{dx} = \ddot{y}\,e^{-2t} - \dot{y}\,e^{-2t},$$
por lo que el problema queda de la forma
$$\ddot{y} - 4\,\dot{y} + 2y = e^{2t}.$$
Resolvemos la ecuación homogénea a partir de la ecuación característica
$$t^2 - 4t + 2 = 0,$$
de donde
$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2},$$
por lo que la solución es
$$y_h(t) = c_1 e^{t(2+\sqrt{2})} + c_2 e^{t(2-\sqrt{2})}.$$

Proponemos como solución particular de la ecuación no homogénea $y_p(t) = Ae^{2t}$, cuyas derivadas son $y_p'(t) = 2Ae^{2t}$ e $y_p''(t) = 4Ae^{2t}$. Sustituyendo en la ecuación no homogénea y simplificando

$$-2Ae^{2t} = e^{2t},$$

con lo que $A = -1/2$ y la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y(t) = c_1 e^{t(2+\sqrt{2})} + c_2 e^{t(2-\sqrt{2})} - \frac{1}{2}e^{2t}.$$

Deshaciendo el cambio

$$y(x) = c_1 x^{(2+\sqrt{2})} + c_2 x^{(2-\sqrt{2})} - \frac{1}{2}x^2.$$

Resolver $x' = 3x - y + e^t$; $y' = x + y$. Estudiar además la estabilidad del punto crítico del sistema homogéneo.

Solución. Escribimos el sistema de forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores propios con la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} 3-t & -1 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 = 0,$$

por lo que el único valor propio doble es 2. Entonces $a_1(t) = q_1(t) = 1$ y

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^{2t} a_1(\mathbf{A}) \cdot q_1(\mathbf{A}) \cdot \sum_{i=0}^{1} (\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2)^i \frac{t^i}{i!} \\ &= e^{2t}(\mathbf{I}_2 + (\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2)t) \\ &= e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} t\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^{2t}(1+t) & -e^{2t}t \\ e^{2t}t & e^{2t}(1-t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y la solución del sistema hmogéneo es

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(1+t) & -e^{2t}t \\ e^{2t}t & e^{2t}(1-t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Proponemos como solución del sistema no homogéneo $x_p(t) = Ae^t$ e $y_p(t) = Be^t$, cuyas derivadas son inguales a las funciones originales y sustituyendo en el sistema no homogéneo tenemos

$$\begin{cases} Ae^t = 3Ae^t - Be^t + e^t, \\ Be^t = Ae^t + Be^t, \end{cases}$$

de donde igualando coeficientes

$$\left\{\begin{array}{l} -2A + B = 1, \\ A = 0, \end{array}\right.$$

obtenemos $A = 0$ y $B = 1$ y la solución del sistema no homogéneo es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(1+t) & -e^{2t}t \\ e^{2t}t & e^{2t}(1-t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix},$$

o equivalentemente

$$\left\{\begin{array}{l} x(t) = c_1 e^{2t} + te^{2t}(c_1 - c_2), \\ y(t) = c_2 e^{2t} + te^{2t}(c_1 - c_2) + e^t. \end{array}\right.$$

Capítulo 32

25–6–2007

Enunciado

1. Dada $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{f}(x, y, z) = (-z, x + y + z, -x)$, se pide:

   (a) **(2.5 puntos)** Hallar la matriz $\mathbf{A}$ de $\mathbf{f}$ en la base canónica y las ecuaciones, bases y dimensiones del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$.

   (b) **(2.5 puntos)** Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

   (c) **(2.5 puntos)** Calcular $\mathbf{A}^n$ para todo $n \geq 0$.

   (d) **(2.5 puntos)** ¿Es cierto que si una matriz es diagonalizable y su único valor propio es 1, dicha matriz es la identidad? Razona la respuesta.

2. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el conjunto de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2. Dados $p(x)$,$q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ se define

$$< p(x), q(x) >= \int_0^1 xp(x)q(x)dx. \tag{32.1}$$

   Se pide:

   (a) **(2.5 puntos)** Demostrar que $<, >$ definido por (32.1) es un producto escalar.

   (b) **(2.5 puntos)** Dado $\mathcal{W} = \{a + bx : a, b \in \mathbb{R}\}$, obtener el $\mathcal{W}^{\perp}$ subespacio ortogonal a $\mathcal{W}$.

   (c) **(2.5 puntos)** Hallar la mejor aproximación en $\mathcal{W}^{\perp}$ de la función e^x.

   (d) **(2.5 puntos)** Determinar el valor de a para que ax^2+1 sea un vector normal o unitario.

3. Contestar de forma razonada a las siguientes cuestiones:

   (a) (**5 puntos**) Dar la expresión analítica de la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de forma que su núcleo tiene ecuaciones $x + y = 0$ y $x - z = 0$, $\mathbf{f}(1, 0, 0) = (1, 2, 3)$ y -2 es un valor propio de $\mathbf{f}$ con vector propio asociado $(1, 0, 1)$. Obtener la imagen de $\mathbf{f}$ y determinar si el vector $(1, 4, 5)$ pertenece a dicha imagen.

   (b) (**2.5 puntos**) Demostrar que el conjunto $\mathcal{D}$ de las matrices cuadradas diagonales es un subespacio vectorial de las matrices cuadradas de tamaño $n \times n$.

(c) (**2.5 puntos**) Demostrar que si 0 es una valor propio de la matriz $\mathbf{A}^5$, entonces $|\mathbf{A}| = 0$.

4. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales y problemas de condiciones iniciales:

   (a) **(2.5 puntos)** $x^2 - y^2 + 2x + 2xyy' = 0$, $y(1) = 1$.

   (b) **(2.5 puntos)** $y^{3)} - y' = 2$.

   (c) **(5 puntos)** $\left\{\begin{array}{l} x' = x - y, \\ y' = 5x - y, \\ x(0) = y(0) = 1, \end{array}\right\}$ ¿Es estable el punto crítico del sistema lineal anterior?

5. Contestar de forma razonada a las siguientes cuestiones:

   (a) **(7.5 puntos)** Esbozar el diagrama de fases del siguiente sistema autónomo

   $$\left\{\begin{array}{l} x' = x(x^2 + y^2 - 1), \\ y' = y(1 - x^2 - y^2), \end{array}\right.$$

   y determinar la estabilidad de sus puntos críticos aislados.

   (b) **(2.5 puntos)** La solución general de una ecuación lineal no homogénea con coeficientes constantes es $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + xe^x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Determinar la ecuación.

6. Contestar de forma razonada a las siguientes cuestiones:

   (a) **(5 puntos)** Una central atómica produce energía a partir de la descomposición de un elemento radioactivo que se desintegra de manera proporcional a la cantidad de sustancia que hay en cada momento, de tal forma que 100 gramos pasan a 80 en una semana. Cuando la cantidad de sustancia radiactiva es de 50 gramos, empieza a introducirse en el reactor más cantidad de la misma de manera constante. Determinar la cantidad de debe echarse para que en el depósito la cantidad de sustancia radioactiva tienda a estabilizarse con el tiempo en 50 gramos.

   (b) **(5 puntos)** Calcular la estabilidad del punto crítico $(0, 0)$ de sistema

   $$\left\{\begin{array}{l} x' = -\varepsilon(x - y^2) - y, \\ y' = \varepsilon(x + xy), \end{array}\right.$$

   en función del parámetro $\varepsilon \geq 0$.

Examen resuelto

Dada $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{f}(x, y, z) = (-z, x + y + z, -x)$, se pide:

(a) Hallar la matriz $\mathbf{A}$ de $\mathbf{f}$ en la base canónica y las ecuaciones, bases y dimensiones del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$.

(b) Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

(c) Calcular $\mathbf{A}^n$ para todo $n \geq 0$.

(d) ¿Es cierto que si una matriz es diagonalizable y su único valor propio es 1, dicha matriz es la identidad? Razona la respuesta.

Solución. (a) Si denotamos por $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El núcleo se obtiene a partir del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

del que fácilmente obtenemos que $x = y = z = 0$ y por tanto $\operatorname{Ker}(\mathbf{f}) = \{(0, 0, 0)\}$ y su dimensión es cero. La imagen satisface entonces

$$\dim \operatorname{Im} \mathbf{f} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker}(\mathbf{f}) = 3 - 0 = 3,$$

por lo que $\operatorname{Im} \mathbf{f} = \mathbb{R}^3$ y yna base será por ejemplo la canónica.

(b) La matriz pedida es

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\mathbf{i}),$$

donde

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(\mathbf{i})]^{-1}$, y al calcular la inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to_{F_2 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to_{F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

y

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

teniéndose

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Calculamos los valores propios de la matriz mediante la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} -t & 0 & -1 \\ 1 & 1-t & 1 \\ -1 & 0 & -t \end{vmatrix} = -t^3 + t^2 + t - 1 = 0,$$

y utilizando el método de Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & & -1 & 0 & 1 \\ \hline & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

tenemos que 1 es solución siendo los otros valores propios soluciones de la ecuación $-t^2+1=0$, por lo que los valores propios de la matriz son -1 y 1, que es doble. Calculamos los subespacios propios mediante los sistemas

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I}_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0\},$$
$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A} + \mathbf{I}_2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z,\ x + 2y + z = 0\}.$$

Las bases de los subespacios propios se obtienen fácilmente y son $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-\mathbf{I}_2)} = \{(1,0,-1),(0,1,0)\}$ y $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(\mathbf{A}+\mathbf{I}_2)} = \{(1,-1,1)\}$, y por tanto $\{(1,0,-1),(0,1,0),(1,-1,1)\}$ es una base de vectores propios. Entonces

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1},$$

donde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y calculando la inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3+F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{\frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{F_1-F_3 \\ F_2+F_3}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right),$$

con lo que

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{P}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+(-1)^n}{2} & 0 & \frac{(-1)^n-1}{2} \\ \frac{1-(-1)^n}{2} & 1 & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ \frac{(-1)^n-1}{2} & 0 & \frac{1+(-1)^n}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(d) Sea $\mathbf{A}$ una matriz que cumple dicha propiedad. Entonces existe una matriz invertible $\mathbf{P}$ tal que

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{I}_n \cdot \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I}_n,$$

por lo que la afirmación es cierta.

Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el conjunto de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2. Dados $p(x)$,$q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ se define

$$< p(x), q(x) >= \int_0^1 xp(x)q(x)dx. \tag{32.2}$$

Se pide:

(a) Demostrar que $<,>$ definido por (32.2) es un producto escalar.

(b) Dado $\mathcal{W} = \{a + bx : a, b \in \mathbb{R}\}$, obtener el $\mathcal{W}^\perp$ subespacio ortogonal a $\mathcal{W}$.

(c) Hallar la mejor aproximación en $\mathcal{W}^\perp$ de la función e^x.

(d) Determinar el valor de a para que $ax^2 + 1$ sea un vector normal o unitario.

Solución. (a) Se verifican las siguentes propiedades:

- Dados $p(x), q(x), r(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle \alpha p(x) + \beta q(x), r(x) \rangle &= \int_0^1 x(\alpha p(x) + \beta q(x))r(x)dx \\ &= \alpha \int_0^1 xp(x)r(x)dx + \beta \int_0^1 xq(x)r(x)dx = \alpha \langle p(x), r(x) \rangle + \beta \langle q(x), r(x) \rangle, \end{aligned}$$

por lo que es lineal respecto de la primera coordenada.

- Dados $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ se tiene

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 xp(x)q(x)dx = \int_0^1 xq(x)p(x)dx = \langle q(x), p(x) \rangle,$$

por lo que es simétrica.

- Finalmente, dado $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ se tiene

$$\langle p, p\rangle = \int_0^1 xp(x)^2 dx \geq 0$$

dado que $xp(x)^2 \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$. Además,

$$\int_0^1 xp(x)^2 dx = 0$$

si y sólo si $xp(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$, esto es $p(x) = 0$, al ser los polinomios funciones continuas en el intervalo $[0,1]$.

(b) Una base de $\mathcal{W}$ es $\{1, x\}$. Un polinomoio $a + bx + cx^2 \in \mathcal{W}^\perp$ si

$$\begin{cases} 0 = \langle 1, a + bx + cx^2\rangle = \int_0^1 (ax + bx^2 + cx^3)dx = \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4}, \\ 0 = \langle x, a + bx + cx^2\rangle = \int_0^1 (ax^2 + bx^3 + cx^4)dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{5}, \end{cases}$$

y así

$$\mathcal{W}^\perp = \left\{a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x] : 6a + 4b + 2c = 0,\ 20a + 15b + 12c = 0\right\}.$$

(c) Resolvemos el sistema que define el susbespacio $\mathcal{W}^\perp$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2 & 0 \\ 20 & 15 & 12 & 0 \end{array}\right) \rightarrow_{F_2 - 6F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2 & 0 \\ -16 & -9 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

de donde obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} a = \lambda, \\ b = -\frac{16}{9}\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ c = \frac{5}{9}\lambda, \end{cases}$$

por lo que $\lambda\left(1 - \frac{16}{9}x + \frac{5}{9}x^2\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, por lo que una base es $\{9 - 16x + 5x^2\}$. Una base ortonormal de $\mathcal{W}^\perp$ es $\{p(x)\}$ donde

$$p(x) = \frac{1}{||9 - 16x + 5x^2||}(9 - 16x + 5x^2) = \frac{\sqrt{114}}{19}(9 - 16x + 5x^2).$$

La mejor aproximación es la proyección ortogonal de e^x sobre $\mathcal{W}^\perp$ dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(e^x) &= \left\langle e^x, \frac{\sqrt{114}}{19}(9 - 16x + 5x^2)\right\rangle \frac{\sqrt{114}}{19}(9 - 16x + 5x^2) \\ &= \frac{6}{19}\left(\int_0^1 e^x(9 - 16x + 5x^2)dx\right)(9 - 16x + 5x^2) \\ &= (14e - 35)(9 - 16x + 5x^2). \end{aligned}$$

(d) Planteamos la ecuación

$$\begin{aligned} 1 &= \left\langle ax^2 + 1, ax^2 + 1\right\rangle = a^2\left\langle x^2, x^2\right\rangle + 2a\left\langle x^2, 1\right\rangle + \langle 1, 1\rangle \\ &= a^2\int_0^1 x^5 dx + 2a\int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 x dx \\ &= \frac{a^2}{6} + \frac{a}{2} + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

y simplificando
$$a^2 + 3a - 3 = 0,$$
de donde
$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{9+12}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

> Dar la expresión analítica de la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de forma que su núcleo tiene ecuaciones $x + y = 0$ y $x - z = 0$, $\mathbf{f}(1,0,0) = (1,2,3)$ y -2 es un valor propio de $\mathbf{f}$ con vector propio asociado $(1,0,1)$. Obtener la imagen de $\mathbf{f}$ y determinar si el vector $(1,4,5)$ pertenece a dicha imagen.

Solución. Es fácil ver que una base del núcleo es $\{(1,-1,1)\}$ y que $\mathcal{B} = \{(1,-1,1),(1,0,0),(1,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ ya que al calcular el rango de la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to_{F_1 \times F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to_{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
obtenemos que éste es tres. La aplicación lineal pedida cumple
$$\begin{aligned} \mathbf{f}(1,-1,1) &= (0,0,0), \\ \mathbf{f}(1,0,0) &= (1,2,3), \\ \mathbf{f}(1,0,1) &= (-2,0,-2). \end{aligned}$$
Entonces si $\mathcal{C}$ denota la base canónica de $\mathbb{R}^3$, tenemos
$$\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$
y la matriz
$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}),$$
donde
$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$
y al calcular la inversa
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to_{F_1 \times F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to_{\substack{F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to_{\substack{F_2 - F_3 \\ (-1)F_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$
y así
$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

La aplicación lineal pedida es

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x,y,z) &= \left(\mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)^t = \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)^t = \\ & (x-2y-3z, 2x-2z, 3x-2y-5z). \end{aligned}$$

Un vector $(x,y,z) \in \operatorname{Im}\mathbf{f}$ si y sólo si existe $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ solución del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Al calcular los rangos de las matrices del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & x \\ 2 & 0 & -2 & y \\ 3 & -2 & -5 & z \end{array}\right) \rightarrow_{\substack{F_2-2F_1 \\ F_3-3F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & x \\ 0 & 4 & 4 & y-2x \\ 0 & 4 & 4 & z-3x \end{array}\right) \rightarrow_{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & x \\ 0 & 4 & 4 & y-2x \\ 0 & 0 & 0 & z-x-y \end{array}\right)$$

tenemos que para que ambos sean igual a dos $z-x-y=0$, que es la ecuación de la imagen. Dado que $5-1-4=0$, concluimos que el vector $(1,4,5) \in \operatorname{Im}\mathbf{f}$.

Demostrar que el conjunto $\mathcal{D}$ de las matrices cuadradas diagonales es un subespacio vectorial de las matrices cuadradas de tamaño $n \times n$.

Solución. Sean $\mathbf{A} = (a_{ij}), \mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathcal{D}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B} = \alpha(a_{ij}) + \beta(b_{ij}) = (\alpha a_{ij} + \beta b_{ij}).$$

Si $i \neq j$, entonces

$$\alpha a_{ij} + \beta b_{ij} = \alpha 0 + \beta 0 = 0,$$

por lo que $\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B} \in \mathcal{D}$.

Demostrar que si 0 es una valor propio de la matriz $\mathbf{A}^5$, entonces $|\mathbf{A}| = 0$.

Solución. Si cero es valor propio de $\mathbf{A}^5$, entonces existe un vector no nulo $\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{A}^5 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Entonces el sistema $\mathbf{A}^5 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ es compatible indeterminado y por tanto $|\mathbf{A}^5| = 0$. Como $|\mathbf{A}^5| = |\mathbf{A}|^5 = 0$, se tiene que $|\mathbf{A}| = 0$.

Resolver

$$x^2 - y^2 + 2x + 2xyy' = 0,$$

con la condición inicial $y(1) = 1$.

Solución. Sean $P(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$ y $Q(x,y) = 2xy$. Entonces

$$-2y = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 2y,$$

por lo que hemos de buscar un factor integrante $\mu(x,y)$ con la ecuación

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\mu(x,y) + P(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\mu(x,y) + Q(x,y)\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y)$$

que nos da

$$-2y\mu(x,y) + (x^2 - y^2 + x)\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) = 2y\mu(x,y) + 2xy\frac{\partial \mu}{\partial x}(x,y).$$

Suponiendo que $\mu(x)$ la ecuación anterior se reduce a

$$-2\mu(x) = x\mu'(x),$$

e integrando

$$\int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}dx = -\int \frac{2}{x}dx,$$

obtenemos que $\log \mu(x) = -2\log x = \log \frac{1}{x^2}$, y

$$\mu(x) = \frac{1}{x^2}$$

es un factor integrante y la ecuación

$$1 - \frac{y^2}{x^2} + \frac{2}{x} + 2\frac{y}{x}y' = 0,$$

es exacta y existirá $f(x,y)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 1 - \frac{y^2}{x^2} + \frac{2}{x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2\frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Utilizando la primera condición tenemos

$$f(x,y) = \int \left(1 - \frac{y^2}{x^2} + \frac{2}{x}\right) dx = x + \frac{y^2}{x} + 2\log x + g(y).$$

Derivando esta expresión respecto de y y sustituyendo en la segunda condición

$$2\frac{y}{x} + g'(y) = 2\frac{y}{x},$$

de donde $g'(y) = 0$ y por tanto $g(y)$ es constante y la función es $f(x,y) = x + \frac{y^2}{x} + 2\log x$, y la solución general de la ecuación es

$$x + \frac{y^2}{x} + 2\log x = c.$$

Utilizando las condiciones iniciales tenemos que $c = 2$, porlo que

$$x + \frac{y^2}{x} + 2\log x = 2,$$

y así

$$y(x) = \sqrt{2x - x^2 - 2x\log x}.$$

Resolver

$$y^{3)} - y' = 2.$$

Solución. Resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea a partir de la ecuación característica

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = 0,$$

de donde las soluciones son 0 y ± 1, siendo entonces la solución general de la ecuación homogénea

$$y_h(x) = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x}.$$

Proponemos como solución particular de la ecuación no homogénea $y_p(x) = Ax$, cuyas derivadas son $y_p'(x) = A$, siendo las demás derivadas nulas. Sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$-A = 2,$$

y la solución general de la ecuación no homogénea es

$$y(x) = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} - 2x.$$

Resolver

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = 5x - y, \\ x(0) = y(0) = 1, \end{cases}$$

¿Es estable el punto crítico del sistema lineal anterior?

Solución. Escribimos el sistema de forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores propios

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & -1 \\ 5 & -1-t \end{vmatrix} = t^2 + 4 = 0,$$

de donde los valores propios son $\pm 2i$. Calculamos ahora

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{a_1}{t-2i} + \frac{a_2}{t+2i} = \frac{(a_1+a_2)t + 2ia_1 - 2ia_2}{p(t)},$$

e igualando coeficientes

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0, \\ 2ia_1 - 2ia_2 = 1, \end{cases}$$

y $a_1 = -a_2 = \frac{1}{4i}$. Por otro lado

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t-2i} = t + 2i, \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{t+2i} = t - 2i. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^{i2t} a_1(\mathbf{A}) \cdot q_1(\mathbf{A}) + e^{-i2t} a_2(\mathbf{A}) \cdot q_2(\mathbf{A}) \\ &= \frac{e^{i2t}}{4i}(\mathbf{A} + 2i\mathbf{I}_2) - \frac{e^{-i2t}}{4i}(\mathbf{A} - 2i\mathbf{I}_2) \\ &= \frac{e^{i2t}}{4i}\begin{pmatrix} 1+2i & -1 \\ 5 & -1+2i \end{pmatrix} - \frac{e^{-i2t}}{4i}\begin{pmatrix} 1-2i & -1 \\ 5 & -1-2i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4i}\begin{pmatrix} e^{i2t} - e^{-i2t} + 2i(e^{i2t} + e^{-i2t}) & -(e^{i2t} - e^{-i2t}) \\ 5(e^{i2t} - e^{-i2t}) & -(e^{i2t} - e^{-i2t}) + 2i(e^{i2t} + e^{-i2t}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sin(2t) + 2\cos(2t) & -\sin(2t) \\ 5\sin(2t) & -\sin(2t) + 2\cos(2t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y la solución general es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sin(2t) + 2\cos(2t) & -\sin(2t) \\ 5\sin(2t) & -\sin(2t) + 2\cos(2t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Utilizando las condiciones iniciales

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

y

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sin(2t) + 2\cos(2t) & -\sin(2t) \\ 5\sin(2t) & -\sin(2t) + 2\cos(2t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t), \\ y(t) = \cos(2t) + 4\sin(2t). \end{cases}$$

Esbozar el diagrama de fases del siguiente sistema autónomo

$$\begin{cases} x' = x(x^2 + y^2 - 1), \\ y' = y(1 - x^2 - y^2), \end{cases}$$

y determinar la estabilidad de sus puntos críticos aislados.

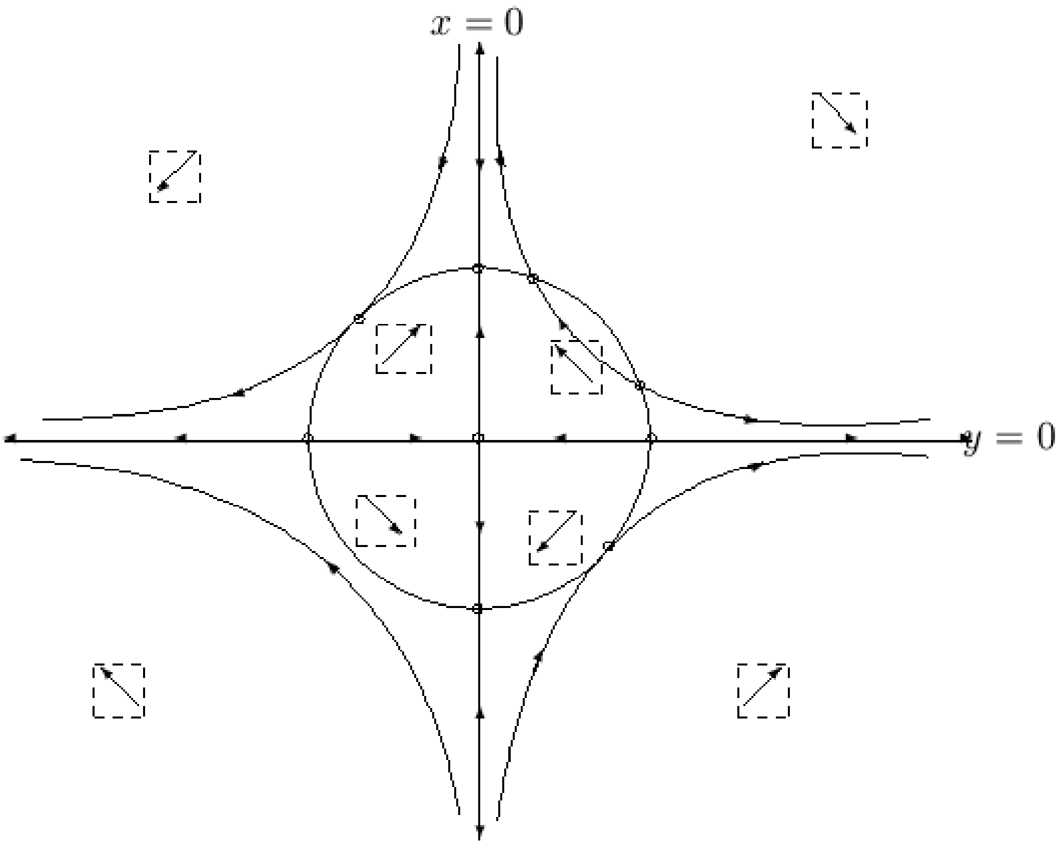
Solución. Es fácil ver que la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ es de puntos críticos, y que el otro punto crítico es $(0, 0)$. Por otra parte las isoclinas son las rectas $x = 0$ e $y = 0$, teniéndose en la primera que $x' = 0$ siendo $y' = y(1-y^2) = y(1-y)(1+y)$ y por tanto $y' > 0$ si $y \in (-\infty, -1)\cup(0, 1)$ e $y' < 0$ en caso contrario. En la segunda isoclina $y' = 0$ y $x' = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$, por lo que $x' > 0$ si $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$ y $x' < 0$ en caso contrario. Tenemos además que $x' > 0$ si o bien $x > 0$ y $x^2 + y^2 > 1$ o bien $x < 0$ y $x^2 + y^2 < 1$, siendo en otro caso $x' < 0$. Por otro lado, se tiene que $y' > 0$ si o bien $y > 0$ y $1 > x^2 + y^2$ o bien $y < 0$ y $1 < x^2 + y^2$, siendo en otro caso $y' < 0$. Finalmente las integrales primeras vienen dadas por la ecuación

$$y' = \frac{y(1 - x^2 - y^2)}{x(x^2 + y^2 - 1)} = -\frac{y}{x},$$

de donde integrando

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = -\int \frac{1}{x} dx,$$

obtenemos $\log y = -\log x + c$, o $yx = k$, que pueden cortar a la circunferencia de puntos críticos en un punto, en dos o en ninguno. Con esta información construimos el diagrama



El punto crítico aislado $(0, 0)$ es inestable ya que se alejan de él órbitas que nacen cerca suyo.

La solución general de una ecuación lineal no homogénea con coeficientes constantes es $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + xe^x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Determinar la ecuación.

Solución. La solución de la ecuación homogénea se cosntruye a partir de las raices ± 1 de la ecuación característica que es

$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1 = 0,$$

por lo que la ecuación homogénea es

$$y'' - y = 0.$$

Por otra parte, derivamos dos veces la solución particular $y_p(x) = xe^x$, teniendo

$$y_p'(x) = (x+1)e^x,$$

$$y_p''(x) = (x+2)e^x,$$

y sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$(x+2)e^x - xe^x = 2e^x,$$

por lo que la ecuación no homogénea es

$$y'' - y = 2e^x.$$

Una central atómica produce energía a partir de la descomposición de un elemento radioactivo que se desintegra de manera proporcional a la cantidad de sustancia que hay en cada momento, de tal forma que 100 gramos pasan a 80 en una semana. Cuando la cantidad de sustancia radiactiva es de 50 gramos, empieza a introducirse en el reactor más cantidad de la misma de manera constante. Determinar la cantidad de debe echarse para que en el depósito la cantidad de sustancia radioactiva tienda a estabilizarse con el tiempo en 50 gramos.

Solución. Sea $x(t)$ la cantidad de sustancia radioactiva en cada instante de tiempo. Inicialmente

$$\begin{cases} x' = kx, \\ x(0) = 100, \ x(1) = 80. \end{cases}$$

La solución de la ecuación es

$$x(t) = ce^{kt},$$

y utlizando las condiciones iniciales

$$\begin{cases} x(0) = 100 = c, \\ x(1) = 80 = ce^k, \end{cases}$$

de donde $c = 100$ y $k = \log 0.8$, de donde

$$x(t) = 100e^{t \log 0.8}.$$

Una vez se introduce sustancia radiactiva la ecuación que lo modela es

$$x' = \log 0.8x + a,$$

donde a es una cantidad constante a detrminar. Proponemos la solución particular de la ecuación no homogénea $y_p(t) = A$, cuya derivada es nula y sustituyendo en la ecuación no homogénea

$$0 = A \log 0.8 + a,$$

de donde

$$A = -\frac{a}{\log 0.8},$$

y la solución general de la ecuación no homogénea es

$$x(t) = ce^{t \log 0.8} - \frac{a}{\log 0.8},$$

y calculando el límite

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \left(ce^{t \log 0.8} - \frac{a}{\log 0.8} \right) = -\frac{a}{\log 0.8} = 50,$$

de donde

$$a = -50 \log 0.8 \approx 11.1572 \text{ gramos}.$$

Calcular la estabilidad del punto crítico $(0,0)$ de sistema

$$\begin{cases} x' = -\varepsilon(x - y^2) - y, \\ y' = \varepsilon(x + xy), \end{cases}$$

en función del parámetro $\varepsilon \geq 0$.

Solución. El jacobiano del sistema es

$$\mathbf{Jf}(x,y) = \begin{pmatrix} -\varepsilon & -1 + 2\varepsilon y \\ \varepsilon(1+y) & \varepsilon x \end{pmatrix},$$

y así

$$\mathbf{Jf}(0,0) = \begin{pmatrix} -\varepsilon & -1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios se obtienen de la ecuación

$$p(t) = \begin{vmatrix} -\varepsilon - t & -1 \\ \varepsilon & -t \end{vmatrix} = t^2 + \varepsilon t + \varepsilon = 0,$$

de donde

$$t = \frac{-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4\varepsilon}}{2}.$$

Se distinguen entonces los siguientes casos:

- Si $\varepsilon^2 - 4\varepsilon \geq 0$, esto es $\varepsilon \geq 4$, entonces los valores propios son reales teniéndose que como $-\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4\varepsilon} < 0$, ambos son negativos y por tanto el punto crítico es hiperbólico. Por el teorema de Hartmen–Grobman concluimos que el punto crítico es asintóticamente estable.

- Si $\varepsilon^2 - 4 < 0$, esto es $\varepsilon < 4$, entonces los valores propios son complejos conjugados siendo la parte real $-\varepsilon/2$. Si $\varepsilon > 0$, la parte real es positiva y por tanto el punto crítico es hiperbólico. Por el teorema de Hartmen–Grobman concluimos que el punto crítico es asintóticamente estable. Si $\varepsilon = 0$, el sistema se escribe como

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 0, \end{cases}$$

y su valor propio es 0, de multiplicidad dos. Calculamos el subespacio propio mediante el sistema

$$\mathbf{Jf}(0,0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de donde

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{Jf}(0,0)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\},$$

cuya dimensión es uno. Entonces el punto crítico es inestable.

Capítulo 33

6–9–2007

Enunciado

1. Dada $\mathbf{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{f}(x,y,z)=(2x+y+z,x+2y+z,3x+3y+2z)$, se pide:

    (a) **(2.5 puntos)** Hallar la matriz $\mathbf{A}$ de $\mathbf{f}$ en la base canónica y las ecuaciones, bases y dimensiones del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$.

    (b) **(2.5 puntos)** Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B}=\{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,0)\}$.

    (c) **(2.5 puntos)** Determinar si la matriz $\mathbf{A}$ es diagonalizable y en caso afirmativo encontrar su forma diagonal y la matriz de cambio.

    (d) **(2.5 puntos)** Explica qué es el polinomio característico de una matriz cuadrada y qué tiene que cumplir ésta para que sea diagonalizable.

2. **(5 puntos)** Sean $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y $\mathcal{W}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y=0\}$. Determinar la expresión analítica de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathcal{W}$.

3. (**5 puntos**) Dos empresas de autobuses ofrecen un mismo servicio de tal manera que cada usuario puede elegir con qué compañía hace el viaje. Cada vez que se hace un viaje la mitad de los que lo hacen con la primera compañía deciden cambiar y hacerlo con la segunda la siguiente vez. Sólo 1 de cada 3 de los que viajan con la segunda volverán a repetir la siguiente vez. Si el número de usuarios es constante e igual a 10000 y la cuarta parte eligió para viajar por vez primera a la primera compañía, determinar cuál será el número de viajeros de cada compañía cuando el número de viajes es suficientemente grande (tiende a infinito).

4. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales y problemas de condiciones iniciales:

    (a) **(2.5 puntos)** $y'+xy=x$, $y(0)=1$.

    (b) **(2.5 puntos)** $y''-y'+y=2x^2$, $y(0)=y'(0)=0$.

    (c) **(5 puntos)** $\left\{\begin{array}{l} x'=x-y\\ y'=5x-y\\ z'=2z\end{array}\right\}$

5. **(5 puntos)** Esbozar el diagrama de fases del siguiente sistema autónomo

$$\left\{\begin{array}{l} x'=x+2y,\\ y'=2x+4y,\end{array}\right.$$

y determinar la estabilidad de sus puntos críticos.

6. **(5 puntos)** Determinar la familia de curvas del plano que cumplen que la distancia del origen de coordenas al punto de corte de la recta tangente en cada punto con el eje Y coincide con la distancia del origen de coordenadas al punto de corte de la recta normal en cada punto con el eje X. (**Ayuda**: el cambio de variable dependiente $v = y/x$ transforma una ecuación homogénea de orden uno $y' = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ en una ecuación de variables separables).

Examen resuelto

Dada $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{f}(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, 3x + 3y + 2z)$, se pide:

(a) Hallar la matriz $\mathbf{A}$ de $\mathbf{f}$ en la base canónica y las ecuaciones, bases y dimensiones del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$.

(b) Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$.

(c) Determinar si la matriz $\mathbf{A}$ es diagonalizable y en caso afirmativo encontrar su forma diagonal y la matriz de cambio.

(d) Explica qué es el polinomio característico de una matriz cuadrada y qué tiene que cumplir ésta para que sea diagonalizable.

Solución. (a) La matriz pedida es

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(\mathbf{f}) = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

siendo $\mathcal{C} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Para calcular el núcleo planteamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y procedemos a resolverlo para simplificarlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \to_{F_3 - F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to_{F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

por lo que

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0,\ 3y + z = 0\}.$$

En ecuaciones paramétricas se escribe como

$$\begin{cases} x = -\lambda/3, \\ y = -\lambda/3, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = \lambda, \end{cases}$$

y por tanto

$$(x, y, z) = -\frac{\lambda}{3}(1, 1, -3),\ \lambda \in \mathbb{R},$$

y una base del núcleo será $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(\mathbf{f})} = \{(1, 1, -3)\}$ y su dimensión $\dim \mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = 1$.

La dimesión de la imagen de $\mathbf{f}$ es

$$\dim \mathrm{Im}\, \mathbf{f} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = 3 - 1 = 2.$$

Para calcular sus ecuaciones hemos de tener en cuenta que $(x, y, z) \in \operatorname{Im}\mathbf{f}$ si y sólo si el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

tiene solución. Para ello, como el rango de $\mathbf{A}$ es dos, el rango de la matriz ampliada también ha de ser dos. Calculamos entonces el rango

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 3 & 3 & 2 & z \end{array}\right) \rightarrow_{F_3-F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-x-y \end{array}\right)$$

que tendrá rango dos si $x + y - z = 0$. Por lo tanto

$$\operatorname{Im}\mathbf{f} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}.$$

Las ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = \mu - \lambda, \\ y = \lambda, & \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\ z = \mu, \end{cases}$$

por lo que

$$(x, y, z) = \mu(1, 0, 1) - \lambda(1, -1, 0),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

y obtenemos la base $\mathcal{B}_{\operatorname{Im}\mathbf{f}} = \{(1, 0, 1), (1, -1, 0)\}$.

(b) Las ecuaciones de cambio de base son

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CC}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}),$$

donde

$$\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y $\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{CB}}(\mathbf{i})]^{-1}$, que a continuación calculamos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow_{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow_{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow_{F_2-F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow_{F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

de donde

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BC}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathbf{M}_{\mathcal{BB}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -2 & -3 & -2 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

(c) El polinomio característico es

$$p(t)=\begin{vmatrix} 2-t & 1 & 1 \\ 1 & 2-t & 1 \\ 3 & 3 & 2-t \end{vmatrix}=-t^3+6t^2-5t,$$

que al igualarlo a cero nos da las raíces $t_1=0$, $t_2=1$ y $t_3=5$. Al tener tres valores propios distintos la matriz $\mathbf{A}$ es diagonalizable. Calculamos los subespacios propios. El primero es $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})=\mathrm{Ker}(\mathbf{f})=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y+z=0,\ 3y+z=0\}$ que tiene por base $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(\mathbf{A})}=\{(1,1,-3)\}$. Para calcular el segundo tomamos el sistema

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I}_2)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que resolvemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)\to_{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-3F_1}}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

por lo que

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-\mathbf{I}_2)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y+z=0,\ z=0\},$$

que tiene por ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x=-\lambda, \\ y=\lambda, \qquad \lambda\in\mathbb{R}, \\ z=0, \end{cases}$$

y

$$(x,y,z)=-\lambda(1,-1,1),\quad \lambda\in\mathbb{R},$$

por lo que una base es $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-\mathbf{I}_2)}=\{(1,-1,0)\}$. Respecto al valor propio 5, tenemos que

$$(\mathbf{A}-5\mathbf{I}_2)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que al resolverlo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)\to_{F_1\times F_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)\to_{\substack{F_2+3F_1 \\ F_3-3F_1}}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 4 & 0 \\ 0 & 12 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to_{F_3+\frac{3}{2}F_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),\to_{-\frac{1}{4}F_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

de donde

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-5\mathbf{I}_2)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-3y+z=0,\ 2y-z=0\},$$

cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x=\lambda/2, \\ y=\lambda/2, \quad \lambda\in\mathbb{R}, \\ z=\lambda, \end{cases}$$

y

$$(x,y,z)=\frac{\lambda}{2}(1,1,2),\ \lambda\in\mathbb{R},$$

y una base es $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-5\mathbf{I}_2)}=\{(1,1,2)\}$. Entonces $\mathcal{B}=\{(1,1,-3),(1,-1,0),(1,1,2)\}$ es una base de vectores propios. Así

$$\mathbf{A}=\mathbf{P}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}\cdot\mathbf{P}^{-1},$$

siendo

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\-3&0&2\end{pmatrix}$$

y calculamos $\mathbf{P}^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&-1&1&0&1&0\\-3&0&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_2-F_1\\F_3+3F_1}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&-2&0&-1&1&0\\0&3&5&3&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[-\frac{1}{2}F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&3&5&3&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3-3F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&5&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&1\end{array}\right)\xrightarrow[\frac{1}{5}F_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1&\frac{3}{10}&\frac{3}{10}&\frac{1}{5}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1-F_2\\F_1-F_3}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}\\0&1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1&\frac{3}{10}&\frac{3}{10}&\frac{1}{5}\end{array}\right),$$

de donde

$$\mathbf{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\\frac{3}{10}&\frac{3}{10}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\3&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\-3&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\\frac{3}{10}&\frac{3}{10}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

(d) Teoría.

Sean $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y $\mathcal{W}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x+2y=0\}$. Determinar la expresión analítica de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathcal{W}$.

Solución. Es fácil ver que una base de $\mathcal{W}$ es $\mathcal{B}=\{(2,-1,0),(0,0,1)\}$, que además es ortogonal. Para conseguir una base ortonormal dividimos los vectores de $\mathcal{B}$ por su norma y obtenemos $\mathcal{N}=\{(2\sqrt{5}/5,-\sqrt{5}/5,0),(0,0,1)\}$. La proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathcal{W}$ es la aplicación lineal $\mathbf{p}$ tal que para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ verifica que

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(x,y,z)&=<(x,y,z),(2\sqrt{5}/5,-\sqrt{5}/5,0)>(2\sqrt{5}/5,-\sqrt{5}/5,0)+<(x,y,z),(0,0,1)>(0,0,1)\\&=\left(\frac{4x-2y}{5},\frac{y-2x}{5},z\right).\end{aligned}$$

Dos empresas de autobuses ofrecen un mismo servicio de tal manera que cada usuario puede elegir con qué compañía hace el viaje. Cada vez que se hace un viaje la mitad de los que lo hacen con la primera compañía deciden cambiar y hacerlo con la segunda la siguiente vez. Sólo 1 de cada 3 de los que viajan con la segunda volverán a repetir la siguiente vez. Si el número de usuarios es constante e igual a 10000 y la cuarta parte eligió para viajar por vez primera a la primera compañía, determinar cuál será el número de viajeros de cada compañía cuando el número de viajes es suficientemente grande (tiende a infinito).

Solución. Llamemos x_n e y_n al número de pasajeros en el viaje n que eligen la primera y segunda empresa, respectivamente. Se tiene entonces que

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{2}{3}y_{n-1},$$

e

$$y_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{3}y_{n-1},$$

que en forma matricial se escribe

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Se tiene

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2500 \\ 7500 \end{pmatrix},$$

e inducivamente obtenemos que

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 2500 \\ 7500 \end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces que calcular la potencia n–ésima de la matriz del sistema. Para ello calculamos los valores propios por medio del polinomio característico

$$p(t) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - t & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} - t \end{vmatrix} = t^2 - \frac{5}{6}t - \frac{1}{6} = 0,$$

de donde

$$t = \frac{\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{2}{3}}}{2} = \frac{\frac{5}{6} \pm \frac{7}{6}}{2}$$

y tenemos las raíces $t_1 = 1$ y $t_2 = -1/6$, que serán los valores propios de la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Calculamos los subespacios propios

$$\operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x - 4y = 0\}$$

y

$$\operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\},$$

por lo que una base de vectores propios será $\mathcal{B} = \{(4,3),(2,-1)\}$. Entonces

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1},$$

siendo

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

y calculamos su inversa

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to_{F_2-\frac{3}{4}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array}\right) \to_{F_1+\frac{4}{5}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array}\right)$$
$$\to_{\substack{\frac{1}{4}F_1 \\ -\frac{2}{5}F_2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} & \frac{-2}{5} \end{array}\right),$$

por lo que

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix},$$

y entonces

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+3\left(-\frac{1}{6}\right)^n}{5} & \frac{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n}{5} \\ \frac{6-6\left(-\frac{1}{6}\right)^n}{5} & \frac{3+2\left(-\frac{1}{6}\right)^n}{5} \end{pmatrix},$$

y así

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+3\left(-\frac{1}{6}\right)^n}{5} & \frac{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n}{5} \\ \frac{6-6\left(-\frac{1}{6}\right)^n}{5} & \frac{3+2\left(-\frac{1}{6}\right)^n}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2500 \\ 7500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2500 \\ 7500 \end{pmatrix}$$

y finalmente

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n &= 2500, \\ \lim_{n\to\infty} x_n &= 7500. \end{aligned}$$

Resolver

$$y' + xy = x,$$

con la condición inicial $y(0) = 1$.

Solución. Hay dos maneras de hacer el ejercicio. La primera, más directa y rápida consiste en escribir la ecuación como

$$y' = x(1-y), \tag{33.1}$$

y darse cuenta que $y = 1$ anula la parte derecha de la igualdad. Por lo tanto $y(x) = 1$ es una solución singular que cumple la condición inicial y por tanto la solución.

La segunda forma es resolviendo la ecuación (33.1) haciendo

$$\frac{y'}{1-y} = x,$$

e integrando obtenemos

$$\log(1 - y(x)) = \frac{x^2}{2} + c.$$

de donde

$$y(x) = 1 - ke^{x^2/2}.$$

Imponiendo la condición inicial $y(0) = 1$ tenemos que

$$1 = 1 - k,$$

de donde $k = 0$ y la solución de la ecuación es $y(x) = 1$.

Resolver

$$\begin{cases} y'' - y' + y = 2x^2, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Solución. Empezamos por resolver la ecuación homogénea

$$y'' - y' + y = 0.$$

Para ello, planteamos la ecuación característica

$$x^2 - x + 1 = 0,$$

que tiene por soluciones

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2},$$

por lo que la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h(x) = c_1 e^{t/2} \cos\left(t\sqrt{3}/2\right) + c_2 e^{t/2} \sin\left(t\sqrt{3}/2\right).$$

Proponemos ahora una solución particular de la ecuación no homogénea de la forma $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$. Dado que $y_p'(x) = 2Ax + B$ e $y_p''(x) = 2A$, se tiene que al sustituir en la ecuación no homogénea

$$2A - 2Ax - B + Ax^2 + Bx + C = Ax^2 + (B - 2A)x + 2A - B + C = x^2,$$

e igualando coeficientes tenemos el sistema

$$\begin{cases} A = 1, \\ B - 2A = 0, \\ 2A - B + C = 0, \end{cases}$$

que nos proporciona las soluciones $A = 1$, $B = 2$ y $C = 0$, por lo que la solución general de la ecuación no homogénea será

$$y(x) = c_1 e^{t/2} \cos\left(t\sqrt{3}/2\right) + c_2 e^{t/2} \sin\left(t\sqrt{3}/2\right) + x^2 + 2x.$$

Finalmente, imponemos las condiciones iniciales para obtener las constantes c_1 y c_2. Para ello, derivamos en primer lugar

$$y'(x) = \left(\frac{c_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2\right) e^{t/2} \cos\left(t\sqrt{3}/2\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c_1 + \frac{c_2}{2}\right) e^{t/2} \sin\left(t\sqrt{3}/2\right) + 2x + 2.$$

Entonces

$$y(0) = 0 = c_1,$$

e

$$y'(0) = 0 = \frac{c_1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 + 2,$$

de donde $c_1 = 0$ y $c_2 = -4\sqrt{3}/3$, y así la solución del problema de condiciones iniciales es

$$y(x) = -\frac{4\sqrt{3}}{3}e^{t/2} \sin\left(t\sqrt{3}/2\right) + x^2 + 2x.$$

Resolver

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = 5x - y, \\ z' = 2z. \end{cases}$$

Solución. Antes de aplicar ningún método, démonos cuenta que el sistema puede resolverse calculando x e y del sistema

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = 5x - y, \end{cases}$$

y la variable z de la ecuación $z' = 2z$. Esta última ecuación se resulve fácilemente dando por solución $z(t) = c_3 e^{2t}$. Así pues, sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

y calculemos la solución del sistema de orden dos dada por

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{t\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Para ello obtengamos el polinomio característico

$$p(t) = |\mathbf{A} - x\mathbf{I}_2| = \begin{vmatrix} 1-t & -1 \\ 5 & -1-t \end{vmatrix} = t^2 + 4,$$

con lo que la ecuación $t^2 + 4 = 0$ nos dará por soluciones $t = \pm 2i$. Calculemos ahora a_1 y a_2

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{a_1}{t-2i} + \frac{a_2}{t+2i} = \frac{(a_1 + a_2)t + 2i(a_1 - a_2)}{p(t)},$$

de donde igulando coeficientes tenemos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 = 0, \\ 2i(a_1 - a_2) = 1, \end{array} \right|$$

que nos da las soluciones $a_1 = 1/4i$ y $a_2 = -1/4i$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{p(t)}{t-2i} = t + 2i, \\ q_2(t) &= \frac{p(t)}{t+2i} = t - 2i. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^{i2t} a_1(\mathbf{A}) \cdot q_1(\mathbf{A}) + e^{-i2t} a_2(\mathbf{A}) \cdot q_2(\mathbf{A}) \\ &= e^{i2t} \frac{1}{4i} (\mathbf{A} + 2i\mathbf{I}_2) - e^{-i2t} \frac{1}{4i} (\mathbf{A} - 2i\mathbf{I}_2) \\ &= e^{i2t} \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} 1+2i & -1 \\ 5 & -1+2i \end{pmatrix} - e^{-i2t} \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} 1-2i & -1 \\ 5 & -1-2i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} e^{i2t} - e^{-i2t} + 2i(e^{i2t} + e^{-i2t}) & -(e^{i2t} - e^{-i2t}) \\ 5(e^{i2t} - e^{-i2t}) & -(e^{i2t} - e^{-i2t}) + 2i(e^{i2t} - e^{-i2t}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(2t) + \cos(2t) & -\frac{1}{2}\sin(2t) \\ \frac{5}{2}\sin(2t) & -\frac{1}{2}\sin(2t) + \cos(2t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(2t) + \cos(2t) & -\frac{1}{2}\sin(2t) \\ \frac{5}{2}\sin(2t) & -\frac{1}{2}\sin(2t) + \cos(2t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{c_1 - c_2}{2}\sin(2t) + c_1\cos(2t) \\ \frac{5c_1 - c_2}{2}\sin(2t) + c_2\cos(2t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Así la solución es

$$\begin{cases} x(t) = \frac{c_1 - c_2}{2}\sin(2t) + c_1\cos(2t), \\ y(t) = \frac{5c_1 - c_2}{2}\sin(2t) + c_2\cos(2t), \\ z(t) = c_3 e^{2t}. \end{cases}$$

Esbozar el diagrama de fases del siguiente sistema autónomo

$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + 4y, \end{cases}$$

y determinar la estabilidad de sus puntos críticos.

Solución. Calculamos en primer lugar los puntos críticos del sistema resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 2x + 4y = 0, \end{cases}$$

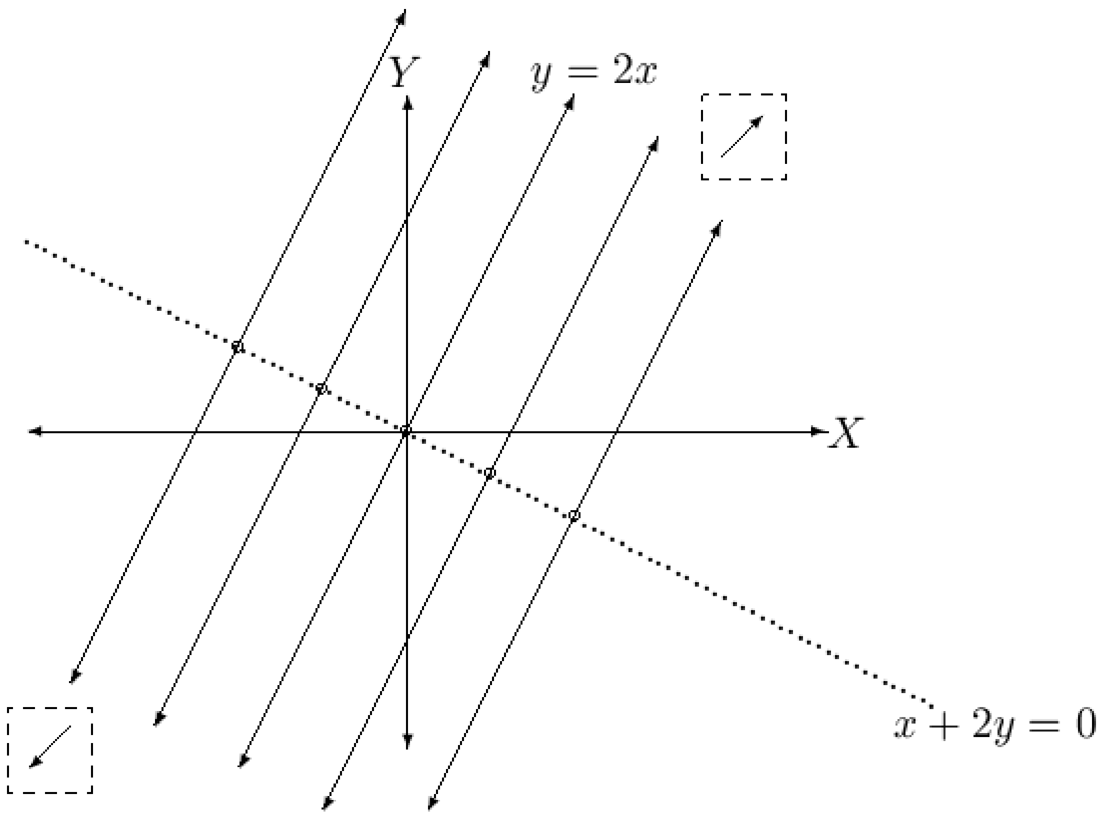
que nos proporciona la recta de soluciones $x + 2y = 0$, que obviamente será una recta de puntos críticos. Como el sistema es lineal, esta recta coincide con las dos isoclinas, por lo que dicha recta divide al plano en dos regiones donde el sentido del vector velocidad de las órbitas no variará. La primera región viene dada por la desigualdad $x + 2y > 0$, donde observamos que $x' > 0$ e $y' > 0$, por lo que el vector velocidad o tangente apuntará a la derecha y arriba. En la otra región dada por $x + 2y < 0$, tenemos que $x' < 0$ e $y' < 0$, por lo que ahora dicho vector tangente apuntará a la izquierda y hacia abajo. Finalmente, la integral primera vendrá dada por la ecuación

$$y' = \frac{2x + 4y}{x + 2y} = 2,$$

de donde será la famila de rectas paralelas

$$y = 2x + c.$$

Es claro que cada recta corta en un punto con la recta de puntos críticos, por lo que en cada integral primera hay tres órbitas: dos semirectas y un punto crítico. Toda esta información la resumimos en el siguiente diagrama



> Determinar la familia de curvas del plano que cumplen que la distancia del origen de coordenas al punto de corte de la recta tangente en cada punto con el eje Y coincide con la distancia del origen de coordenadas al punto de corte de la recta normal en cada punto con el eje X. (**Ayuda**: el cambio de variable dependiente $v = y/x$ transforma una ecuación homogénea de orden uno $y' = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ en una ecuación de variables separables).

Solución. Sean $y(x)$ la función que define la curva y (x, y) un punto arbitrario (x, y) de la misma. Tenemos entonces que la rectas tangentes y normal son

$$Y - y = y'(X - x)$$

y

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

respectivamente. Haciendo $X = 0$ obtenemos el punto de corte de la recta tangente con el eje Y, que es $Y_c = y - xy'$. Similarmente, si $Y = 0$, obtenemos el punto de corte de la recta normal con el eje X en el punto $X_c = x + yy'$. Las distancias del origen de coordenadas a estos puntos es Y_c y X_c, respectivamente, por lo que igualando ambas cantidades tenemos la ecuación

$$y - xy' = x + yy',$$

o equivalentemente

$$y' = \frac{y - x}{x + y},$$

que es una ecuación homogénea. Con el cambio de variable dependiente $z = y/x$ se tiene

$$y' = z'x + z = \frac{z - 1}{z + 1},$$

con lo que

$$-\frac{1 + z}{1 + z^2}z' = \frac{1}{x},$$

de donde por integración obtenemos

$$-\arctan z - \frac{1}{2}\log(1 + z^2) = \log x + c.$$

Deshaciendo el cambio anterior obtenemos la familia de curvas

$$-\arctan\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right) = \log x + c.$$

Capítulo 34

16–2–2008

Enunciado

1. Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones:

   (a) (**1 punto**) Dada una aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, explicar qué es y cómo se calcula la matriz asociada a $\mathbf{f}$ en la base $\mathcal{B}$. Como aplicación obtener la matriz asociada a la base $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ de la aplicación lineal definida por

   $$\mathbf{f}(x,y,z) = (x - 2y - z, y - x, -y + z).$$

   (b) (**1 punto**) Obtener por un método distinto al anterior la matriz asociada a $\mathbf{f}$ en la base

   $$\mathcal{B}' = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}.$$

2. Determinar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

   (a) (**1 punto**) La matriz

   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

   es diagonalizable si y sólo si $a \neq 1$.

   (b) (**1 punto**) El subconjunto de las matrices de dos filas y dos columnas dado por $\mathcal{W} = \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : |\mathbf{A}| = 0\}$ es un subespacio vectorial.

   (c) (**1 punto**) El vector $(1,1,1)$ es la proyección ortogonal de $(1,2,3)$ sobre el subespacio $\mathcal{W} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\}$.

   (d) (**1 punto**) La aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{f}(x,y) = (x - 2y, y - x, -y)$ es sobreyectiva.

   (e) (**1 punto**) Los subespacios vectoriales

   $$\mathcal{W}_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$$

   y

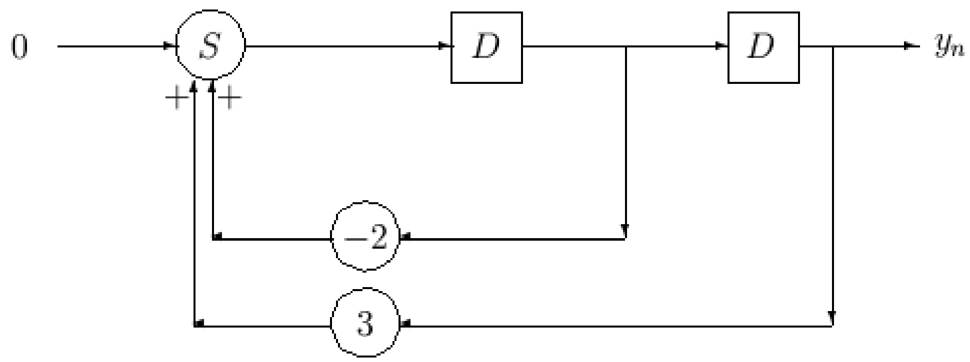
   $$\mathcal{W}_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0;\ z - t = 0\}$$

   son ortogonales.

(f) (**1 punto**) El conjunto $\mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy + z = 0\}$ es el núcleo de la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x - 2y + z, y - x, -y),$$

3. **(2 puntos)** Dado el sistema digital



comprobar que y_n puede calcularse a partir de la relación $y_{n+2} + 2y_{n+1} - 3y_n = 0$. Dadas las condiciones $y_0 = y_1 = 1$, obtener y_n.

Enunciado

Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones:

(a) Dada una aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, explicar qué es y cómo se calcula la matriz asociada a $\mathbf{f}$ en la base $\mathcal{B}$. Como aplicación obtener la matriz asociada a la base $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ de la aplicación lineal definida por

$$\mathbf{f}(x, y, z) = (x - 2y - z, y - x, -y + z).$$

(b) Obtener por un método distinto al anterior la matriz asociada a $\mathbf{f}$ en la base

$$\mathcal{B}' = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}.$$

Solución. (a) Qué es y cómo se calcula la matriz $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\mathbf{f})$ puede verse en la teoría. Calculemos la matriz en el ejemplo. Tomamos el primer vector de $\mathcal{B}$ y calculamos su imagen

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(1,0,0) &= (1,-1,0) = a_{11} \cdot (1,0,0) + a_{21} \cdot (1,1,0) + a_{31} \cdot (1,1,1) \\ &= (a_{11} + a_{21} + a_{31}, a_{21} + a_{31}, a_{31}), \end{aligned}$$

de donde construimos el sistema

$$\begin{cases} a_{11} + a_{21} + a_{31} = 1, \\ a_{21} + a_{31} = -1, \\ a_{31} = 0, \end{cases}$$

de donde fácilmente obtenemos $a_{31} = 0$, $a_{21} = -1$ y $a_{11} = 2$. Procedemos ahora con el segundo vector

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(1,1,0) &= (-1,0,-1) = a_{12} \cdot (1,0,0) + a_{22} \cdot (1,1,0) + a_{32} \cdot (1,1,1) \\ &= (a_{12} + a_{22} + a_{32}, a_{22} + a_{32}, a_{32}), \end{aligned}$$

de donde construimos el sistema

$$\begin{cases} a_{12} + a_{22} + a_{32} = -1, \\ a_{22} + a_{32} = 0, \\ a_{32} = -1, \end{cases}$$

de donde fácilmente obtenemos $a_{32} = -1$, $a_{22} = 1$ y $a_{12} = -1$. Finalmente, repetimos de nuevo con el tercer vector de $\mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(1,1,1) &= (-2,0,0) = a_{13} \cdot (1,0,0) + a_{23} \cdot (1,1,0) + a_{33} \cdot (1,1,1) \\ &= (a_{13} + a_{23} + a_{33}, a_{23} + a_{33}, a_{33}), \end{aligned}$$

de donde construimos el sistema

$$\begin{cases} a_{13} + a_{23} + a_{33} = -2, \\ a_{23} + a_{33} = 0, \\ a_{33} = 0, \end{cases}$$

de donde fácilmente obtenemos $a_{33} = 0$, $a_{23} = 0$ y $a_{13} = -2$. Así, la matriz pedida es

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Para calcular $\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(\mathbf{f})$ utilizamos la fórmula

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(\mathbf{f}) = \mathbf{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\mathbf{i}).$$

Calculamos $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\mathbf{i})$ a partir de los sistemas

$$\begin{aligned} (1,1,0) &= a_{11} \cdot (1,0,0) + a_{21} \cdot (1,1,0) + a_{31} \cdot (1,1,1) \\ &= (a_{11} + a_{21} + a_{31}, a_{21} + a_{31}, a_{31}), \end{aligned}$$

de donde construimos el sistema

$$\begin{cases} a_{11} + a_{21} + a_{31} = 1, \\ a_{21} + a_{31} = 1, \\ a_{31} = 0, \end{cases}$$

de donde fácilmente obtenemos $a_{31} = 0$, $a_{21} = 1$ y $a_{11} = 0$. Procedemos ahora con el segundo vector

$$\begin{aligned} (1,0,1) &= a_{12} \cdot (1,0,0) + a_{22} \cdot (1,1,0) + a_{32} \cdot (1,1,1) \\ &= (a_{12} + a_{22} + a_{32}, a_{22} + a_{32}, a_{32}), \end{aligned}$$

de donde construimos el sistema

$$\begin{cases} a_{12} + a_{22} + a_{32} = 1, \\ a_{22} + a_{32} = 0, \\ a_{32} = 1, \end{cases}$$

de donde fácilmente obtenemos $a_{32} = 1$, $a_{22} = -1$ y $a_{12} = 1$. Finalmente, repetimos de nuevo con el tercer vector de $\mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} (0,1,1) &= a_{13} \cdot (1,0,0) + a_{23} \cdot (1,1,0) + a_{33} \cdot (1,1,1) \\ &= (a_{13} + a_{23} + a_{33}, a_{23} + a_{33}, a_{33}), \end{aligned}$$

de donde construimos el sistema

$$\begin{cases} a_{13} + a_{23} + a_{33} = 0, \\ a_{23} + a_{33} = 1, \\ a_{33} = 1, \end{cases}$$

de donde fácilmente obtenemos $a_{33} = 1$, $a_{23} = 0$ y $a_{13} = -1$. Así, la matriz es

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La otra matriz de cambio de base es $\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\mathbf{i}) = [\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}(\mathbf{i})]^{-1}$. Calculamos entonces la inversa

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{F_1 \times F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow_{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\longrightarrow_{\frac{1}{2}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \longrightarrow_{F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$
$$\longrightarrow_{F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right),$$

por lo que

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(\mathbf{i}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

y así

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Determinar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

es diagonalizable si y sólo si $a \neq 1$.

(b) El subconjunto de las matrices de dos filas y dos columnas dado por $\mathcal{W} = \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : |\mathbf{A}| = 0\}$ es un subespacio vectorial.

(c) El vector $(1,1,1)$ es la proyección ortogonal de $(1,2,3)$ sobre el subespacio $\mathcal{W} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\}$.

(d) La aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{f}(x,y) = (x - 2y, y - x, -y),$$

es sobreyectiva.

(e) Los subespacios vectoriales

$$\mathcal{W}_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$$

y

$$\mathcal{W}_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0;\ z - t = 0\}$$

son ortogonales.

(f) El conjunto $\mathcal{W} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy + z = 0\}$ es el núcleo de la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (x - 2y + z, y - x, -y),$$

Solución. (a) Calculamos los valores propios

$$p(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 0 & a-t \end{vmatrix} = (1-t)(a-t) = 0,$$

de donde los valores propios son:

- Si $a \neq 1$, los valores propios son 1 y a, y por tanto la matriz es diagonalizable.
- Si $a = 1$, el único valor propio es 1, que es doble. Calculamos el subespacio propio asociado con el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix},$$

  por lo que $\mathrm{Ker}(\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, cuya base es $\mathcal{B}_1 = \{(1,0)\}$, por lo que la dimensión es uno y al no coincidir con la multiplicidad del valor propio la matriz no es diagonalizable.

Así, la afirmación es cierta.

(b) La afirmación es falsa. Tomemos las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como vemos $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{W}$ y sin embargo

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

y consecuentemente $\mathbf{A} + \mathbf{B} \notin \mathcal{W}$.

(c) Las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{W}$ es

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\lambda + 2\mu, \\ y = \lambda, \\ z = \mu, \end{array} \right. \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Entonces todo vector $(x, y, z) \in \mathcal{W}$ satisface que $(x, y, z) = \lambda(-1, 1, 0) + \mu(2, 0, 1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, por lo que una base es $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (2, 0, 1)\}$. Otenemos a partir de ésta una base ortogonal $\mathcal{O} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ donde $\mathbf{u}_1 = (-1, 1, 0)$ y

$$\mathbf{u}_2 = (2, 0, 1) - \frac{\langle(-1, 1, 0), (2, 0, 1)\rangle}{\langle(-1, 1, 0), (-1, 1, 0)\rangle} \cdot (-1, 1, 0) = (2, 0, 1) + (-1, 1, 0) = (1, 1, 1).$$

La base ortonormal $\mathcal{N} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, donde

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{||\mathbf{u}_1||} \cdot \mathbf{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1, 0)$$

y

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{||\mathbf{u}_2||} \cdot \mathbf{u}_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1).$$

La proyección ortogonal de $(1, 2, 3)$ sobre $\mathcal{W}$ es

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(1, 2, 3) &= \left\langle (1, 2, 3), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1, 0) \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1, 0) + \left\langle (1, 2, 3), \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1) \right\rangle \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1) \\ &= \frac{1}{2}(-1, 1, 0) + 2(1, 1, 1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 2\right) \neq (1, 1, 1), \end{aligned}$$

por lo que la afirmación es falsa.

(d) Partimos de la fórmula

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \operatorname{Ker}(\mathbf{f}) + \dim \operatorname{Im} \mathbf{f}.$$

Como $\dim \operatorname{Ker}(\mathbf{f}) \geq 0$, entonces $\dim \operatorname{Im} \mathbf{f} \leq 2 < 3$, por lo que $\operatorname{Im} \mathbf{f} \neq \mathbb{R}^3$ y la aplicación no es sobreyectiva y la afirmación es falsa.

(e) Las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{W}_1$ son

$$\begin{cases} x = -\lambda - \mu - \nu, \\ y = \lambda, \\ z = \mu, \\ t = \nu, \end{cases} \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R},$$

por lo que una base es $\mathcal{B}_{\mathcal{W}_1} = \{(-1,1,0,0), (-1,0,1,0), (-1,0,0,1)\}$. Las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{W}_2$ son

$$\begin{cases} x = \lambda, \\ y = \lambda, \\ z = \mu, \\ t = \mu, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

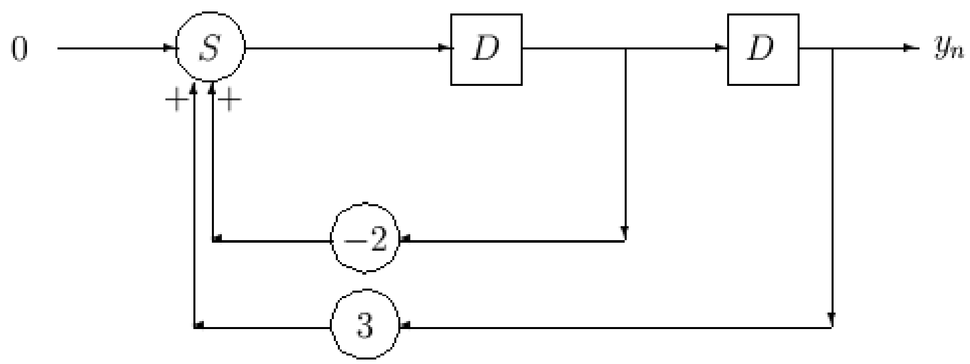
por lo que una base es $\mathcal{B}_{\mathcal{W}_1} = \{(1,1,0,0), (0,0,1,1)\}$. Como

$$\langle(-1,0,1,0), (1,1,0,0)\rangle = -1 \neq 0$$

los subespacios no pueden ser ortogonales.

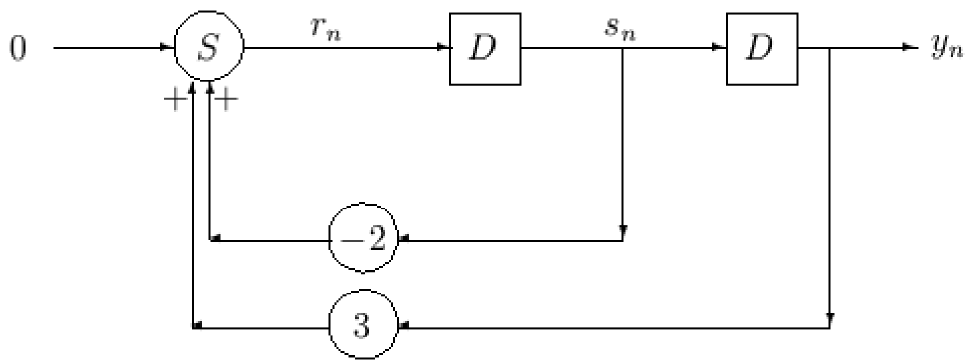
(f) Como $(1,0,0), (0,1,0) \in \mathcal{W}$, y sin embargo $(1,0,0) + (0,1,0) = (1,1,0) \notin \mathcal{W}$ ya que $1 \cdot 1 + 0 = 1$. Como $\mathcal{W}$ no es un subespacio vectorial no puede ser el núcleo de una aplicación lineal.

Dado el sistema digital



comprobar que y_n puede calcularse a partir de la relación $y_{n+2} + 2y_{n+1} - 3y_n = 0$. Dadas las condiciones $y_0 = y_1 = 1$, obtener y_n.

Solución. Consideremos el sistema



Como $r_n = -2s_n + 3y_n$, $s_n = y_{n+1}$ y $r_n = s_{n+1}$, se tiene que

$$y_{n+2} = s_{n+1} = r_n = -2s_n + 3y_n = -2y_{n+1} + 3y_n,$$

de donde se obtiene la ecuación pedida. Por otro lado,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_n \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ s_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{n+1} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ s_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{n+1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Calculamos los valores propios de la matriz. Para ello calculamos el polinomio característico

$$p(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ 3 & -2-t \end{vmatrix} = t^2 + 2t - 3 = 0,$$

de donde

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = -1 \pm 2,$$

por lo que los valores propios son -3 y 1. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos sus subespacios propios con los sistemas

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{A} + 3 \cdot \mathbf{I}_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y \\ 3x+y \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{A} - \mathbf{I}_2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y \\ 3x-3y \end{pmatrix},$$

por lo que los subespacios propios son $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}+3\cdot\mathbf{I}_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x+y=0\}$ y $\mathrm{Ker}(\mathbf{A}-\mathbf{I}_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=y\}$. Las bases de dichos subespacios son $\mathcal{B}_{-3} = \{(1,-3)\}$ y $\mathcal{B}_1 = \{(1,1)\}$, y por tanto $\mathcal{B} = \{(1,-3),(1,1)\}$ es una base de vectores propios. Entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1}$$

donde

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

y calculando su inversa

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow_{F_2+3F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow_{\frac{1}{4}F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$
$$\rightarrow_{F_1-F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right),$$

por lo que

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ s_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{n+1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-3)^{n+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo que $s_{n+1} = s_n = 1$, es una sucesión constante.