ÁLGEBRA Y ECUACIONES DIFERENCIALES. Curso 2008/9.

Hoja 7: Ecuaciones diferenciales de orden uno y aplicaciones.

1. Verificar en cada caso que las siguientes funciones son solución de la ecuación diferencial correspondiente:

   (a) $y(x) = \dfrac{c}{\cos x}$ de $y' - y\tan x = 0$.
   (b) $x = y(x)\log y(x)$ de $y'(y+x) = y$.
   (c) $y(x) = \sqrt{x^2 - cx}$ de $\frac{1}{2}(x^2+y^2) - xyy' = 0$.
   (d) $x = y(x)\int_0^x \sin(t^2)dt$ de $y = xy' + y^2\sin(x^2)$.
   (e) $\arctan\frac{y}{x} - \log\left(c\sqrt{x^2+y^2}\right) = 0$ de $x + y - (x-y)y' = 0$.

2. Demostrar que los siguientes problemas de condiciones iniciales tienen solución única.

$$(a)\ \begin{cases} y' = x^2\sqrt{x^2+y^2} \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} y' = x^2 e^{yx} \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad (c)\ \begin{cases} y' = x\log(xy) \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

3. Resolver las siguientes ecuaciones de variables separables:

   (a) $3e^x\tan y + y'(2-e^x)\sec^2 y = 0$ (b) $(1+e^x)yy' = e^x$; $y(0) = 1$
   (c) $e^{-y}(1+y') = 1$ (d) $y'\sin x = y\log y$; $y(\pi/2) = e$
   (e) $y' = \cos(x+y)$ (f) $y' = e^{x+2y}$

4. Resolver las siguientes ecuaciones lineales:

   (a) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ (b) $y' - y = 2xe^{x+x^2}$
   (c) $y' + y\cos x = \sin x\cos x$; $y(0) = 1$ (d) $y' + 2y = x^2 + 2x$; $y(3) = 0$
   (e) $(a^2 - x^2)y' + 2xy = a^2$ (f) $x(x-1)y' + y = x^2(2x-1)$

   (g) $y' - 2xy = \cos x - 2x\sin x$ y tal que y es una función acotada cuando $x \to +\infty$.
   (h) $y'\sin x - y\cos x = \dfrac{-\sin^2 x}{x}$ e $y \to 0$ cuando $x \to +\infty$.

5. Resolver las siguientes ecuaciones exactas o buscando un apropiado factor integrante:

   (a) $\sin(xy) + xy\cos(xy) + x^2\cos(xy)y' = 0$ (b) $x + y^2 - 2yxy' = 0$
   (c) $x^2 + y - xy' = 0$ (d) $2xy\log y + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})y' = 0$
   (e) $2x + \dfrac{x^2+y^2}{x^2y} = y'\dfrac{x^2+y^2}{xy^2}$ (f) $1 - x^2y + x^2(y-x)y' = 0$
   (g) $3x + 2y + y^2 + (2x + 2xy + 5y^2)y' = 0$ (h) $x^3 + xy^2 + (x^2y + y^3)y' = 0$
   (i) $2xy + y^3 + (x^2 + 3xy^2)y' = 0$ (j) $x^2 + 2xy + (yx + 2x^2)y' = 0$

6. Una función $f(x,y)$ se dice homogénea de grado α si se cumple que $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$. Probar que las siguientes funciones son homogéneas.

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$ (b) $f(x,y) = x + y$ (c) $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 + 2y^3$

7. **Ecuaciones homogéneas**. Una ecuación diferencial se dice homogénea si es de la forma $y' = f(x,y)/g(x,y)$ donde $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado. Toda ecuación homogénea puede reducirse a una ecuación de variables separables introduciendo la nueva variable dependiente $v = y/x$. Utilizando este hecho resolver las siguientes ecuaciones homogéneas:

   (a) $y' = \dfrac{2xy}{3x^2 - y^2}$ (b) $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$ (c) $2xy'(x^2+y^2) = y(y^2+2x^2)$
   (d) $xy' = \sqrt{x^2-y^2} + y$ (e) $4x^2 - xy + y^2 = y'(xy - x^2 - 4y^2)$

8. **Ecuación de Bernuilli**. Una ecuación diferencial se dice de Bernuilli si puede escribirse en la forma $y' + f(x)y = q(x)y^{\alpha}$, $\alpha \neq 0$ o 1. Toda ecuación de Bernuilli puede escribirse como una ecuación lineal haciendo un cambio de variable en la variable dependiente $v = y^{1-\alpha}$. Utilizando este hecho, resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $xy' + y = y^2 \log x$ (b) $3xy' - 2y = x^3/y^2$ (c) $8xy' - y = -\dfrac{1}{y^3\sqrt{x+1}}$

(d) $x^2y' + 2x^3y = y^2(1+2x^2)$ (e) $(1+x^2)y' = xy + (xy)^2$ (f) $y' + \dfrac{y}{x+1} = -\dfrac{1}{2}(x+1)^3y^2$

9. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

(a) $y' = (x-y)^2 + 1$ (b) $y' + y\cos x = y^n \sin 2x;\ n \neq 1$
(c) $y - xy^2 \log x + xy' = 0$ (d) $y' - 1 = e^{x+2y}$
(e) $3y^2 - x + (2y^3 - 6xy)y' = 0$ (f) $x^2 + xy' = 3x + y'$
(g) $x^2 + y^2 - xyy' = 0$ (h) $\sqrt{1+x^2} + ny + \left(\sqrt{1+y^2} + nx\right)y' = 0;\ y(0) = n$
(i) $x - y^2 + 2xyy' = 0$ (j) $(x+1)y' = y - 1$
(k) $x^3 - 3xy^2 + (y^3 - 3x^2y)y' = 0$ (l) $2xy'' - y' = 3x^2$

Ayuda: Probar en (c) un factor integrante de la forma $\mu(x \cdot y)$. Probar en (e) un factor integrante de la forma $\mu(x + y^2)$.

10. Resolver los problemas de condiciones iniciales siguientes:

(a) $\begin{cases} x + y\cos x = -y'\sin x \\ y(\pi/2) = 2. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y' = \dfrac{y^3}{1-2xy^2} \\ y(0) = 1. \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x + ye^{-x}y' = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$ (d) $\begin{cases} \dfrac{2x}{y + x^2y} = y' \\ y(0) = 2. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$ (f) $\begin{cases} y' - y = 2xe^{2x} \\ y(0) = 1. \end{cases}$ (g) $\begin{cases} y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{\cos x}{x^2} \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$ (h) $\begin{cases} xy' + 2y = \sin x \\ y(\pi/2) = 1. \end{cases}$

11. Resolver los problemas de condiciones iniciales siguientes:

(a) $\begin{cases} y' = 2f(x)y^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y' - y = 2f(x)xe^{2x} \\ y(0) = 1. \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y' + \dfrac{2}{x}y = g(x)\dfrac{\cos x}{x^2} \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y' + 2y = h(x) \\ y(0) = 1, \end{cases}$

donde

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0, \\ 1 \text{ si } x \geq 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < \pi, \\ 1 \text{ si } x \geq \pi, \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0, \\ 1 \text{ si } 1 > x \geq 0, \\ x^2 \text{ si } x \geq 1. \end{cases}$$

12. Una bala se introduce en una tabla con una velocidad $v_0 = 200\,m/s$ y al atravesarla sale con una velocidad $v_1 = 80\,m/s$. Suponiendo que la resistencia de la tabla al movimiento de la bala es proporcional al cuadrado de la velocidad, hallar en cuánto tiempo atraviesa la tabla la bala.

13. El isótopo radioactivo del Torio 234 se desintegra a una rapidez proporcional a la cantidad existente en ese instante de tiempo. Si 100 miligramos de este material se reducen a 82.04 miligramos en un semana, ¿cuánto Torio tendremos al cabo de tres semanas? ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para que la cantidad de Torio se reduzca a la mitad?

14. Demostrar que la curva que posee la propiedad de que todas sus rectas normales pasan por un punto constante es una circunferencia.

15. Hallar las curvas que verifican cada una de las siguientes propiedades geométricas:

    a) La distancia de un punto de la curva al origen es igual a la longitud del segmento de la normal delimitado por el propio punto y el eje OX.

    b) La proyección sobre el eje OX de la parte de la normal en (x, y) delimitada por (x, y) y el eje OX es 1.

    c) La proyección sobre el eje OX de la parte tangente entre (x, y) y el eje OX tiene longitud 1.

16. Hallar las trayectorias ortogonales a las familias de curvas siguientes:

$$\text{(a) } x^2 + y^2 = c^2. \quad \text{(b) } y^2 = 4c(x + c). \quad \text{(c) } y = cx^4.$$

17. La ley de Malthus para el crecimiento de poblaciones establece que la variación de la cantidad de individuos de una población cerrada (sin inmigración ni emigración) en un instante t es proporcional a la cantidad de individuos en ese instante. La constante de proporcionalidad k a que hace alusión la ley se llama tasa de crecimiento. Si inicialmente había 100 individuos y al año había 150, estudiar cómo varía la población. Idem si al año había 90.

18. Una población crece según la ley de Malthus, pero la tasa de crecimiento varía periódicamente con el tiempo. Por ejemplo suponemos que dicha constante $k(t)$ puede adoptar la forma

$$k(t) = \sin t, \quad k(t) = \sin t + 2, \quad k(t) = \sin t - 2.$$

    Estudia en cada caso el comportamiento a largo plazo de la población.

19. Entre los alumnos de esta asignatura se extiende el rumor de que el examen de problemas va a ser muy difícil. Si hay 1000 alumnos de dicha asignatura y el rumor se extiende de manera proporcional al número de alumnos que todavía no lo han oído, ¿cuántos días tardarán en saberlo 950 alumnos sabiendo que a los dos días lo sabían 850 alumnos?

20. Un tanque contiene originalmente 400 litros de agua limpia. Entonces se vierte en el tanque agua que contiene 0.05 kilogramos de sal por litro a una velocidad de 8 litros por minuto, y se deja que la mezcla salga del tanque con la misma rapidez. Determinar la sal que habrá en el tanque después de 20 minutos.

21. Un tanque contiene inicialmente 1000 litros de solución salina que contiene 10 Kg. de sal. Otra solución salina que contiene 25 Kg. de sal por litro se vierte en el tanque a la razón de $10\,l/\,$mín mientras que simultaneamente, la solución bien mezclada sale del tanque a razón de $15\,l/\,$mín. Encontrar la cantidad de sal que hay en el tanque en un momento t.

22. De observaciones experimentales se sabe que la temperatura superficial de un objeto cambia con una rapidez proporcional a la diferencia de temperatura del objeto y su entorno. Este hecho es conocido como la ley de enfriamiento de Newton. Si la temperatura de una taza de café es de 95^0C recién servida, y al minuto se enfrió a 88^0C en un cuarto que está a 20^0C, ¿cuánto tiempo debe de transcurrir para que se enfríe hasta los 65^0C?

23. Un circuito eléctrico formado por una inducción $L = 1H$ y una resistencia $R = 2\Omega$ está sometido a una fuente externa de potencial igual a $E(t) = 10\text{sen}\,2t$. Halla la corriente $I(t)$ si en el instante inicial dicha corriente vale cero.