AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2021/22
EXAMEN PARCIAL. 7–4–2022

- Nombre y apellidos:
- DNI:
- Grupo (indicar mañana o tarde):
- En los ejercicios prácticos se valorará que estén explicados, indicando qué resultado o propiedad se ha usado para resolverlo, justificando que dicho resultado se puede utilizar.

1. **(1.5 puntos)** Dada una función $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ de orden exponencial suficientemente derivable. Probar que
$$\mathcal{L}[f'](z)=z\mathcal{L}[f](z)-f(0)$$
y que
$$\mathcal{L}[F](z)=\frac{\mathcal{L}[f](z)}{z}$$
donde $F(t)=\int_0^t f(s)ds$. Aplicar dichas propiedades para resolver el problema
$$\begin{cases} y'(t)+\int_0^t y(s)=h_1(t),\\ y(0)=0,\end{cases}$$
donde $h_1(t)$ denota la función de Heaviside.

Solución. Las dos primeras cuestiones son de teoría. Para resolver el problema aplicamos la transformada de Laplace quedando la ecuación
$$z\mathcal{L}[y](z)+\frac{\mathcal{L}[f](z)}{z}=\mathcal{L}[h_1](z)=\frac{e^{-z}}{z},$$
de donde
$$\mathcal{L}[y](z)=\frac{e^{-z}}{z^2+1}.$$
Tomando la transformada de Laplace inversa y aplicando el segundo teorema de traslación
$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-z}}{z^2+1}\right](t)\\ &= h_1(t)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2+1}\right](t-1)\\ &= h_1(t)\sin(t-1).\end{aligned}$$

2. **(2.5 puntos)** Dado el problema de condiciones inciales
$$\begin{cases} y''+ay'+2y=f(t),\\ y(0)=0,\ y'(0)=1,\end{cases}$$
calcular a para que los polos de la función de transferencia asociada sean -1 y -2. Probar que es asintóticamente estable y obtener la solución para tiempos suficientemente grandes (régimen estacionario) en los siguientes casos:

   (a) $f(t)=10\sin t$.

(b) $f(t) = e^t$.

(c) f es la función 2-periódica tal que $f(t) = t$ si $t \in [-1, 1)$.

Solución. La función de transferencia es

$$T(z) = \frac{1}{z^2 + az + 2},$$

y tendrá polos -1 y -2 si

$$z^2 + az + 2 = (z+1)(z+2) = z^2 + 3z + 2,$$

de donde $a = 3$. Será asintóticamente estable al tener todos sus polos negativos.

(a) La solución será

$$y(t) = 10|T(i)| \sin\left(t + \arg\left(T(i)\right)\right).$$

Como

$$T(i) = \frac{1}{1+3i} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i,$$

tenemos que

$$|T(i)| = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

y

$$\arg\left(T(i)\right) = -\arctan 3,$$

por lo que

$$y(t) = \sqrt{10}\sin\left(t - \arctan 3\right).$$

(b) Aplicamos la transformada de Laplace obteniendo la ecuación

$$(z^2 + 3z + 2)\mathcal{L}[y](z) - 1 = \mathcal{L}[e^t](z) = \frac{1}{z-1},$$

de donde

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 2} + \frac{1}{(z-1)(z^2 + 3z + 2)},$$

y tomando únicamente los polos con parte real no negativa obtenemos que

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{Res}\left(e^{zt}\frac{1}{(z-1)(z^2+3z+2)}\right) \\ &= \lim_{z\to 1} e^{zt}\frac{1}{(z^2+3z+2)} = \frac{1}{6}e^t. \end{aligned}$$

(c) Como la función es impar, su serie de Fourier será

$$Sf(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\pi t\right),$$

donde

$$b_n = 2\int_0^1 t\sin(n\pi t)dt = -\frac{(-1)^n}{n\pi}.$$

La solución será entonces

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{n\pi} |T(in\pi)| \sin\left(n\pi t + \arg(T(in\pi))\right).$$

Como

$$\begin{aligned} T(in\pi) &= \frac{1}{2 - n^2\pi^2 + 3n\pi i} \\ &= -\frac{n^2\pi^2 - 2}{(2 - n^2\pi^2)^2 + 9n^2\pi^2} - \frac{3n\pi}{(2 - n^2\pi^2)^2 + 9n^2\pi^2}, \end{aligned}$$

tenemos que

$$|T(in\pi)| = \frac{1}{\sqrt{(2 - n^2\pi^2)^2 + 9n^2\pi^2}}$$

y

$$\arg\left(T(in\pi)\right) = \pi + \arctan \frac{3n\pi}{n^2\pi^2 - 2}$$

al estar $T(in\pi)$ en el tercer cuadrante. Así

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{n\pi\sqrt{(2 - n^2\pi^2)^2 + 9n^2\pi^2}} \sin\left(n\pi t + \pi + \arctan \frac{3n\pi}{n^2\pi^2 - 2}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi\sqrt{(2 - n^2\pi^2)^2 + 9n^2\pi^2}} \sin\left(n\pi t + \arctan \frac{3n\pi}{n^2\pi^2 - 2}\right). \end{aligned}$$