ÁLGEBRA Y ECUACIONES DIFERENCIALES. Curso 2008/9.

Hoja 10: Teoría Cualitativa de ecuaciones diferenciales.

1. Esbozar los diagramas de fases de las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\text{(a) } y' = y(y-1) \quad \text{(b) } y' = y^2(y+1) \quad \text{(c) } y' = y^2 - 1$$

$$\text{(d) } y' = \sqrt{y(y-2)} \quad \text{(e) } y' = y/(y-1) \quad \text{(f) } y' = \sqrt{1-y^2}$$

$$\text{(g) } y' = \frac{y}{y(y^2-4)} \quad \text{(h) } y' = \sin y \quad \text{(i) } y' = y^2 + 1$$

2. Dados los siguientes sistemas planos, calcular los puntos críticos de los mismos.

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x' = 3x + 2y \\ y' = 5x - 7y \end{array} \right. \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{c} x' = xy \\ y' = x - y \end{array} \right. \quad \text{(c)} \left\{ \begin{array}{c} x' = \sin y \\ y' = x + y^2 \end{array} \right.$$

$$\text{(d)} \left\{ \begin{array}{l} x' = x^2 + y^2 \\ y' = x^2 - y^2 \end{array} \right. \quad \text{(e)} \left\{ \begin{array}{l} x' = x + 2y \\ y' = x^2 - y \end{array} \right. \quad \text{(f)} \left\{ \begin{array}{c} x' = e^{xy} \\ y' = x + y^2 \end{array} \right.$$

3. Obtener las isoclinas y esbozar el diagrama de las direcciones del vector velocidad de las órbitas para los sistemas del ejercicio 2.

4. Esbozar el diagrama de fases de los siguientes sistemas planos:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x' = x \\ y' = 2y \end{array} \right. \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} x' = x \\ y' = 3x - 4y \end{array} \right. \quad \text{(c)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -2x + y \\ y' = -x + y \end{array} \right.$$

$$\text{(d)} \left\{ \begin{array}{l} x' = y(2-y) \\ y' = (x-2)(y-2) \end{array} \right. \quad \text{(e)} \left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = xy^2 \end{array} \right. \quad \text{(f)} \left\{ \begin{array}{l} x' = xy \\ y' = x^2 \end{array} \right.$$

5. Esbozar los diagramas de fases de los siguientes sistemas lineales, indicando a qué tipo corresponde:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x' = 2x - y, \\ y' = y. \end{array} \right. \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -x + 3y, \\ y' = 3x - y. \end{array} \right. \quad \text{(c)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -2x, \\ y' = x - y. \end{array} \right. \quad \text{(d)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -6x + 2y, \\ y' = 2x - 9y. \end{array} \right.$$

$$\text{(e)} \left\{ \begin{array}{l} x' = 8x - 3y, \\ y' = -2x + 13y. \end{array} \right. \quad \text{(f)} \left\{ \begin{array}{l} x' = x + 9y, \\ y' = 3x - 5y. \end{array} \right. \quad \text{(g)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -3x, \\ y' = -3y. \end{array} \right.$$

6. Esbozar los diagramas de fases de los siguientes sistemas indicando de qué tipo se trata

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -5x - y, \\ y' = x - 7y. \end{array} \right. \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -x - 2y, \\ y' = 5x + y. \end{array} \right. \quad \text{(c)} \left\{ \begin{array}{l} x' = 4x - 2y, \\ y' = x/2 + 2y. \end{array} \right. \quad \text{(d)} \left\{ \begin{array}{l} x' = x + y, \\ y' = -x + y. \end{array} \right.$$

$$\text{(e)} \left\{ \begin{array}{l} x' = x - 10y, \\ y' = 5x - y. \end{array} \right. \quad \text{(f)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -x + y, \\ y' = -x - y. \end{array} \right. \quad \text{(g)} \left\{ \begin{array}{l} x' = x + 5y, \\ y' = -5x + 7y. \end{array} \right. \quad \text{(h)} \left\{ \begin{array}{l} x' = 9x - y, \\ y' = x + 7y. \end{array} \right.$$

7. Esbozar los diagramas de los siguientes sistemas lineales planos degenerados:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x' = 2x + 2y, \\ y' = x + y. \end{array} \right. \quad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} x' = 0, \\ y' = x - y. \end{array} \right. \quad \text{(c)} \left\{ \begin{array}{l} x' = x + y, \\ y' = -x - y. \end{array} \right. \quad \text{(d)} \left\{ \begin{array}{l} x' = -x + y, \\ y' = x - y. \end{array} \right.$$

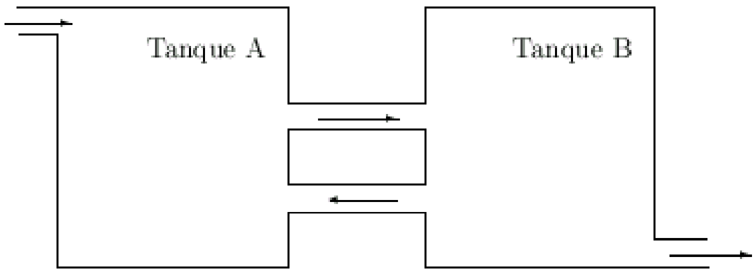
8. Esbozar los diagramas de fase de los siguientes sistemas lineales planos, indicando su tipo

$$\text{(a)} \begin{cases} x' = -x - 4y, \\ y' = -2x + y. \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} x' = 7x - 5y, \\ y' = 10x - 7y. \end{cases} \quad \text{(c)} \begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = 5x - 2y. \end{cases}$$

$$\text{(d)} \begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = -x + 2y. \end{cases} \quad \text{(e)} \begin{cases} x' = -7x + 2y, \\ y' = x - 8y. \end{cases} \quad \text{(f)} \begin{cases} x' = -x - y, \\ y' = x - 3y. \end{cases}$$

$$\text{(g)} \begin{cases} x' = x - 3y, \\ y' = -x - y. \end{cases} \quad \text{(h)} \begin{cases} x' = 2x - 2y, \\ y' = 2x - 2y. \end{cases} \quad \text{(i)} \begin{cases} x' = -2x + y, \\ y' = -x - 2y. \end{cases}$$

9. Dos tanques de 60 litros de capacidad están conectados entre sí y con el exterior según muestra la siguiente figura:



Del exterior fluye hacia el tanque A una disolución de agua salada con una concentración de $3\,kg/l$ a una velocidad de $4\,l/m$. A la misma velocidad sale el agua hacia el exterior por el tanque B. El líquido fluye del tanque A hacia el tanque B a $6\,l/m$ y del tanque B al tanque A a $2\,l/m$. Las disoluciones en ambos tanques están permanentemente bien agitadas. Inicialmente había $10\,kg$ de sal en el tanque A y no había sal en el B. Determinar cuáles son las cantidades de sal esperables cuando el tiempo es suficientemente grande.

10. Dados los siguientes sistemas lineales, decidir si son estables o no.

$$\text{(a)} \begin{cases} x' = x - 5y + 5z, \\ y' = -2x - 2y + 2z, \\ z' = 3x - 3y + 3z. \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} x' = -5x + y - z, \\ y' = -2x - 2y + 2z, \\ z' = -3x + 3y - 3z. \end{cases} \quad \text{(c)} \begin{cases} x' = -x - 2z, \\ y' = 3x - 2y, \\ z' = 4x + z. \end{cases}$$

$$\text{(d)} \begin{cases} x' = -9x + y - 2z, \\ y' = 3x - 9y, \\ z' = 4x + y + z. \end{cases} \quad \text{(e)} \begin{cases} x' = -5x + y - z, \\ y' = -3x - y + 3z, \\ z' = -4x + 4y - 2z. \end{cases} \quad \text{(f)} \begin{cases} x' = -2x - 2y + 2z, \\ y' = -2x - 2y + 2z, \\ z' = 0. \end{cases}$$

11. Obtener los puntos críticos de los siguientes sistemas y determinar si son o no hiperbólicos:

$$\text{(a)} \begin{cases} x' = x - xy \\ y' = -y + y^2 \end{cases} \quad \text{(b)} \begin{cases} x' = y \\ y' = -x + x^3 \end{cases} \quad \text{(c)} \begin{cases} x' = x - xy \\ y' = x - y \end{cases} \quad \text{(d)} \begin{cases} x' = y \\ y' = x^3 \end{cases}$$

$$\text{(e)} \begin{cases} x' = y - e^x \\ y' = y + e^{-x} \end{cases} \quad \text{(f)} \begin{cases} x' = -x \\ y' = 1 - x^2 - y^2 \end{cases} \quad \text{(g)} \begin{cases} x' = -x^2 + xy - x + y \\ y' = -x^2 + y^2 + x - 4y + 2 \end{cases}$$

12. Determinar las isoclinas de los sistemas del ejercicio 11, así como la dirección del vector velocidad a las órbitas en las regiones que las isoclinas determinan.

13. Obtener el sistema linealizado en los puntos críticos de los sistemas del ejercicio 11. Determinar su diagrama de fases e indicar si es posible la naturaleza del punto crítico en un entorno del mismo.

14. Esbozar el diagrama de fases de los siguientes sistemas no lineales:

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} x' = y(2-y) \\ y' = (x-2)(y-2) \end{array} \right. \qquad (b) \left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = xy^2 \end{array} \right. \qquad (c) \left\{ \begin{array}{l} x' = xy \\ y' = x^2 \end{array} \right.$$

15. Consideremos la ecuación de Van Der Pol

$$x'' + x - \varepsilon x'(1-x^2) = 0$$

donde ε es un parámetro real. Transformar dicha ecuación en un sistema plano y determinar los puntos críticos del mismo. Determinar la naturaleza de los puntos críticos en función del parámetro ε.

16. Idem para la ecuación $x'' + 2\varepsilon x' + (1-\varepsilon^2)x = 0$.

17. Sea el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x + (\varepsilon+1)y \\ y' = 2(\varepsilon-1)x + y \end{array} \right.$$

donde ε es un parámetro real. Se pide:

(a) Discutir la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema en función del parámetro ε.

(b) Esbozar el diagrama de fases del sistema para el valor $\varepsilon = 1$.

18. Sea el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = -x + 2x(x+y)^2 \\ y' = -y^3 + 2y^3(x+y)^2. \end{array} \right.$$

Determinar los puntos críticos del mismo y su hiperbolicidad. Determinar la naturaleza del punto crítico $(0,0)$ a partir de la función $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

19. Idem para el sistema $\left\{ \begin{array}{l} x' = y - xy^2 \\ y' = -x^3 \end{array} \right.$ y la función $V(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2$.

20. Idem con el sistema $\left\{ \begin{array}{l} x' = x^3 - x - y \\ y' = x \end{array} \right.$ y la función $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

21. Idem con el sistema $\left\{ \begin{array}{l} x' = x + x^2 + xy + y^2 \\ y' = x^2 + xy + y^2 \end{array} \right.$ y la función $V(x,y) = x^2 - y^2$ definida sobre el conjunto del plano real $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |y| < x\}$.

22. Consideremos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = y + \varepsilon(x^2+y^2) \\ y' = -x + \varepsilon(xy+y) \end{array} \right.$$

Se pide:

(a) Estudiar la estabilidad de los punto crítico del sistema $(0,0)$ en función del parámetro ε.

(b) ¿Pueden tender a $(0,0)$ una solución del sistema con $\varepsilon = 0$? ¿Puede tener módulo arbitrariamente grande? Razona tus respuestas.

23. Dado el sistema homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = y^2 - xy, \\ y' = x^2 - xy, \end{array} \right.$$

se pide:

(a) Obtener el diagrama de fases del mismo.

(b) ¿Son estables los puntos críticos? ¿Son asintóticamente estables?