ÁLGEBRA Y ECUACIONES DIFERENCIALES. Curso 2009/10.

Hoja 4: Aplicaciones lineales.

1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:

   (a) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{f}(x, y) = (x - y, 2x - y^2)$.

   (b) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{f}(x, y, z, u) = (x - y,\ u + z,\ z,\ 2x - y)$.

   (c) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{f}(x, y) = (x - y,\ x - 2y,\ 3y)$.

   (d) $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{f}(x, y, z) = (x - z + y,\ 2x - y - 3z,\ z + y)$.

2. Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ dos aplicaciones lineales de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}$ de manera que para una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ se tiene que:

   $$\mathbf{f}(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1 \qquad \mathbf{g}(\mathbf{u}_1) = -\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{g}(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2$$

   Demuestrar que las aplicaciones $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ y $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ son distintas.

3. Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $\mathbf{f} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ una aplicacion lineal. Se define el **conjunto invariante** de $\mathbf{f}$, denotado $\mathrm{Inv}(\mathbf{f})$, como el conjunto de vectores los vectores v que permanecen invariantes por la aplicación, es decir,

   $$\mathrm{Inv}(\mathbf{f}) = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} : \mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\}.$$

   Demuestra que el conjunto invariante de una aplicación lineal es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$.

4. Dada una aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ demostrar que $\mathbf{f}^2 = \mathbf{0}$ (es decir, $\mathbf{f} \circ \mathbf{f}$ es la aplicación nula) si y sólo si $\mathrm{Im}(\mathbf{f}) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathbf{f})$.

5. Sea $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ una base del espacio vectorial $\mathcal{V}$ y sea:

   $$\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3,\ \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4\}.$$

   (a) Demostrar que $\mathcal{B}_2$ es una base de $\mathcal{V}$.

   (b) Encontrar la matriz de cambio de base.

   (c) Hallar las coordenadas respecto de $\mathcal{B}_1$ de un vector cuyas coordenadas con respecto a la base $\mathcal{B}_2$ son $(1, -1, 0, 1)$.

6. Sea $\mathcal{P}_4[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que cuatro. Dadas las siguientes bases:

   $$\mathcal{B}_1 = \left\{x,\ x^2 + 1,\ 2x^4 + x^3,\ x^3 - x^2 + x,\ x^2 + x\right\}$$
   $$\mathcal{B}_2 = \left\{2x^4 + 1,\ x^3 - 1,\ x^3 + 2x,\ x^2,\ x^3 - x^2\right\}$$

   (a) Halla la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.

   (b) Halla las coordenadas respecto de dichas bases del polinomio $\mathbf{p}(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

7. Consideremos la aplicación $\mathbf{D} : \mathcal{P}_4[x] \longrightarrow \mathcal{P}_3[x]$ de forma que si $\mathbf{p}(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathcal{P}_4[x]$, se tiene que:

   $$\mathbf{D}[\mathbf{p}(x)] = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$$

   (a) Probar que $\mathbf{D}$ es una aplicación lineal.

(b) Encontrar la matriz de $\mathbf{D}$ asociada a las bases canónicas de $\mathcal{P}_4[x]$ y $\mathcal{P}_3[x]$.

(c) Si sobre $\mathcal{P}_4[x]$ se considera la base

$$\mathcal{B} = \{(1+x)^4,\ (1+x)^3x,\ (1+x)^2x^2,\ (1+x)x^3,\ x^4\}$$

obtener la matriz de $\mathbf{D}$ en esta nueva base.

8. Dado $\mathbb{R}^4$ y el subespacio vectorial $\mathcal{W}$ cuyas ecuaciones respecto de la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ son:

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0 \qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

Se elige una nueva base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3,\ \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4,\ \mathbf{u}_4\}$.

(a) Calcular las ecuaciones de $\mathcal{W}$ respecto de esta nueva base.

(b) Obtener las coordenadas de $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ respecto de $\mathcal{B}'$. ¿Pertenece este vector a $\mathcal{W}$?

9. En $\mathbb{R}^3$ se considera la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ y la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida respecto a esta base por la relación:

$$\mathbf{f}(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = (x_2 + x_3)\mathbf{e}_1 + (x_1 + x_3)\mathbf{e}_2 + (x_2 - x_1)\mathbf{e}_3$$

(a) Calcular la matriz de $\mathbf{f}$ respecto a la base $\mathcal{B}$.

(b) Encontrar los vectores invariantes de $\mathbf{f}$ (ver ejercicio 3.).

(c) Calcular el núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$.

(d) Determinar una base de $\mathrm{Ker}(\mathbf{f})$ y la ampliar a una base de $\mathbb{R}^3$.

(e) Hallar la matriz de $\mathbf{f}$ respecto a esta nueva base.

10. Sea $\mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal dada por:

$$\mathbf{g}(-1, 1, 3) = (6, -4, 16) \qquad \mathbf{g}(-2, 1, 1) = (-2, -5, 1) \qquad \mathbf{g}(3, 2, -1) = (1, 14, -12)$$

Hallar la matriz de $\mathbf{g}$ respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, las ecuaciones del núcleo y la imagen y una base de ambos subespacios.

11. Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal definida por:

$$\mathbf{f}(1, 1, 1, 1) = (0, 0, 1) \qquad \mathbf{f}(1, 0, 1, 0) = (1, 1, -1)$$
$$\mathbf{f}(1, 1, 1, 0) = (0, 0, -1) \qquad \mathbf{f}(-1, -2, 0, 0) = (1, 1, 1)$$

(a) Calcular la matriz de $\mathbf{f}$ respecto a las bases canónicas.

(b) Calcular la dimensión y ecuaciones de $\mathrm{Ker}(\mathbf{f})$ e $\mathrm{Im}(\mathbf{f})$.

(c) Obtener la matriz de $\mathbf{f}$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y la base de $\mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{B} = \{(1, 1, 1),\ (1, 0, 1),\ (1, 1, 0)\}$$

así como las ecuaciones de la imagen de $\mathbf{f}$ en esta última base.

(d) Encontrar la matriz de $\mathbf{f}$ respecto de las bases

$$\mathcal{B}_1 = \{(1, 1, 1, 0),\ (1, 1, 0, 0),\ (1, 0, 0, 0),\ (1, 1, 1, 1)\}$$

de $\mathbb{R}^4$ y

$$\mathcal{B}_2 = \{(1, 1, 1),\ (0, 1, 1),\ (0, 0, 1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$ así como las ecuaciones del núcleo y la imagen de $\mathbf{f}$ en estas bases.

12. Sea $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación cuya matriz asociada en las bases canónicas es:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

 (a) Calcular la expresión analítica de $\mathbf{f}$ en las bases canónicas.
 (b) Obtener el núcleo, la imagen y el espacio invariante de $\mathbf{f}$.
 (c) Calcular la matriz de $\mathbf{f}$ respecto a las bases

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1,0),\ (1,1,0,0),\ (1,0,0,0),\ (1,1,1,1)\}$$

 y

$$\mathcal{B}' = \{(1,1),\ (0,2)\}.$$

13. Sean $\mathbf{g}$ y $\mathbf{f}$ las aplicaciones lineales de los ejercicios 10 y 11. Calcula la matriz de la aplicación compuesta $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$. Calcula además el rango, el núcleo, la imagen y el espacio invariante de dicha aplicación.

14. Dada $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por $\mathbf{f}(x,y,z) = (x+y, y, 0)$, se pide:
 (a) Demostrar que $\mathbf{f}$ es lineal.
 (b) Hallar la dimensión de los subespacios $\mathrm{Ker}(\mathbf{f})$ e $\mathrm{Im}(\mathbf{f})$ así como bases de los mismos.
 (c) Representa gráficamente los dos subespacios anteriores.

15. Calcula la expresión analítica de una aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sabiendo que

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{f}) = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0,\ x-y+2z=0\big\}$$

 y $\mathbf{f}(1,0,0) = (-1,2,0)$, $\mathbf{f}(0,1,0) = (1,1,0)$.

16. Contesta de forma razonada si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones,
 (a) No hay aplicaciones inyectivas de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$.
 (b) Las relaciones $\mathbf{f}(1,1,1) = (1,2)$, $\mathbf{f}(1,-1,1) = (-1,-2)$ y $\mathbf{f}(0,0,2) = (3,6)$ definen una aplicación lineal sobreyectiva de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}^2$.
 (c) Todas las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}$ son sobreyectivas.
 (d) Existe una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^5$ tal que su núcleo es la recta $\mathcal{U} = L[(1,0,1)]$ y su imagen es la recta $\mathcal{V} = L[(1,-1,1,2,4)]$.
 (e) Si $\mathbf{f} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ es una aplicación lineal y $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ de forma que $\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{f}(-\mathbf{v})$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
 (f) Si $\mathbf{f} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ es una aplicación lineal tal que $\dim \mathrm{Ker}(\mathbf{f}) > 0$, entonces $\mathbf{f}^{-1}$ es una aplicación.
 (g) Sea una aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$. Si $\mathbf{f}$ es suprayectiva, entonces $\dim(\mathcal{V}) \geq \dim(\mathcal{W})$.
 (h) Si $\mathbf{f} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, entonces $\mathcal{V} = \mathrm{Ker}(\mathbf{f}) \oplus \mathrm{Im}(\mathbf{f})$.
 (i) Las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

 representan la misma aplicación lineal respecto de bases diferentes.

17. Halla los valores de parámetro real a para los cuales $\mathbb{R}^3$ es suma directa del núcleo y la imagen de $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to R^3$ definida por la matriz (respecto de las base usual de $\mathbb{R}^3$)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

18. Calcula el valor de a para el cual la intersección del espacio $\mathcal{U} = L[(a, 1, 1), (0, 1, -1)]$ y el núcleo de la aplicación $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow R^2$ dada por $\mathbf{f}(x, y, z) = (x - y - z, y + az)$ es distinta del subespacio $\{\mathbf{0}\}$.

19. Halla para qué valor de a el vector $(1, 1, a)$ está en la imagen de la aplicación lineal $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida mediante las relaciones $\mathbf{f}(1, 2) = (1, -1, 1)$ y $\mathbf{f}(2, 1) = (0, 1, 1)$.

20. Calcula la dimensión del núcleo y la imagen de la aplicación $\mathbf{f}(x, y, z) = (ax - y - z, bx - z)$ en función de a y b.