ÁLGEBRA Y ECUACIONES DIFERENCIALES. Curso 2009/10.

Hoja 3: Espacios vectoriales.

1. Sea $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ el espacio de las matrices de orden 2×2 sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, estudiar si los siguientes conjuntos de matrices son subespacios vectoriales.

   (a) $\mathcal{M}_1 = \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \mathbf{A} \text{ es simétrica}\}$
   (b) $\mathcal{M}_2 = \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\}$
   (c) $\mathcal{M}_3 = \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : |\mathbf{A}| = 0\}$
   (d) $\mathcal{M}_4 = \{\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{R}\}$

2. En $\mathbb{R}^2$ definimos la operación interna $+$ dada por:

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)\ \forall (x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

   y la operación externa $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$\alpha * (x, y) = (\alpha x, y),\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ y\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

   ¿Tiene la terna $(\mathbb{R}^2, +, *)$ estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$?

3. Comprobar si los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales:

   (a) $\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0\}$.
   (b) $\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + x_3 = 1\}$.
   (c) $\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\}$.
   (d) $\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0 \ y\ x_3 - x_2 = 0\}$.
   (e) $\mathcal{W} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2^2 = 0\}$.

4. Decir si los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$ son linealmente independientes:

   (a) $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$.
   (b) $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$.
   (c) $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (2, 0, 0, 0)\}$.

5. Extraer un conjunto linealmente independiente de los conjuntos del ejercicio 4.

6. ¿Alguno de los conjuntos del ejercicio 4 son una base de $\mathbb{R}^4$?.

7. Calcular el subespacio vectorial generado por los conjuntos del ejercicio 4.

8. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{W}_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\}$ y

$$\mathcal{W}_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\},$$

   calcular:

   (a) Un conjunto generador linealmente independiente de $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$.
   (b) Calcular $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ y $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$.
   (c) ¿Es la suma de $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ directa?.
   (d) Calcular las dimensiones de $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$, $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ y $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$.

9. Sea $(\mathcal{V},+,\cdot)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, y sea $\mathcal{B}=\{\mathbf{v}_1,...,\mathbf{v}_n\}$ una base de $\mathcal{V}$. Demostrar que el conjunto de vectores $\mathcal{B}'=\{\mathbf{u}_1,...,\mathbf{u}_n\}$ dado por $\mathbf{u}_1=\mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2,...,$ $\mathbf{u}_n=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+...+\mathbf{v}_n$ es también una base de $\mathcal{V}$.

10. Sea $\mathcal{P}_4[x]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n. Demostrar que los conjuntos $\mathcal{B}=\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ y $\mathcal{B}'=\left\{(1+x)^4, x(1+x)^3, x^2(1+x)^2, x^3(1+x), x^4\right\}$ son bases de $\mathcal{P}_4[x]$. Expresar los elementos de $\mathcal{B}'$ como combinación lineal de $\mathcal{B}$.

11. Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ generados por los subconjuntos $\mathcal{S}_1=\{(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\}$ y $\mathcal{S}_2=\{(1,1,0,1),(1,2,-1,2),(3,5,-2,5)\}$ respectivamente. Encontrar:

    (a) $\dim(\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2)$.
    (b) $\dim(\mathcal{W}_1\cap\mathcal{W}_2)$.
    (c) Ecuaciones de $\mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2$.
    (d) Ecuaciones de $\mathcal{W}_1\cap\mathcal{W}_2$.

12. Idéntica cuestión para los subespacios de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{U}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=\lambda+\mu, y=\lambda-2\mu, z=-\mu\}$$

    y

$$\mathcal{V}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=0, y=3z\}.$$

13. Indicar cuál es la dimensión de la intersección de los subespacios de $\mathbb{R}^3$ definidos como $\mathcal{U}=L[(1,1,\alpha),(\alpha,1,1)]$ y $\mathcal{V}=L[(-1,\alpha,-1),(1,1,1)]$ según los valores de α.

14. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios vectoriales $\mathcal{A}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=0\}$ y $\mathcal{B}=\langle(1,1,1),(1,a,3)\rangle$, donde a es un parámetro real.

    (a) Calcula la dimensión de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$ en función de a.
    (b) Si $a=1$, averiguar si existe algún valor de b para el cual el vector $(b,2,1)$ pertenece al subespacio $\mathcal{A}+\mathcal{B}$.

15. Halla una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a los vectores $(1,0,1,1)$ y $(2,0,2,1)$.

16. Calcular las ecuaciones de los siguientes subespacios vectoriales:

    (a) $\langle(1,1,1)\rangle$ (b) $\langle(1,-1,0),(1,0,0\rangle$ (c) $\langle(1,1,1),(0,0,3)\rangle$ (d) $\langle(1,1),(1,0)\rangle$

17. ¿Cuál es la dimensión de $\mathbb{C}$ considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$? ¿Y si lo consideramos como un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$?

18. Hallar una base y la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^4$:

$$\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x-y-t=0,\ x+y+z+t=0\}.$$

19. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios vectoriales $\mathcal{A}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=0\}$ y $\mathcal{B}=\langle(1,1,1),(2,2,2)\rangle$. Se pide:

    (a) Hallar una base y la dimensión de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$.
    (b) ¿Pertenece el vector $(3,2,1)$ al subespacio $\mathcal{A}+\mathcal{B}$?

20. De las siguientes afirmaciones, demostrar las que sean ciertas y dar un contraejemplo para las falsas:

   (a) Si $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ son linealmente independientes, entonces $\{\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}\}$ también lo son.
   (b) Todo conjunto de vectores que no contenga al vector nulo es linealmente independiente.
   (c) Sean $\mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$ subespacios vectoriales del mismo espacio vectorial. Si $\dim(\mathcal{V}_1) = \dim(\mathcal{V}_2)$, entonces $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$.
   (d) El vector $(1, 0, 0)$ tiene por coordenadas $(1, 1, -1)$ en la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 3, 2)\}$.
   (e) Sean $\mathcal{S} = \{(1, 1, 2), (1, -2, -1), (3, -1, 2)\}$ y $\mathcal{S}' = \{(1, 0, 0)\}$. Entonces:
      i. $L(\mathcal{S}) + L(\mathcal{S}') = L(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}')$.
      ii. $L(\mathcal{S}) \cup L(\mathcal{S}') = L(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}')$.
      iii. $L(\mathcal{S}) \cap L(\mathcal{S}') = L(\mathcal{S} \cap \mathcal{S}')$.
      iv. $\dim(L(\mathcal{S})) = 3$ y $\dim(L(\mathcal{S}')) = 1$.
   (f) Si $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes tal que $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ y $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ son linealmente independientes, entonces $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ también son linealmente independientes.

21. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$ y $\mathcal{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ calcular:

   (a) Una base y la dimensión de ambos.
   (b) $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ y $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$, dando las bases de dichos subespacios.
   (c) ¿La suma $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ es directa?

22. Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales generados por

$$\mathcal{S}_1 = \{(1, 1, 1, 1), (1, -1, -1, 1)\} \text{ y } \mathcal{S}_2 = \{(1, 1, 0, 1), (1, 2, -1, 2), (3, 5, -2, 5)\}.$$

   Calcular:

   (a) La base y la dimensión de $L(\mathcal{S}_1)$ y $L(\mathcal{S}_2)$.
   (b) Calcular $L(\mathcal{S}_1) \cap L(\mathcal{S}_2)$ y $L(\mathcal{S}_1) + L(\mathcal{S}_2)$, dando bases de dichos subespacios.
   (c) ¿Pertenece el vector $(4, 0, -2, 1)$ a $L(\mathcal{S}_1) \cap L(\mathcal{S}_2)$? En caso afirmativo dar sus coordenadas respecto de la base considerada.
   (d) ¿Pertenece el vector $(4, 0, -2, 1)$ a $L(\mathcal{S}_1) + L(\mathcal{S}_2)$? En caso afirmativo dar sus coordenadas respecto de la base considerada.

23. Determinar $a \in \mathbb{R}$ para que los vectores $(a, 1, 1)$, $(1, a, 1)$ y $(1, 1, a)$ sean linealmente independientes. Determinar los tres subespacios vectoriales generados por dos de los 3 vectores anteriores en función de a y calcular la intersección y la suma de dichos subespacios vectoriales dos a dos. ¿Son las sumas directas?

24. Sea $\mathcal{C}(0, 1])$ el espacio vectorial de las funciones continuas $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ y sea $\mathcal{W}_1 = \{ax + bx^3 : a, b \in \mathbb{R}\}$ y $\mathcal{W}_2 = \{a + bx + cx^2 : a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

   (a) ¿Son $\mathcal{W}_1$ y $\mathcal{W}_2$ subespacios vectoriales de $\mathcal{C}(0, 1])$? Razona la respuesta.
   (b) Determinar $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ y $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$. ¿Es la suma directa? Determinar las dimensiones de ambos subespacios.

25. Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sean $\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n\}$ y $\mathcal{S}_2 = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_m\}$. Razonar la validez o falsedad de las siguientes afirmaciones:

   (a) Si $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son linealmente independientes, entonces $L(\mathcal{S}_1) + L(\mathcal{S}_2)$ es una suma directa.
   (b) Si $L(\mathcal{S}_1) \oplus L(\mathcal{S}_2)$, entonces $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ es un conjunto linealmente independiente.
   (c) $L(\mathcal{S}_1) + L(\mathcal{S}_2) = L(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2)$.