

ÁLGEBRA Y ECUACIONES DIFERENCIALES. Curso 2009/10.

HOJA 1: MATRICES Y DETERMINANTES.

1. Dadas las siguientes matrices realizar, si es posible, las operaciones que se indican:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2+i & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2+2i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & 1-i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \text{(a) } (2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}^t) \cdot \mathbf{C} \quad \text{(b) } \mathbf{C}^t \cdot \mathbf{A}^t - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})^t \quad \text{(c) } \mathbf{D} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{E} \quad \text{(d) } \mathbf{D} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{C}) \\ & \text{(e) } (\mathbf{C} - 2\mathbf{I}_3)^t \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{A}^t) \quad \text{(f) } \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{D} \quad \text{(g) } \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^t \cdot \mathbf{C} \quad \text{(h) } \mathbf{B}^t \cdot \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{D} \end{aligned}$$

2. Calcular el rango de las siguientes matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Determinar en función del parámetro real α el rango de las siguientes matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \alpha & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Determinar si las siguientes matrices son invertibles y calcular en caso afirmativo su matriz inversa

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{aligned} & \text{(a) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{(b) } \begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 6 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{(c) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \text{(d) } \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{(e) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} \quad \text{(f) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & -5 \\ 3 & -4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{(g) } \begin{vmatrix} 1 & 2i & 3i \\ 4 & 5-i & 6 \\ 7i & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \text{(h) } \begin{vmatrix} 3-i & 5 & 7 & 2 \\ 2-6i & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-i & 3 & 4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

6. Dada una matriz cuadrada $\mathbf{A}$, ¿qué valores puede tomar $|\mathbf{A}|$ si:

- (a) $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$?
- (b) $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}$?

7. Calcular el rango de la siguiente matriz en función de los valores de a y b :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

8. Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

- (a) Calcular las sucesivas potencias de $\mathbf{A}$.
- (b) Sea $\mathbf{B} = \mathbf{I}_4 + \mathbf{A}$, expresar $\mathbf{B}^n$ en función de $\mathbf{I}_4, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2$ y $\mathbf{A}^3$.
- (c) Demostrar que la inversa de $\mathbf{B}$ es $\mathbf{I}_4 - \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 - \mathbf{A}^3$.

9. Hallar la potencia n -ésima de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ poniendo $\mathbf{A} = \mathbf{I}_3 + \mathbf{B}$, siendo $\mathbf{B}$ una matriz a determinar.

10. Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

- (a) Hallar $3\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t - 2\mathbf{I}_2$.
- (b) Resolver la ecuación matricial $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ siendo $\mathbf{X} \in \mathbf{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

- 11. Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada tal que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. Si $\mathbf{B} = 2\mathbf{A} - \mathbf{I}_n$, demostrar que $\mathbf{B}^2$ es igual a $\mathbf{I}_n$.
- 12. Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada. Demostrar que las matrices $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t$ y $\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}$ son siempre simétricas.
- 13. Demostrar que si una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ verifica que $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - \mathbf{I}_2 = 0$, entonces existe la inversa de $\mathbf{A}$. Calcularla.

14. Se considera la matriz con coeficientes reales $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$. Demostrar que si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, entonces $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}$ para todo entero positivo.

15. De las afirmaciones siguientes, demostrar las verdaderas y dar un contraejemplo para las falsas:

- (a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B}^2$.
- (b) $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B})$.
- (c) $\mathbf{A}^{m+1} - \mathbf{I}_n = (\mathbf{A} - \mathbf{I}_n)(\mathbf{I}_n + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^m)$.
- (d) Si $\mathbf{P}$ es una matriz con determinante no nulo, entonces $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^{-1})^n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}^n \mathbf{P}^{-1}$.
- (e) Si $\mathbf{A}$ es antisimétrica, entonces $\mathbf{A}^2$ es simétrica.
- (f) Si $\mathbf{A}$ es antisimétrica y $\mathbf{B}$ es simétrica, entonces $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ es antisimétrica si y sólo si $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.
- (g) Si $|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = 0$, entonces $|\mathbf{A}| = 0$ ó $|\mathbf{B}| = 0$.
- (h) $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$.
- (i) $|2\mathbf{A}| = 2|\mathbf{A}|$.

16. Demostrar que si a, b, c son números reales se tiene que:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$$

17. Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} & \text{(b)} \quad & \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & 0 & 0 \\ b & 0 & x & 0 \\ c & 0 & 0 & x \end{vmatrix} & \text{(c)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \text{(d)} \quad & \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} & \text{(e)} \quad & \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} & \text{(f)} \quad & \begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

18. Calcular los siguientes determinantes de Vandermonde:

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} \quad V_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad V_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & b & c & d & \dots & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & \dots & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & \dots & x^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^5 & b^5 & c^5 & d^5 & \dots & x^5 \end{vmatrix}.$$

19. Resolver la ecuación $\Delta(x) = 0$, siendo $\Delta(X) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix}$, siendo a,b,c números reales.

20. Calcular los siguientes determinantes de orden n:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & n & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & n & \dots & n \\ n & n & 3 & n & \dots & n \\ n & n & n & 4 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & n & \dots & n \end{vmatrix} & \text{(b)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & -3 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0 \end{vmatrix} \\ \text{(c)} \quad & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2+a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2+a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2+a & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 2+a \end{vmatrix} & \text{(d)} \quad & \begin{vmatrix} n-1 & n & n & n & \dots & n \\ n & n-2 & n & n & \dots & n \\ n & n & n-3 & n & \dots & n \\ n & n & n & n-4 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & n & \dots & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

21. Demostrar que $\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos 2x \\ \cos x & \cos 2x & \cos 3x \\ \cos 2x & \cos 3x & \cos 4x \end{vmatrix} = 0$.