AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2011/12

EXAMEN FINAL DE SEPTIEMBRE. 10–9–2012

- Nombre y apellidos:
- DNI:
- Grupo: Mañana/Tarde (Táchese lo que no proceda).

1. **(20 puntos)** Explique las propiedades de la Transformada de Laplace (esbozando su prueba) que permiten resolver el problema de condiciones iniciales dado por

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(t), \\ y(0) = y_0; y'(0) = y_1. \end{cases}$$

Aplíquelo a la resolución del siguiente problema particular:

$$\begin{cases} y'' + y' + y = t, \\ y(0) = 0; y'(0) = 0. \end{cases}$$

Solución: La primera parte es teoría. Para el ejercicio práctico, tomamos la transformada de Laplace en ambos lados de la igualdad

$$\mathcal{L}[y'' + y' + y](z) = \mathcal{L}[t](z),$$

y teniendo en cuenta sus propiedades tenemos que

$$\mathcal{L}[y'' + y' + y](z) = (z^2 + z + 1)\mathcal{L}[y](z) - y'(0) - y(0)(z + 1) = (z^2 + z + 1)\mathcal{L}[y](z),$$

$$\mathcal{L}[t](z) = -\frac{d}{dz}\mathcal{L}[1](z) = -\frac{d}{dz}\frac{1}{z} = \frac{1}{z^2},$$

de donde

$$(z^2 + z + 1)\mathcal{L}[y](z) = \frac{1}{z^2},$$

y despejando

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{1}{(z^2 + z + 1)z^2}.$$

Para calcular la función tomamos la fórmula de inversión compleja

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{Res}\left[\frac{e^{zt}}{(z^2 + z + 1)z^2}, 0\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{e^{zt}}{(z^2 + z + 1)z^2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{e^{zt}}{(z^2 + z + 1)z^2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \\ &= -1 + t + \frac{1}{3}e^{-t/2}\left(3\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right). \end{aligned}$$

2. **(20 puntos)** Dada la función 2–periódica definida por

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [0, 1) \\ 0 & \text{si} \quad t \in [1, 2) \end{cases}$$

se pide:

(a) ¿Tiene dicha función desarrollo en serie de Fourier? En caso afirmativo, explique porqué e indique en qué puntos dicha función sería igual a su serie de Fourier.

(b) Encuentre explícitamente la serie de Fourier de dicha función.

Solución. (a) Tiene desarrollo al ser una función monótona a trozos y dicho desarrollo coincidirá con la función el los puntos de continuidad de la función, que son todos los reales menos los enteros.

(b) Para calcular su serie de Fourier calculamos sus coeficientes

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(t)\cos(n\pi t)dt = \int_{0}^{1} \cos(n\pi t)dt = \frac{\sin(n\pi)}{n\pi} = \begin{cases} 0 & si \quad n \neq 0, \\ 1 & si \quad n = 0, \end{cases}$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(t)\sin(n\pi t)dt = \int_{0}^{1} \sin(n\pi t)dt = \frac{1-\cos(n\pi)}{n\pi} = \begin{cases} 0 & si \quad n \text{ } es \text{ } par, \\ 2/n\pi & si \quad n \text{ } es \text{ } impar, \end{cases}$$

por lo que

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi}\sin((2n+1)\pi t).$$

3. **Resuelva el siguiente problema de ecuaciones en derivadas parciales**

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u, \ t > 0, \ x \in (0,1), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \ t > 0, \\ u(0,x) = \operatorname{sen} x, \ x \in (0,1). \end{cases}$$

Solución: La ecuación se resolverá mediante el método de separación de variables, suponiendo que la solución solución $u(t,x)$ puede ponerse como

$$u(t,x) = F(t)\,G(x)$$

por tanto

$$\begin{aligned} u_t &= F'(t)\,G(x) \\ u_x &= F(t)\,G'(x) \\ u_{xx} &= F(t)\,G''(x) \end{aligned}$$

que transforma la EDP en

$$u_t = u_{xx} + 2u \Leftrightarrow F'(t)\,G(x) = F(t)\,G''(x) + 2F(t)\,G(x) \Leftrightarrow F'(t)\,G(x) = F(t)\,(2G(x) + G''(x))$$

Obviamente la solución trivial $u \equiv 0$ es solución de la EDP, pero como $u(0,x) = \operatorname{sen} x$, esta solución no cumplirá la condición inicial del problema, así que buscaremos soluciones alternativas y supondremos que $F(t) \neq 0$ y $G(x) \neq 0$, por tanto se puede dividir por ellas

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{G''(x) + 2G(x)}{G(x)}$$

Como una lado de la igualdad depende sólo de t y el otro depende sólo de x, ambos deben ser constantes

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{G''(x) + 2G(x)}{G(x)} = -\lambda \qquad (1)$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ (Se elige el signo menos por convención, aunque se puede desarrollar sin esta consideración).

De 1 obtenemos dos ecuaciones diferenciales

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = -\lambda \Leftrightarrow F'(t) + \lambda F(t) = 0$$

$$\frac{G''(x) + 2G(x)}{G(x)} = -\lambda \Leftrightarrow G''(x) + (2+\lambda) G(x) = 0$$

Si utilizamos las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u(t,0) &= F(t) G(0) = 0 \\ u(t,1) &= F(t) G(1) = 0 \end{aligned}$$

como t es arbitraria se deduce que

$$G(0) = G(1) = 0$$

Tendremos el problema de contorno

$$\begin{cases} G''(x) + (2+\lambda) G(x) = 0 \\ G(0) = 0 \\ G(1) = 0 \end{cases}$$

cuya solución depende del valor de λ.

(a) **Caso I:** $\lambda = -2 \Rightarrow \lambda + 2 = 0$, entonces la ecuación diferencial será

$$G''(x) + (2+\lambda) G(x) = 0 \Rightarrow G''(x) = 0$$

cuya solución general es de la forma

$$G(x) = Ax + B$$

Utilizando las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} G(0) &= 0 \Rightarrow B = 0 \\ G(1) &= 0 \Rightarrow A \cdot 1 + B = 0 \end{aligned}$$

la solución del sistema anterior es: $A = B = 0$, y por tanto obtenemos de nuevo la solución trivial nula, que hemos descartado.

(b) **Caso II:** $\lambda < -2 \Rightarrow \lambda + 2 < 0$, y por tanto lo podemos poner de la forma $2+\lambda = -a^2$, con $a = \sqrt{|2+\lambda|}$. La ecuación diferencial sería

$$G''(x) + (2+\lambda) G(x) = 0 \Rightarrow G''(x) - a^2 G(x) = 0$$

que tiene por solución general

$$G(x) = Ae^{ax} + Be^{-ax}$$

Utilizamos las condiciones de contorno para encontrar los valores de A y B

$$\begin{aligned} G(0) &= 0 \Rightarrow A + B = 0 \\ G(1) &= 0 \Rightarrow Ae^{a} + Be^{-a} = 0 \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores forman un sistema lineal homogéneo en las incógnitas A y B. El determinante de la matriz de coeficientes es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{a} & e^{-a} \end{vmatrix} = e^{-a} - e^{a} = -2\operatorname{senh}(aL)$$

y puesto que $\alpha \neq 0$ es no nulo y por tanto la única solución del sistema es la trivial $A = B = 0$ y obtenemos de nuevo la solución trivial.

(c) **Caso III:** $\lambda > -2 \Rightarrow \lambda + 2 > 0$,por tanto podemos poner $2 + \lambda = a^2$, con $a = \sqrt{2 + \lambda}$. La ecuación diferencial sería

$$G''(x) + (2 + \lambda) G(x) = 0 \Rightarrow G''(x) + a^2 G(x) = 0$$

que tiene por solución general

$$G(x) = A \cos ax + B \operatorname{sen} ax$$

Utilizamos las condiciones de contorno para encontrar los valores de A y B

$$\begin{aligned} G(0) &= 0 \Rightarrow A = 0 \\ G(1) &= 0 \Rightarrow A \cos a + B \operatorname{sen} a = 0 \end{aligned}$$

de donde

$$B \operatorname{sen} a = 0$$

Como buscamos una solución no trivial, entonces $B \neq 0$ y

$$\operatorname{sen} a = 0 \Leftrightarrow a = n\pi, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

luego

$$a = n\pi$$

y,

$$\lambda = a^2 - 2 = n^2\pi^2 - 2, \qquad n \in \mathbb{N}$$

recordemos que λ era una constante arbitraria, luego para cada valor de $n \in \mathbb{N}$, tendremos una posible solución de la EDO,

$$\lambda_n = n^2\pi^2 - 2 \Rightarrow G_n(x) = B_n \operatorname{sen}(n\pi x)$$

Notar que el caso $n = 0$, nos conduce de nuevo a la solución trivial, luego supondremos $n \geq 1$. Para estos valores de λ_n y utilizando la otra ecuación diferencial

$$F'(t) + \alpha^2 a^2 F(t) = 0 \Rightarrow F'(t) + \alpha^2 \frac{n^2\pi^2}{L^2} F(t) = 0$$

cuya solución para cada $n \in \mathbb{N}$ es de la forma

$$F_n(t) = A_n e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \qquad A_n \in \mathbb{R}$$

La solución de la EDP será para cada n de la forma

$$u_n(t,x) = F_n(t) G_n(x) = A_n B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} = c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

con $c_n = A_n B_n$. Por la linealidad de la Ecuación, cualquier combinación lineal de soluciones, es solución, por tanto podemos considerar como solución general formal a

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

y utilizando la condición inicial $u(0,x) = f(x)$ se obtiene

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

La condición inicial $u(0,x) = f(x)$ nos da

$$u(0,x) = f(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

Los coeficientes c_n son los coeficientes de Fourier de la extensión impar de la función $f(x)$, es decir, si $f(x)$ está definida en $[0,L]$ y hacemos la extensión impar periódica de $f(x)$ entonces

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

La solución para el problema general de la ecuación de Calor con condiciones de contorno nulas sería

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

4. **(20 puntos)** Resuelva el siguiente problema

$$\begin{array}{cc} \text{Minimizar} & x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{Sujeto a} & x + y + z \leq -1. \end{array}$$

Solución. Planteamos el Lagrangiano

$$L(x,y,z,\mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \mu(x + y + z - 1),$$

y las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x + \mu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y + \mu = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 2z + \mu = 0, \end{aligned}$$

y la condición de holgura

$$\mu(x+y+z+1)=0.$$

De esta última condición, podemos concluir que $\mu = 0$, que implicaría que $x = y = z = 0$, incompatible con la ligadura por lo que la descartamos. Nos queda entonces la ecuación

$$x+y+z=-1.$$

Despejando en las tres primeras ecuaciones

$$x=y=z=-\frac{1}{2\mu},$$

y sustituyendo en la cuarta ecuación obtenemos

$$\frac{-3}{2\mu}=-1,$$

con lo que $\mu = 3/2$ y $x = y = z = -\frac{1}{3}$, que verifican la ligadura. Todos los puntos son regulares al ser $(1, 1, 1)$ linealmente independiente para todos los posibles valores de x, y y z. Calculamos el Hessiano

$$HL = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que es siempre deifinido positivo, por lo que $(-1/3, -1/3, -1/3)$ es el mínimo pedido.