Ampliación de Matemáticas.
Transformada de Laplace. Aplicaciones

1. Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones

$$\text{(a) } f(t)=\sin(3t) \quad \text{(b) } f(t)=e^{5t} \quad \text{(c) } f(t)=e^{5t}\cos 3t \quad \text{(d) } f(t)=te^{t}$$

$$\text{(e) } f(t)=t^3-t \quad \text{(f) } f(t)=\sinh t \quad \text{(g) } f(t)=\cos t\sin t \quad \text{(h) } f(t)=e^{t}\cos t\sin(2t)$$

2. Una función $f:[0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ se dice que es *periódica con periodo* $a>0$ o a*-periódica* si para cada $t\geq 0$ se tiene que $f(t)=f(t+a)$. Comprobar que en caso de existir la transformada de Laplace de f, se verifica la igualdad

$$\mathcal{L}(f)(z)=\frac{1}{1-e^{-az}}\int_0^a e^{-tz}f(t)\,dt$$

3. Usar el resultado de la actividad anterior para calcular la transformada de Laplace de la función peródica de periodo 2 definida en $[0,2]$ por

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in[0,1],\\ 2-x & \text{si } x\in[1,2].\end{cases}$$

4. Dada la función,

$$f(t)=\int_0^t e^{-s}\sin s\,ds,\quad t\geq 0$$

calcular su transformada de Laplace. Calcular asimismo la transformada de Laplace de $g(t)=tf(t)$.

5. Dada la función $f(t)$, definimos la función $g(t)=f(at)$, que puede verse como un cambio de escala en t. Comprobar que

$$\mathcal{L}[g](z)=\mathcal{L}[f(at)](z)=\frac{1}{a}\mathcal{L}[g](z/a).$$

Utilizar dicha fórmula para calcular la transformada de la función $\sin(at)$ a partir de

$$\mathcal{L}[\sin t](z)=\frac{1}{1+z^2}.$$

6. Calcular la transformada de Laplace de la función,

$$f(t)=\begin{cases} t, & \text{si } 0\leq t\leq 1\\ 1, & \text{si } 1<t\leq 2\\ 0, & \text{si } t>2\end{cases}$$

7. Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones.

$$\text{(a) } f(t)=|\sin t| \quad \text{(b) } g(t)=\begin{cases} 0, & \text{si } 0\leq t\leq 1\\ t, & \text{si } t>1\end{cases} \quad \text{(c) } h(t)=\begin{cases} t^2-1, & \text{si } 0\leq t\leq 2\\ 2, & \text{si } t>2\end{cases}$$

8. Calcular la transformada de Laplace de la función escalonada

$$f(t) = \begin{cases} \pi, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

extendida a todo $[0, +\infty[$ como 2-periódica.

9. ¿Existirá la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones de variable compleja? Razonar las respuestas.

$$\text{(a) } F(z) = \frac{z}{\sin z} \quad \text{(b) } F(z) = \frac{e^{-z}}{z} \quad \text{(c) } F(z) = \frac{z}{1+z^2} \quad \text{(d) } F(z) = \frac{e^{-\pi z}}{1+\cos(z^2)}$$

10. Calcular la transformada inversa de Laplace de las funciones siguientes

$$\text{(a) } F(z) = \frac{z^2}{1+z^3} \quad \text{(b) } F(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2-2)} \quad \text{(c) } F(z) = \frac{z+7}{z^2+2z+5}$$

$$(d) \; F(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)(z^2+2z+10)}$$

11. Calcular la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

$$\text{(a) } F(z) = \frac{ze^{-\pi z}}{z^2+2z+5} \quad \text{(b) } F(z) = \frac{(z-1)e^{-z}}{z^3+2} \quad \text{(c) } F(z) = \frac{z+1}{e^z z^2(z^2+9)} \quad \text{(d) } F(z) = \frac{z+1}{z^4}$$

12. Calcular las transformadas inversas de Laplace de las funciones:

$$\text{(a) } F(z) = \frac{e^{-az}}{1+z^2}, \; (a>0) \quad \text{(b) } F(z) = \frac{z}{(z-1)(z+2)^2} \quad \text{(c) } F(z) = \frac{e^{-z}}{z} + \frac{z-1}{z^2+2}$$

$$(d) \; F(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z^3-1)}$$

13. Utilizar la transformada de Laplace para resolver los siguientes problemas de Cauchy asociados a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes:

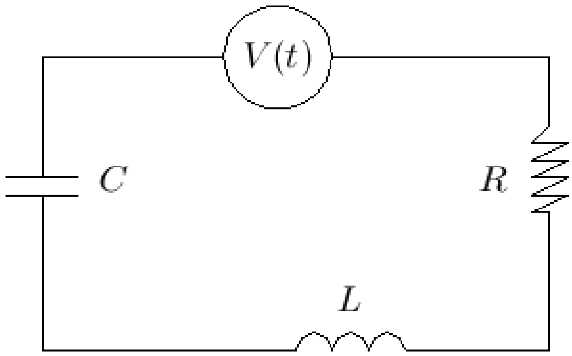
$$\left.\begin{array}{l} y'''(t) + 5y''(t) + 17y'(t) + 13y(t) = 1 \\ y(0) = y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} y'(t) + 3y(t) = e^{-2t} \\ y(0) = 2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 5h_4(t) \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} y''(t) + y(t) = t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -2 \end{array}\right\}$$

14. Resolver los siguientes problemas de valores iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} y''(t) + y'(t) = \phi(t), \text{ con } \phi(t) = \begin{cases} t, & t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} y''(t) + y(t) = \sin t, \\ y(0) = y'(0) = -1 \end{array}\right\}$$

15. Consideremos un circuito LCR como el de la figura



de forma que $L = 2$ henrios, $R = 16$ ohmios, $C = 0.02$ faradios y la fuerza electromotriz va oscilando con el tiempo siguiendo la relación $V(t) = 100\sin(3t)$.

(a) Utilizar las leyes de Kirchhoff para obtener la ecuación diferencial que verifica la función que describe la carga en función del tiempo.

(b) Determinar la carga en función del tiempo si en el momento de de conectar el circuito, $t = 0$, la carga del condensador es igual a cero.

(c) Determinar la carga del condensador en función del tiempo si inicialmente es de 1.5 culombios.

16. En el caso de un circuito LCR en el que no se tiene ninguna resistencia, la ecuación diferencial que describe la carga del condensador en función del tiempo es de la forma,

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}(t) + \frac{Q(t)}{C} = E(t)$$

y se denomina *oscilador armónico.* Resolver la ecuación anterior en los siguientes casos:

(a) La fuerza electromotriz E es constante y la carga e intensidad de corriente en el momento inicial son ambas nulas.

(b) La fuerza electromotriz es de la forma $\sin(\omega t + \sigma)$, con $\omega, \sigma \in \mathbb{R}$, mientras que $Q(0) = 1$ al conectar el circuito.

17. Usar la transformada de Laplace para resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales:

$$\left.\begin{array}{r} 2y_1''(t) - y_2''(t) - y_1'(t) - y_2'(t) + 9y_1(t) - 3y_2(t) = 0 \\ 2y_1''(t) - y_2''(t) + y_1'(t) + y_2'(t) + 7y_1(t) - 5y_2(t) = 0 \end{array}\right\}$$

con las condiciones iniciales:

$$y_1(0) = y_1'(0) = 1, \qquad y_2(0) = y_2'(0) = 0$$

18. Encuentra la solución del siguiente problema de Cauchy,

$$\left.\begin{array}{l} y''(t) + y(t) = \operatorname{sen}(\omega\, t) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{array}\right\}$$

con $\omega > 1$.

19. Encuentra la solución del oscilador armónico dado por la ecuación diferencial:

$$y''(t) + \beta\, y(t) = \sin(\omega\, t)\,, \qquad (\beta \in \mathbb{R},\ \omega > 0)$$

que verifica las condiciones iniciales:

$$y(0) = -1/2, \qquad y'(0) = 0 \quad \text{(06-09-99)}$$

20. Resuelve el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{array}{l} y''(t) + \beta\, y(t) = \cos(\omega t) \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 0 \end{array}$$

distinguiendo los casos en que $0 < \beta$ y $0 > \beta$.

21. Obtener la solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\left.\begin{array}{l} 3y_1'(t) + y_2'(t) - 2y_1(t) = 3\sin t + 5\cos t \\ 2y_1'(t) + y_2'(t) + y_2(t) = \sin t + \cos t \end{array}\right\}$$

para las condiciones iniciales, $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = -1$.

22. Encontrar la transformada de Fourier de las siguientes funciones ($a > 0$):

(a) $f(x) = \begin{cases} \cos x & |x| < \pi/2, \\ 0 & |x| \geq \pi/2. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x & |x| < a, \\ 0 & |x| \geq a. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} a - |x| & |x| < a, \\ 0 & |x| \geq a. \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 0 & x < -2, \\ -1 & x \in (-2,-1), \\ 1 & x \in (-1,1), \\ -1 & x \in (1,2), \\ 0 & x > 2, \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \sin(ax) & |x| \leq \pi/a, \\ 0 & |x| > \pi/a. \end{cases}$

23. Sea $f(t)$ una señal con transformada de Fourier $\mathcal{F}[f](z)$. Demostrar que

$$\mathcal{F}[e^{iwt} f(t)](z) = \mathcal{F}[f](z - w).$$

Este resultado es conocido como la propiedad del despalzamiento en frecuencia y es la base del proceso de modulación en teoría de la comunicación. Como aplicación calcular la trasformada de Fourier de las siguientes funciones:

(a) $f(t) = h_0(t + 1/2) - h_0(t - 1/2)$, siendo h_0 la función de Heviside.

(b) $f(t) = [h_0(t+1/2) - h_0(t-1/2)] \cos(wt)$. **Ayuda:** poner el coseno como combinación de exponenciaes complejas.

(c) $f(t) = [h_0(t + 1) - h_0(t - 1)] \sin(2t)$.

24. Calcular la transformada de Fourier inversa de la función $F(z) = e^{-z^2}/(1 + z^2)$.

25. Si $g(t) = f(t - a)$, demostrar la fórmula

$$\mathcal{F}[g](z) = e^{-iza}\mathcal{F}[f](z).$$

26. Resolver el problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(0, x) = f(x), \ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde:

(a) $f(x) = e^{-ax^2}$.

(b) $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a, \\ 0 & |x| \geq a. \end{cases}$

(c) $f(x) = h_0(x)$ siendo h_0 la función de Heaviside.

27. Utilizar la transformada de Fourier para obtener la solución formal del problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \ x \in \mathbb{R}, \ 0 < y < 1, \\ u(x, 0) = 0, \ x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 1) = f(x), \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$