Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. UPCT
Titulación: Grado en GITI
Asignatura: Ampliación de Matemáticas

Examen. Convocatoria de Junio de 2018

- Nombre y apellidos:
- DNI:

1. **(0.5 ptos)** Establecer la relación entre las transformadas de Fourier y Laplace de una función real f.

2. Consideremos un sistema modelado por la ecuación diferencial

$$x^{n)}(t) + a_{n-1}x^{n-1)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t)$$

Se pide:

- **(0.5 ptos)** Explica qué significa que el sistema sea estable, asintóticamente estable e inestable.
- **(0.5 ptos)** Explica cómo se define la función de transferencia asociada al sistema.
- **(0.5 ptos)** Enuncia un criterio, basado en la función de transferencia, para estudiar la estabilidad, estabilidad asintótica e inestabilidad del sistema.

3. **(1 punto)** Demostrar que la transformada de Laplace de una función f verifica que

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](z) = \mathcal{L}[f](z-a)$$

para todo número complejo a. Como aplicación obtener la transformada de Laplace de $e^{at}\cos(\omega t)$ suponiendo conocida la transformada de $\cos(\omega t)$.

4. **(1.5 ptos)**Considermos un circuito eléctrico tipo RLC modelado por la ecuación diferencial

$$(\mathrm{CE})\begin{cases} q''(t) + 3q'(t) + 2q(t) = \sin t, \\ q(0) = 0 \\ q'(0) = 1, \end{cases}$$

Calcular las soluciones en los regímenes transitorios y estacionario, probando que éste segundo existe.

Solución. Tomamos la tranformada de Laplace obteniendo

$$(z^2+3z+2)L[q](z) - 1 = \frac{1}{1+z^2},$$

de donde

$$L[q](z) = \frac{1}{z^2+3z+2} + \frac{1}{(z^2+3z+2)(1+z^2)}.$$

La función de transferencia es

$$T(z) = \frac{1}{z^2+3z+2}$$

que tiene polos -1 y -2, por lo que el sistema es asntóticamente estable. Para calcular la solución en el régimen transitorio calculamos

$$q(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{z^2+3z+2}\right](t) + L^{-1}\left[\frac{1}{(z^2+3z+2)(1+z^2)}\right](t).$$

Calculamos aparte

$$\begin{aligned} L^{-1}\left[\frac{1}{z^2+3z+2}\right](t) &= Res\left(\frac{e^{zt}}{z^2+3z+2}, -1\right) + Res\left(\frac{e^{zt}}{z^2+3z+2}, -2\right) \\ &= \lim_{z\to -1}\frac{e^{zt}}{z+2} + \lim_{z\to -2}\frac{e^{zt}}{z+1} = e^{-t} - e^{-2t}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^{-1}\left[\frac{1}{(z^2+3z+2)(1+z^2)}\right](t) &= Res\left(\frac{e^{zt}}{(z^2+3z+2)(1+z^2)}, -1\right) + Res\left(\frac{e^{zt}}{(z^2+3z+2)(1+z^2)}, -\right. \\ &\quad + Res\left(\frac{e^{zt}}{(z^2+3z+2)(1+z^2)}, i\right) + Res\left(\frac{e^{zt}}{(z^2+3z+2)(1+z^2)}, -\right. \\ &= \lim_{z\to -1}\frac{e^{zt}}{(z+2)(1+z^2)} + \lim_{z\to -2}\frac{e^{zt}}{(z+1)(1+z^2)} \\ &\quad + \lim_{z\to i}\frac{e^{zt}}{(z^2+3z+2)(z+i)} + \lim_{z\to -i}\frac{e^{zt}}{(z^2+3z+2)(z-i)} \\ &= \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{(1+3i)2i}e^{it} - \frac{1}{(1-3i)2i}e^{-it} \\ &= \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{10}\left(\sin t - 3\cos t\right). \end{aligned}$$

Así, la solución en fase estacionaria es

$$q(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{6}{5}e^{-2t} + \frac{1}{10}\left(\sin t - 3\cos t\right).$$

Para el régimen estacionario basta darse cuenta que $\lim_{t\to\infty}\frac{3}{2}e^{-t} - \frac{6}{5}e^{-2t} = 0$, por lo que dicha solución será

$$q(t) \simeq \frac{1}{10}\left(\sin t - 3\cos t\right).$$

5. **(1.5 ptos)**Consideremos una barra unidimensional de longitud 1, aislada en los extremos, sometida a una fuente interna de generación de calor constante con valor 1, y que inicialmente está a temperatura $\cos(\pi x)$. Una vez normalizadas las constantes físicas, el modelo matemático para este problema es:

$$(\text{PC})\ \begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + 1, & t>0,\ 0<x<1 \\ u(0,x) = \cos(\pi x), & 0<x<1 \\ u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0, & t>0 \end{cases}$$

Calcular la solución del problema (PC).

Solución. Se trata de un problema de contorno tipo Neuman no homogéneo, por lo que proponemos una solución fomal

$$u(t,x) = \frac{T_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cos(n\pi x).$$

Teniendo en cuenta que 1 ya está desarrollada en desarrollo de Fourier par, derivando y sustituyendo obtenemos

$$\frac{T_0'(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t)\cos(n\pi x) = -\sum_{n=1}^{\infty}(n\pi)^2 T_n(t)\cos(n\pi x) + 1,$$

o equivalentemente

$$\frac{T_0'(t)}{2} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(T_n'(t) + (n\pi)^2 T_n(t))\cos(n\pi x) = 0.$$

Por otra parte

$$u(0,x) = \frac{T_0(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\cos(n\pi x) = \cos(\pi x),$$

que ya está desarrollada en serie par de Fourier, por lo que $T_1(0) = 1$ y todos los demás $T_n(0) = 0$. Planteamos los problemas de condiciones inciales

$$\begin{cases} \frac{T_0'(t)}{2} - 1 = 0, \\ T_0(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1'(t) + \pi^2 T_1(t) = 0, \\ T_1(0) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_n'(t) + (n\pi)^2 T_n(t), \\ T_n(0) = 0, \end{cases}$$

con soluciones

$$T_0(t) = 2t,$$

$$T_1(t) = e^{-\pi^2 t},$$

$$T_n(t) = 0.$$

Así la solución es

$$u(t,x) = t + e^{-\pi^2 t}\cos x.$$

6. **(1.5 ptos)** Resuelve el siguiente problema de programación no lineal

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & x + 2y + z \\ \text{sujeto a} & y^2 + z^2 \leq 9 \\ & x + y + z \geq 1. \end{cases}$$

Solución. En primer lugar reescribimos el problema como

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & x + 2y + z \\ \text{sujeto a} & y^2 + z^2 \leq 9 \\ & -x - y - z \leq -1. \end{cases}$$

Si ninguna restricción está activa, los puntos son regulares. Si sólo la primera está activa, el gradiente $(0, 2y, 2z)$ es linealmente independiente salvo que $y = z = 0$, pero esto no activa la desigualdad, por lo que todos los puntos son regulares. Si sólo la segunda restricción está activa, el gradiente es $(-1,-1,-1)$ que es linealmente independientes. Finalmente, si ambas están activas, los vectores gradiente son $(0, 2y, 2z)$ y $(-1,-1,-1)$ que son linealmente independientes salvo que $y = z = 0$, que nuevamente no puede darse si ambas restricciones están activas. Por lo tanto, todos los puntos son regulares.

Escribimos el Lagrangiano

$$L(x,y,z,\mu_1,\mu_2) = x + 2y + z + \mu_1(y^2+z^2-9) + \mu_2(-x-y-z+1).$$

Planteamos las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 1-\mu_2 = 0,\\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 2+2y\mu_1-\mu_2 = 0,\\
\frac{\partial L}{\partial z} &= 1+2z\mu_1-\mu_2 = 0.
\end{aligned}$$

De la primera ecuación $\mu_2 = 1$. La condición $\mu_1 = 0$ no puede darse porque $\mu_2 = 2$, que no es posible. Así la única posibilidad para obtener puntos KKT viene dada por las soluciones del sistema

$$\begin{cases}
2y\mu_1 = -1,\\
2z\mu_1 = 0,\\
y^2+z^2 = 9,\\
x+y+z = 1,
\end{cases}$$

con soluciones

$$(x,y,z,\mu_1,\mu_2) = (-2,3,0,-1/6,1)\,,$$
$$(x,y,z,\mu_1,\mu_2) = (4,-3,0,1/6,1)\,.$$

La primera no es factible por tener signos distintos μ_1 y μ_2. En la segunda estos signos son positivos, por lo que tenemos candidato a mínimo. El Hessiano en dicho punto es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

y el espacio tangente ampliado

$$\{(x,y,z) : x+z=0, y=0\} = \{(t,0,-t) : t\in\mathbb{R}\}.$$

Calculamos

$$(t,0,-t)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t\\ 0\\ -t\end{pmatrix} = \frac{t^2}{3} > 0$$

si $t\neq 0$, por lo que es un mínimo.