ÁLGEBRA Y ECUACIONES DIFERENCIALES. Curso 2009/10.

Hoja 5: Diagonalización de matrices cuadradas.

1. Hallar la forma diagonal, cuando sea posible, de las siguientes matrices, así como la matriz del cambio de base:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 5 \\ -6 & -5 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 \\ -18 & 0 & 3 \\ -21 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d)} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{(e)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(f)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada. Demostrar que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^t$ tienen el mismo polinomio característico y, por tanto, los mismos valores propios. ¿Tendrían los mismos vectores propios? Comprobarlo para la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada de orden n, invertible. Demostrar que si λ es un valor propio de $\mathbf{A}$, entonces λ^{-1} es un valor propio de $\mathbf{A}^{-1}$.

4. Sea $\mathbf{A}$ una matriz 3×3 con valores propios 1 doble y 2 simple. Si los subespacios de vectores propios son $\{(x, y, z) : x = y = z\}$ y $\{(x, y, z) : x = -y\}$, respectivamente, se pide:

   (a) ¿Es $\mathbf{A}$ diagonalizable?

   (b) Calcular el rango y el determinante de $\mathbf{A}$.

   (c) Calcular la matriz $\mathbf{A}$.

   (d) Dado $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, ¿cómo es el sistema de ecuaciones $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$?

5. Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal y $\mathbf{A}$ la matriz asociada a $\mathbf{f}$ en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$. Discutir la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

   (a) Si $\mathbf{f}$ es biyectiva, entonces $\lambda = 0$ es un valor propio de $\mathbf{A}$.

   (b) Si $\mathbf{f}$ no es sobre, entonces $\lambda = 0$ es un valor propio de $\mathbf{A}$.

6. Estudiar para qué valores de los parámetros las siguientes matrices son diagonalizables:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

7. Si $\mathbf{A}$ es diagonalizable, entonces existen matrices diagonal $\mathbf{D}$ e invertibe $\mathbf{P}$ tales que $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$. Observa que si n es un número natural, entonces $\mathbf{A}^n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{P}^{-1}$. Aplica este método para calcular la potencia n-ésima de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Sea $\mathbf{f}(x, y, z) = (4x - y,\ -6x + 6y + 3z,\ 3y)$ un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$. Dados los subespacios $\mathcal{S} =< (1, 1, 1) >$ y $\mathcal{T} =< (1, 1, 0) >$, calcular $\mathbf{f}(\mathcal{S})$ y $\mathbf{f}(\mathcal{T})$. Comentar los resultados obtenidos en términos de valores y vectores propios de $\mathbf{f}$.

9. Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal con matriz asociada respecto a la base canónica $\mathbf{A}$ y $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$ asociados a los valores propios distintos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Decidir cuales de las siguientes afirmaciones son ciertas.

   (a) El vector propio $\mathbf{u}$ tiene un único valor propio asociado.

   (b) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el vector $\alpha\mathbf{u}$ es un vector propio del valor propio λ.

   (c) Todo vector del núcleo de $\mathbf{f}$ es un vector propio.

   (d) El vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ es un vector propio de $\mathbf{f}$.

   (e) Si λ es un valor propio de $\mathbf{f}$, entonces λ^n es un valor propio de $\mathbf{f}^n$, donde $\mathbf{f}^n = \mathbf{f} \circ \mathbf{f} \circ .. \circ \mathbf{f}$ (n veces).

   (f) Una matriz tiene el valor propio 0 si y solo si su determinante es nulo.

   (g) Una matriz diagonalizable es invertible.

10. Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal de manera que $\mathbf{f} \circ \mathbf{f} = \mathbf{f}$. Calcular los valores propios de $\mathbf{f}$.

11. Calcular para las siguientes matrices los valores y vectores propios. Determinar si las matrices son o no diagonalizables y calcular la matriz diagonal en caso de serlo. Calcular además la base respecto de la cual la matriz es diagonal y dar la matriz de cambio de base:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -26 & -15 \\ 50 & 29 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (k) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -3 & 8 & 3 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$ (l) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(m) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (n) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ñ) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

12. Dada la sucesión de números reales definida por inducción como $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, calcular x_n y el límite de la misma cuando $n \to \infty$.

13. En un cierto pais existen dos compañías eléctricas, luces y sombras S. A. y luz a gogó S. A. Cada año uno de cada diez consumidores se cambia de compañía. Si la población del pais no crece ni disminuye e inicialmente hay 10 millones de abonados a la primera compañía y 15 millones a la segunda, predecir la evolución del mercado a largo plazo.

14. En una ciudad existen tres supermercados $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ que acaparan la totalidad de la población a la hora de comprar. Se ha observado que los compradores van cambiando año a año de supermercado según la siguiente ley: De los que compran en $\mathcal{A}$ un año vuelven al siguiente sólamente la mitad, mientras que la otra mitad pasa a comprar en $\mathcal{B}$. De los que compran en $\mathcal{B}$ la mitad permanece en $\mathcal{B}$, mientras que el resto compran el año siguiente en $\mathcal{C}$. Finalmente una cuarta parte de los compradores de $\mathcal{C}$ se cambian a $\mathcal{B}$, quedándose el resto en $\mathcal{C}$.

   (a) Si en un año determinado la mitad de la población compra en $\mathcal{A}$ y la otra mitad en $\mathcal{B}$, determinar cuál será la distribución el año siguiente.

(b) Determinar cuál es el comportamiento a largo plazo de los compradores de la ciudad.

15. Calcular las siguientes sucesiones:

(a) $\begin{cases} y_{n+2}+4y_{n+1}+3y_n=0 \\ y_0=0 \\ y_1=1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y_{n+2}+y_{n+1}-2y_n=0 \\ y_0=1 \\ y_1=2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y_{n+2}-4y_{n+1}-12y_n=0 \\ y_0=0 \\ y_1(0)=1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y_{n+2}-4y_{n+1}+3y_n=0 \\ y_0=0 \\ y_1=1 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} y_{n+2}-4y_{n+1}+y_n=0 \\ y_0=1 \\ y_1=0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} y_{n+2}-y_n=0 \\ y_0=1 \\ y_1=0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} y_{n+3}-2y_{n+2}-y_{n+1}+2y_n=0 \\ y_0=1 \\ y_1=0 \\ y_2=1 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} y_{n+2}-y_n=0 \\ y_0=1 \\ y_1=-1 \end{cases}$ (i) $\begin{cases} y_{n+2}-y_{n+1}-2y_n=0 \\ y_0=1 \\ y_1=-1 \end{cases}$

16. Obtener la solución de los siguientes circuitos digitales suponiendo condiciones iniciales nulas: