# AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2020/21

EXAMEN PARCIAL. 15–4–2021

- Nombre y apellidos:
- DNI:
- Grupo (indicar mañana o tarde):
- En los ejercicios prácticos se valorará que estén explicados, indicando qué resultado o propiedad se ha usado para resolverlo, justificando que dicho resultado se puede utilizar.

1. **(0.5 puntos)** Si $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función derivable con primera derivada continua cuya transformada de Laplace existe. Obtener y demostrar la fórmula que permite obtener la transformada de Laplace de su derivada a partir de la de $f$.

   **Solución.** Teoría.

2. **(0.5 puntos)** Enunciar bajo qué condiciones la serie de Fourier de una función $2L$ periódica $f$ coincide con la función. ¿Qué ocurre en los puntos de discontinuidad de $f$ si los hay?

   **Solución.** Teoría.

3. **(1.5 puntos)** Obtener la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = y + \sin t, \\ y' = -x, \end{array} \right.$$

   con condiciones iniciales $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, haciendo uso de la transformada de Laplace.

   **Solución.** Aplicamos la transformada de Laplace

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}[x'](z) = \mathcal{L}[y](z) + \mathcal{L}[\sin t](z), \\ \mathcal{L}[y'](z) = -\mathcal{L}[x](z), \end{array} \right.$$

   de donde

$$\left\{ \begin{array}{l} z\mathcal{L}[x](z) = \mathcal{L}[y](z) + \frac{1}{z^2+1}, \\ -z\mathcal{L}[y](z) = \mathcal{L}[x](z), \end{array} \right.$$

   y sustituyendo $\mathcal{L}[x](z)$ en la primera ecuación y simplificando

$$(z^2 + 1)\mathcal{L}[y](z) = -\frac{1}{z^2 + 1}$$

   de donde

$$\mathcal{L}[y](z) = -\frac{1}{(z^2 + 1)^2}.$$

Los polos de orden dos dicha función son $\pm i$, por lo que

$$\begin{aligned}
y(t) &= \operatorname{Re}s\left(-\frac{e^{zt}}{(z^2+1)^2}, i\right) + \operatorname{Re}s\left(-\frac{e^{zt}}{(z^2+1)^2}, -i\right) \\
&= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{-e^{zt}}{(z^2+1)^2}(z-i)^2 + \lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\frac{-e^{zt}}{(z^2+1)^2}(z+i)^2 \\
&= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{-e^{zt}}{(z+i)^2} + \lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\frac{-e^{zt}}{(z-i)^2} \\
&= \lim_{z\to i} e^{zt}\frac{2-t(z+i)}{(z+i)^3} + \lim_{z\to -i} e^{zt}\frac{2-t(z-i)}{(z-i)^3} \\
&= e^{it}\frac{2it-1}{4i} + e^{-it}\frac{2it+1}{4i} \\
&= t\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} - \frac{1}{2}\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \\
&= t\cos t - \frac{1}{2}\sin t.
\end{aligned}$$

4. **(1.5 puntos)** Resolver el siguiente problema

$$\begin{cases} u_t = u_{yy} + t, \ t > 0, \ y \in (0,\pi), \\ u(0,y) = \sin(2y), \ y \in (0,\pi), \\ u(t,0) = 0, \ u(t,\pi) = 0, \ t > 0. \end{cases}$$

**Solución.** Proponemos la solución de la forma

$$u(t,y) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(ny).$$

Teniendo en cuenta que

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin(ny)$$

donde

$$c_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(ny)\,dy = \frac{2t}{n\pi}(1-(-1)^n),$$

derivando y sustituyendo en la ecuación en derivadas parciales tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t)\sin(ny) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 T_n(t)\sin(ny)\,u_{yy} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2t}{n\pi}(1-(-1)^n)\sin(ny),$$

de donde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n'(t) + n^2T_n(t) - \frac{2t}{n\pi}(1-(-1)^n)\right]\sin(ny) = 0,$$

por lo que $T_n(t)$ cumple la ecuación diferencial

$$T_n'(t) + n^2T_n(t) = \frac{2t}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

que tiene por solución general

$$\begin{aligned} T_n(t) &= a_n e^{-n^2 t} + \frac{2t}{n^3\pi}(1-(-1)^n) - \frac{2}{n^5\pi}(1-(-1)^n) \\ &= a_n e^{-n^2 t} + \frac{2}{n^3\pi}(1-(-1)^n)\left(t - \frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Entonces

$$u(t,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n e^{-n^2 t} + \frac{2}{n^3\pi}(1-(-1)^n)\left(t-\frac{1}{n^2}\right)\right]\sin(ny),$$

y aplicando la condición inicial

$$u(0,y) = \sin(2y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n - \frac{2}{n^5\pi}(1-(-1)^n)\right]\sin(ny)$$

de donde

$$a_n - \frac{2}{n^5\pi}(1-(-1)^n) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2y)\sin(ny)dy = \begin{cases} 0 & si \quad n \neq 2, \\ 1 & si \quad n = 2. \end{cases}$$

Entonces

$$a_n = \begin{cases} \frac{2}{n^5\pi}(1-(-1)^n) & si \quad n \neq 2, \\ 1 & si \quad n = 2, \end{cases}$$

por lo que

$$\begin{aligned} u(t,y) &= \left(\frac{4}{\pi}e^{-t} + \frac{4}{\pi}(t-1)\right)\sin y + e^{-4t}\sin(2y) \\ &\quad + \sum_{n=3}^{\infty}\left[\frac{2}{n^5\pi}(1-(-1)^n)e^{-n^2 t} + \frac{2}{n^3\pi}(1-(-1)^n)\left(t-\frac{1}{n^2}\right)\right]\sin(ny) \\ &= \frac{4}{\pi}\left(e^{-t}+t-1\right)\sin y + e^{-4t}\sin(2y) + \sum_{n=3}^{\infty}\left[\frac{2}{n^5\pi}(1-(-1)^n)\left(e^{-n^2 t}+n^2 t-1\right)\right]\sin(ny). \end{aligned}$$