ÁLGEBRA Y ECUACIONES DIFERENCIALES. Curso 2009/10.

Hoja 2: Sistemas de ecuaciones lineales.

1. Hallar todas las soluciones de los siguientes sistemas:

(a) $\begin{cases} -x+y-2z-t=0 \\ 2x-y+z-2t=2 \\ x+2y-z+t=3 \\ 3x+4y-3z-t=1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x+2y-3z=2 \\ -x+5y-4z=4 \\ x+7y-7z=7 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x-y=-1 \\ -x+y=1 \\ 2x-2y=-2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 4x-y+2z+t=0 \\ 2x+3y-z-2t=0 \\ 7y-4z-5t=0 \\ 2x-11y+7z+8t=0 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x-2y+3z=0 \\ 2x+5y+6z=0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+2y+3z=0 \\ 3x+2y+z=0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 2x+y+4z=0 \\ x-y+2z=4 \\ 2x+y-z=14 \\ 3x+z=18 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} x+2y-3z+16t=4 \\ y+2z-3t=6 \\ -x-y+z+9t=-2 \end{cases}$ (i) $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 2x+4y-6z=1 \\ -x-y+z=-2 \end{cases}$

2. Discutir y resolver según el valor de los parámetros que aparezcan:

(a) $\begin{cases} \alpha x+y+2z=0 \\ x+3y+z=0 \\ 3x+10y+4z=0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x-y+2z=1 \\ x+4y+z=\beta \\ 2x-5y+\alpha z=-2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2y-z=\alpha \\ 3x-2z=11 \\ y+z=6 \\ 2x+y-4z=\alpha \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x-y-z=3a \\ x-az=b \\ x-y+2z=7 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} 2\lambda x+\mu y+2z=1 \\ 2\lambda x+(2\mu-1)y+3z=1 \\ 2\lambda x+\mu y+(\mu+3)z=2\mu-1 \end{cases}$ (g) $\begin{cases} \alpha x+\beta y+z=1 \\ x+\alpha\beta y+z=\beta \\ x+\beta y+\alpha z=1 \end{cases}$

3. Discutir la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

   (a) Dado un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$, que admite solución única, entonces ésta es $\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b}$.

   (b) Si los sistemas $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}_1$ y $\mathcal{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}_2$ son compatibles, entonces lo es $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$ donde $\mathbf{b}=\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2$.

   (c) Un sistema con más ecuaciones que incógnitas es siempre incompatible.

   (d) Si un sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$ es compatible determinado, entonces $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada.

   (e) Si $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$ es un sistema incompatible con 5 ecuaciones y 4 incógnitas y el $r(\mathbf{A})=4$ entonces $r(\mathbf{A}|\mathbf{b})=5$.

4. Calcular las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones tanto por el método de Gauss, como por el método de Kramer (por determinantes).

(a) $\begin{cases} 8x+y+4z=9 \\ 5x-2y+4z=6 \\ x+y=1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 6x-y+3z=6 \\ -6x+8y=-10 \\ 2x-5y-z=4 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x-4y=5 \\ 7x-y-3z=8. \end{cases}$

5. Discutir los siguientes sistemas de ecuaciones según los valores de a y b:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{c} ax + 2z = 2 \\ 5x + 2y = 1 \\ x - 2y + bz = 3 \end{array} \right. \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{c} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{array} \right. \quad \text{(c)} \left\{ \begin{array}{c} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = b \\ x + y + az + t = b^2 \\ x + y + z + at = b^3 \end{array} \right.$$

6. Sea ω un número complejo raiz cúbica de la unidad. Discutir el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y + z = a \\ x + \omega y + \omega^2 z = b \\ x + \omega^2 y + \omega z = c \end{array} \right.$$

donde a, b, c son números reales.

7. La suma de las tres cifras de un número es igual a 6. La cifra de las centenas es igual a la suma de las cifras de unidad y decena. Si se invierte el orden de las cifras, el número disminuye en 198 unidades. Calcular dicho número.

8. Una empresa hortofructícola tiene tres factorías diferentes en Castellón, Valencia y Alicante. En la época de la naranja cada una de estas factorías se dedica a envasar tres variedades diferentes de naranjas: navalate, navel y satsuma. La capacidad de envasado de la factoría de Castellón es de 4000Kg. de navalate, 3000Kg. de navel y 5000Kg de satsuma, todo ello por hora. La de Valencia es de 1000Kg. por hora de las tres variedades de naranjas. La de Alicante es de 2000Kg. de navalate, 4000Kg. de navel y 3000Kg. se satsuma, también por hora. ¿Cuántas horas se debe trabajar en cada factoría para satisfacer los dos siguientes pedidos?

   (a) 19000Kg. de navalate, 25000Kg. de navel y 25000Kg. de satsuma

   (b) 13000Kg. de navalate, 16000Kg. de navel y 16000Kg. de satsuma.

9. Una empresa tiene dos tipos de procesos productivos: torno y fresadora. Cada uno de estos procesos se utiliza para fabricar tres tipos de productos A, B y C. Se dispone de 120 horas semanales de torno y de 260 horas de fresadora, y las necesidades asociadas a cada proceso, por unidad de producto, son las siguientes:

Producto	Torno	Fresadora
A	0.1h	0.20h
B	0.25h	0.30h
C	-	0.40h

   Si el beneficio unitario que se obtiene con la venta se los productos A, B y C es de 3, 5 y 4 unidades monetarias, respectivamente. ¿Cómo debe de distribuirse la producción semanal para obtener un beneficio de 3800 u.m., si se utilizan todos los recursos disponibles?

10. Una empresa se dedica a la fabricación de cuatro tipos de jabón. Desde la compra de materias primas hasta la disposición para la distribución se realizan las siguientes fases: I) se mezclan los dos tipos de materias primas utilizadas, grasa vegetal y sosa cáustica; II) se introduce la mezcla obtenida en unos moldes preparados al efecto; III) los bloques

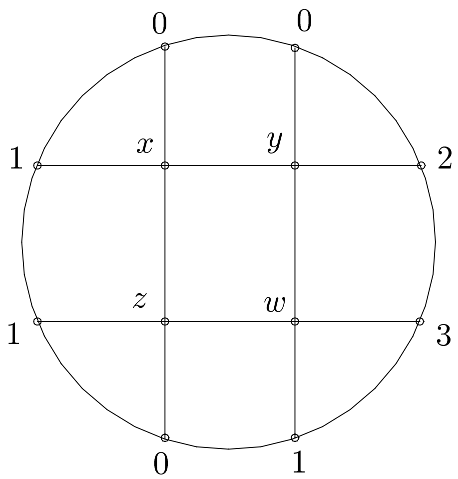
obtenidos en la fase anterior se cortan y troquean, y IV) las pastillas así obtenidas se envasan en cajas de cartón de doscientas unidades.

Los recursos necesarios para producir los cuatro tipos de jabones, por caja fabricada, vienen dados en la tabla siguiente:

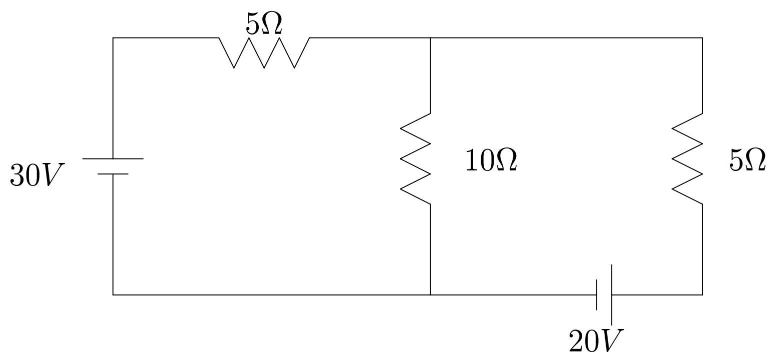
Jabón	Sección Kg. Grasa	Mezclado Kg. Sosa	S. Moldeado Hora/Máquina	S. Troquelado Hora/Máquina
J_1	20	10	10	3
J_2	25	15	8	4
J_3	40	20	10	7
J_4	50	22	15	20

Si se dispone durante una semana de 1970 Kg. de grasa vegetal, 970 Kg. de sosa cáustica, 601 hora/máquina en la sección de moldeado y de 504 horas/máquina en la sección de troquelado, ¿cuántas cajas de jabones de cada tipo se pueden producir, utilizando todos los recursos disponibles, en una semana?

11. En una placa circular se ha establecido un mallado como el que se indica en el dibujo. Sabiendo las temperaturas en los puntos de la malla situados en el borde y que la temperatura en los demás puntos es igual a la media de la temperatura en los cuatro puntos adyacentes, calcula la temperatura en todos los puntos del mallado.



12. La ley de corriente de Kirchhoff dice que la suma algebraica de todas las corrientes que confluyen en un nudo de un circuito es nula. La ley de Ohm dice que la corriente a través de una resistencia entre dos nudos es el cociente entre la diferencia de voltaje entre cada nudo y el valor de la resistencia Dado el circuito de la figura, calcular las intensidades y los voltajes en cada nudo.



13. Un agricultor produce maíz, trigo y cebada en las 12 hanegadas de tierra que posee. Cada Kg. de cereal plantado precisa de una cierta cantidad de dinero y de un determinado número de horas de trabajo semanales para su cultivo. En la tabla siguiente se especifica el capital necesario (en miles de pesetas), el trabajo preciso (en horas semanales) y el beneficio que produce (en miles de pesetas) cada uno de los cereales:

	Capital	Trabajo	Beneficio
Maíz	36	6	40
Trigo	24	6	30
Cebada	18	2	20

Calcular cuántos Kg. deberá de cultivar de cada tipo de cereal para obtener un beneficio de 400 mil pesetas si dispone de 360.000 pesetas y decide trabajar 48 horas semanales.

14. Encontrar el polinomio de grado 2 cuya gráfica que pasa por los puntos (1,4), (2,9) y (3,8).

15. Encuentra un polinomio $p(x)$ que verifique que $p(0) = 1$, $p(1) = 0$, $p'(0) = -1$ y $p''(1) = 1$.

16. Halla la ecuación de una circunferencia que pase por los puntos $(0, 1)$, $(-1, 1)$ y $(1, 0)$.