ÁLGEBRA Y ECUACIONES DIFERENCIALES. Curso 2009/10.

Hoja 6: Espacio vectorial Euclídeo.

1. Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar estándar. Calcular:

   (a) El producto escalar de los vectores $(1, 3, -1)$ y $(1, -1, 1)$ así como el ángulo que forman.

   (b) Calcular el valor de α para que el vector $(\alpha, 1, 0)$ sea normal o unitario.

   (c) Calcular el valor de α para que los vectores $(\alpha, 1, 0)$ y $(\alpha, -1, -1)$ sean ortogonales.

2. Sea $\mathbb{R}^3$ el espacio vectorial de dimensión 3 dotado del producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$. Sea la base canónica $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, se pide:

   (a) Calcular α para que el ángulo formado por los vectores $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \alpha\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ y $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ sea de $\dfrac{\pi}{3}$ radianes.

   (b) Calcular α para que el módulo del vector $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 + \alpha\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ sea 49.

   (c) Calcular todos los vectores que están a una distancia euclídea igual a 3 del vector $\mathbf{u} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$.

   (d) Calcular α para que los vectores $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{e}_1 + (\alpha - 1)\mathbf{e}_2 + \alpha\mathbf{e}_3$ y $\mathbf{v} = 2\alpha\mathbf{e}_1 + \alpha\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$ sean ortogonales.

3. Demostrar

   (a) *Teorema de Pitágoras.* Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos vectores ortogonales del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. Entonces
   $$\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|^2 = \| \mathbf{u} \|^2 + \| \mathbf{v} \|^2 .$$

   (b) *Ley del Paralelogramo.* Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos vectores cualesquiera del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, entonces
   $$\| \mathbf{u} + \mathbf{v} \|^2 + \| \mathbf{u} - \mathbf{v} \|^2 = 2 \| \mathbf{u} \|^2 + 2 \| \mathbf{v} \|^2 .$$

4. Probar que si $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ son vectores ortogonales de un espacio vectorial euclídeo, entonces forman un sistema linealmente independiente. ¿Es cierto el recíproco?

5. Obtener en el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, \langle\rangle)$ donde $\langle\rangle$ es el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$, una base ortonormal aplicando el *Método de Gram-Schmidt* a las bases

   (a) $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0),\ (1, 0, 1),\ (0, 1, 1)\}$.

   (b) $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

   (c) $\mathcal{B} = \{(2, 1, 0), (-1, 1, 1), (1, 0, 3)\}$.

6. Consideremos $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual. Se pide hallar una base ortonormal de los siguientes subespacios vectoriales:

   (a) $\mathcal{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\}$.

   (b) $\mathcal{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0;\ z + t = 0\}$.

   (c) $\mathcal{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = 0;\ z = 0\}$.

   (d) $\mathcal{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = 0\}$.

7. Obtener la forma diagonal de las siguientes matrices simétricas, así como las matrices de cambio de base

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(c)}\ \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d)}\ \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{(e)}\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Sea $\mathcal{P}_2[x]$ el conjuto de polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales. Dados $\mathbf{p}(x), \mathbf{q}(x) \in \mathcal{P}_2[x]$, se define

$$< \mathbf{p}(x), \mathbf{q}(x) >= \int_{-1}^{1} x^4 \mathbf{p}(x)\mathbf{q}(x)dx.$$

Probar que $\langle *, * \rangle$ es un producto escalar. Dada la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$, obtener a partir de ella un base ortonormal de $\mathcal{P}_2[x]$ (usando el producto escalar anterior).

9. Sea $\mathcal{P}_3[x]$ el conjunto de los polinomios con coeficientes reales de grado a lo sumo tres. Definimos para todo $\mathbf{p}(x), \mathbf{q}(x) \in \mathcal{P}_3[x]$,

$$\langle \mathbf{p}(x), \mathbf{q}(x) \rangle := \int_{0}^{1} \mathbf{p}(x)\mathbf{q}(x)dx.$$

   (a) Comprobar que se trata de un producto escalar.
   (b) Obtener una base ortonormal a partir de la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$.
   (c) Calcular el valor del parámetro a para que los polinomios $ax^3 + x^2 + 1$ y $x + 1$ sean ortogonales.
   (d) Calcular el valor de a para que $ax^2 + 1$ sea normal o unitario.

10. Dado el plano real $\mathbb{R}^2$ y el producto escalar usual calcular la *proyección ortogonal del vector* $(1, 1)$ sobre los subespacios generados por los siguientes vectores:

$$\text{(a)}\ \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right). \quad \text{(b)}\ (-1, -1). \quad \text{(c)}\ (1, 0).$$

11. Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ sobre el que tenemos definido el producto escalar usual. Dados los siguientes subespacios $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$, calcular $\mathcal{S}^\perp$:

   (a) $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.
   (b) $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ y } x - y = 0\}$.
   (c) $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0 \text{ y } x - z = 0\}$.

12. Calcular las ecuaciones de las siguientes aplicaciones lineales $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

   (a) La proyección ortogonal de base $\{(x, y, z) : x = y = z\}$.
   (b) La proyección ortogonal con base $\{(x, y, z) : x = y\}$.
   (c) La proyección ortogonal cuya base es el subespacio ortogonal a $\{(x, y, z) : x = y = z\}$.

13. Obtener el núcleo, la imagen y los subespacios propios de las aplicaciones lineales del ejercicio anterior. ¿Qué conclusiones pueden obtenerse?

14. Hallar el polinomio de segundo grado que mejor aproxima la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en el intervalo $[-1,1]$ con la norma asociada al producto escalar de las funciones reales continuas definidas en $[-1,1]$ dado por

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_{-1}^{1} \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x)dx.$$

15. Se considera el espacio euclídeo $\mathcal{V}$ de las funciones reales continuas definidas sobre $[1,2]$, con el producto escalar $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle := \int_1^2 \mathbf{f}(x)\mathbf{g}(x)dx$.

    (a) Hallar el ángulo entre $\mathbf{f}(x) = 1$ y $\mathbf{g}(x) = x$.

    (b) ¿Para qué valores de a son ortogonales los vectores $x - a$ y $x + a$?

    (c) Sea $\mathcal{W}$ el subespacio de los polinomios reales de grado menor o igual que 2. Ortonormalizar la base de dicho subespacio $\{1, x, x^2\}$.

    (d) ¿Cuál es el polinomio de grado menor o igual que 2 que mejor aproxima la función $\mathbf{f}(x) = \log x$. (**Ayuda**: tener en cuenta que $\int_1^2 x^n \log x dx = \frac{2^{n+1}}{n+1}(\log 2 - \frac{1}{n+1}) - \frac{1}{(n+1)^2}$ para todo $n \geq 0$.)

16. Calcula la proyección ortogonal del vector $\mathbf{u} = (1, 1, -1)$ sobre $\mathcal{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - 2z = 0\}$.

17. Encuentra la expresión de la proyección ortogonal sobre la recta de $\mathbb{R}^3$ generada por el vector $(0, 1, 2)$.

18. Halla la distancia entre el vector $(1, 0, 2)$ y el plano $x - y - z = 0$.

19. Calcula la distancia entre el punto $(2, 2, 2)$ y el plano $x - y - z = 1$.

20. Dados un espacio vectorial eucídeo y un subespacio vectorial del mismo $\mathcal{W}$, se define la simetría ortogonal de base $\mathcal{W}$ como la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ such that $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ for $\mathbf{u} \in \mathcal{W}$ and $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$ for $\mathbf{u} \in \mathcal{W}^\perp$. El subespacio $\mathcal{W}^\perp$ se dirá dirección de la simetría. Se pide obtener las expresiones analíticas de las siguientes simetrías ortogonales:

    (a) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con base $\mathcal{W} = \{(x, y, z) : x + y - z = 0\}$.

    (b) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ con base $\mathcal{W} = \{(x, y, z, t) : x + y - z = 0,\ x = t\}$.

    (c) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con dirección $\mathcal{W} = \{(x, y, z) : -x + y + 2z = 0\}$.

    (d) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ con base $\mathcal{W} = \{(x, y, z) : x + y - z = 0,\ x - y + t = 0,\ 2x - z + t\}$.

21. Dado un espacio vectorial eucídeo se define la homotecia de razón $\alpha \in \mathbb{R}$ como la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ such that $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \alpha \cdot \mathbf{u}$ for $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$. Se pide obtener las expresiones analíticas de las siguientes homotecias ortogonales:

    (a) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con razón $1/2$.

    (b) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ con razón -1.

    (c) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con razón 2.

22. Obtener los valores propios y determinar si son diagonalizables las matrices respecto de las bases canónicas de las aplicaciones lineales de los ejercicios 20 y 21.

23. Obtener $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} \circ \mathbf{h}$ con $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplicaciones lineales, donde $\mathbf{f}$ es la proyección ortogonal de base $\mathcal{W} = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$, $\mathbf{g}$ es la homotecia de razón -1 y $\mathbf{h}$ es la simetría ortogonal de dirección $\mathcal{S} = \{(x, y, z) : z = y = z\}$.