AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS. Curso 2021/22

EXAMEN FINAL. 10–6–2022

- Nombre y apellidos:
- Grupo (indicar mañana o tarde):
- Indicar si se examina de examen parcial, completo, y/o prácticas:
- En los ejercicios prácticos se valorará que estén explicados, indicando qué resultado o propiedad se ha usado para resolverlo, justificando que dicho resultado se puede utilizar.

Primer Parcial

1. **(1 punto)** Dado un sistema lineal de EDOs, define qué significa que el sistema sea estable, asintóticamente estable, e inestable, e indica un ejemplo de cada tipo.

Solución. Teoría.

2. **(1.5 puntos)** Consideremos el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = f(t), \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1, \end{cases}$$

Se pide probar que el sistema es asintóticamente estable y obtener la solución para tiempos suficientemente grandes (régimen estacionario) cuando $f(t)$ es la función 2-periódica tal que $f(t) = t^2$ si $t \in [-1, 1)$.

Solución. Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación obtenemos

$$(z^2 + 2z + 2)\mathcal{L}[y](z) - 1 = \mathcal{L}[f](z),$$

de donde

$$\mathcal{L}[y](z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2} + \frac{1}{z^2 + 2z + 2}\mathcal{L}[f](z),$$

siendo la función de transferencia

$$T(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2}.$$

Sus polos son $-1 \pm i$, con parte real negativa, por lo que el sistema es asintóticamente estable. Por otro lado, como la función f es par, su serie de Fourier será

$$Sf(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi t),$$

donde

$$a_0 = 2\int_0^1 t^2 dt = \frac{2}{3},$$

$$a_n = 2\int_0^1 t^2 \cos(n\pi t) dt = \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}.$$

La solución en el régimen estacionario es

$$y(t) = \frac{1}{3}T(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} |T(in\pi)| \cos\left(n\pi t + \arg(T(in\pi))\right).$$

Como

$$T(0) = \frac{1}{2},$$

$$T(in\pi) = \frac{2 - n^2\pi^2}{(2 - n^2\pi^2)^2 + 4n^2\pi^2} - \frac{2n\pi i}{(2 - n^2\pi^2)^2 + 4n^2\pi^2},$$

$$|T(in\pi)| = \frac{1}{\sqrt{(2 - n^2\pi^2)^2 + 4n^2\pi^2}},$$

y

$$\arg(T(in\pi)) = -\arctan\left(\frac{2n\pi}{n^2\pi^2 - 2}\right)$$

ya que está localizado en el cuarto cuadrante. Así

$$y(t) = \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} \frac{1}{\sqrt{(2 - n^2\pi^2)^2 + 4n^2\pi^2}} \cos\left(n\pi t - \arctan\left(\frac{2n\pi}{n^2\pi^2 - 2}\right)\right).$$

3. **(1.5 puntos)** Resuelve el problema

$$\begin{cases} y'' + y = h_\pi(t)\cos t, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Solución. Aplicando la transformada de Laplace obtenemos

$$(z^2 + 1)\mathcal{L}[y](z) = \mathcal{L}[h_\pi(t)\cos t](z).$$

Calculamos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[h_\pi(t)\cos t](z) &= \int_0^\infty h_\pi(t)\cos t e^{-zt} dt = \int_\pi^\infty \cos t e^{-zt} dt \\
&= \left\{ \begin{array}{c} s = t - \pi \\ ds = dt \end{array} \right\} = \int_0^\infty \cos(s + \pi) e^{-z(s+\pi)} ds \\
&= -e^{-z\pi} \int_0^\infty \cos s e^{-zs} ds = -e^{-z\pi}\mathcal{L}[\cos t](z) \\
&= -e^{-z\pi} \frac{z}{z^2 + 1}.
\end{aligned}$$

(**Nota:** este cálculo puede hacerse de muchas manera diferentes). Por tanto,

$$\mathcal{L}[y](z) = -e^{-z\pi} \frac{z}{(z^2 + 1)^2},$$

cuyos polos dobles son $\pm i$. Entonces

$$y(t) = h_\pi(t)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{(z^2 + 1)^2}\right](t - \pi).$$

Calculamos aparte

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{(z^2+1)^2}\right](t) &= \operatorname{Re}s\left(\frac{e^{zt}z}{(z^2+1)^2}, i\right) + \operatorname{Re}s\left(\frac{e^{zt}z}{(z^2+1)^2}, -i\right) \\
&= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{e^{zt}z}{(z+i)^2} + \lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\frac{e^{zt}z}{(z-i)^2} \\
&= \lim_{z\to i}\left(te^{zt}\frac{z}{(z+i)^2} + e^{zt}\frac{i-z}{(z+i)^3}\right) \\
&\quad + \lim_{z\to -i}\left(te^{zt}\frac{z}{(z-i)^2} - e^{zt}\frac{i+z}{(z-i)^3}\right) \\
&= te^{it}\frac{1}{4i} - te^{-it}\frac{1}{4i} = \frac{1}{2}t\sin t,
\end{aligned}$$

de donde

$$y(t) = h_\pi(t)\frac{1}{2}(t-\pi)\sin(t-\pi) = \frac{\pi - t}{2}h_\pi(t)\sin t.$$

Segundo Parcial

4. **(1 punto)** Explica qué son la ecuación del calor, la ecuación de ondas y la ecuación de Laplace, e indica para cada una de ellas su tipo (esto es, si es elíptica, parabólica o hiperbólica), explicando por qué. Da un ejemplo de problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en el rectángulo de $\mathbb{R}^2$ dado por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$.

   Solución. Teoría.

5. **(1.5 puntos)** Resuelve el problema

$$\left\{\begin{array}{l} u_t = u_{yy} + t, \quad t > 0,\ y \in (0,\pi), \\ u(0,y) = \cos(2y), \quad y \in [0,\pi], \\ u_y(t,0) = u_y(t,\pi) = 0, \quad t \geq 0. \end{array}\right.$$

   Solución. Se trata de un problema no homogéneo tipo Neumann, por lo que la solcuión formal será de la forma

$$u(t,y) = \frac{T_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cos(ny).$$

   Sustituyendo en la ecuación diferencial y simplificando obtenemos

$$\frac{T_0'(t)}{2} - t + \sum_{n=1}^{\infty}[T_n'(t) + n^2 T_n(t)]\cos(ny) = 0,$$

   y de la condición incial

$$u(0,y) = \cos(2y) = \frac{T_0(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\cos(ny),$$

   de donde

$$T_n(0) = \left\{\begin{array}{lll} 0 & si & n \neq 2, \\ 1 & si & n = 2. \end{array}\right.$$

Planteamos entonces las ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} T_0'(t) = 2t, \\ T_0(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_2'(t) + 4T_2(t) = 0, \\ T_2(0) = 1, \end{cases}$$

y para $n \neq 2$,

$$\begin{cases} T_n'(t) + n^2 T_n(t) = 0, \\ T_n(0) = 0, \end{cases}$$

cuyas soluciones son

$$T_0(t) = t^2,$$

$$T_2(t) = e^{-4t},$$

y si $n \neq 2$,

$$T_n(0) = 0.$$

Así, la solución es

$$u(t, y) = \frac{t^2}{2} + e^{-4t} \cos(2y).$$

6. **(1.5 puntos)** Maximiza la función $f(x, y, z) = x + y + z$ sujeto a las restricciones

$$\begin{cases} x - y - z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \end{cases}$$

justificando la existencia de dicho máximo así como el método de resolución utilizado.

Solución. En primer lugar, vemos que se trata de un problema regular ya que si la desigualdad no está activa, el vector gradiente $(1, -1, -1)$ es linealmente independiente, y si está activa, los vectores $(1, -1, -1)$ y $(2x, 2y, 2z)$ son dependientes si

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2y + 2x = 0,$$

y

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2x & 2z \end{vmatrix} = 2z + 2x = 0,$$

de donde se tendría que $x = -y = -z$. Sustituyendo en la igualdad tendríamos $x = 1/3$, pero entonces $x^2 + y^2 + z^2 = 1/3$ y la desigualdad no estaría activa. Por tanto, solo pueden ser linealmente independientes y el problema es regular. Escribimos el Lagrangiano

$$L = x + y + z + \lambda(x - y - z - 1) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 4),$$

y las condiciones de KKT son

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + \lambda + 2\mu x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 1 - \lambda + 2\mu y = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 1 - \lambda + 2\mu z = 0, \end{cases}$$

junto con la ecuaciones

$$x - y - z = 1,$$

y
$$\mu(x^2+y^2+z^2-4)=0.$$
De esta última, tenemos los casos $\mu=0$, que no proporciona una solución válida ya que tomando las dos primeras ecuaciones tendríamos que $\lambda=1=-1$. Por tanto
$$x^2+y^2+z^2=4.$$
De las tres primera ecuaciones
$$x=-\frac{1+\lambda}{2\mu},\quad y=z=-\frac{1-\lambda}{2\mu},$$
y sustituyendo en las otras dos y simplificando tenemos
$$1-3\lambda=2\mu,$$
de donde
$$\mu=\frac{1-3\lambda}{2},$$
y
$$3-2\lambda+3\lambda^2=16\mu^2,$$
y sustituyendo el valor de μ,
$$3-2\lambda+3\lambda^2=4\left(1+9\lambda^2-6\lambda\right),$$
que se simplifica a
$$33\lambda^2-22\lambda+1=0,$$
de donde
$$\lambda=\frac{11\pm 2\sqrt{22}}{33}.$$
De $\lambda=\frac{11-2\sqrt{22}}{33}$ obtenemos un valor positivo de μ, por lo que lo descartamos al buscar un máximo. De $\lambda=\frac{11+2\sqrt{22}}{33}$ obtenemos
$$\mu=-\sqrt{22},$$
y así
$$\begin{aligned} x &= \frac{22+\sqrt{22}}{33\sqrt{22}},\\ y &= z=\frac{11-\sqrt{22}}{\sqrt{22}}, \end{aligned}$$
que es el candidato a máximo. Como la matrix Hessiana es en este punto
$$HL=\begin{pmatrix} 2\mu & 0 & 0\\ 0 & 2\mu & 0\\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2\sqrt{22} & 0 & 0\\ 0 & 2\sqrt{22} & 0\\ 0 & 0 & 2\sqrt{22} \end{pmatrix},$$
y tiene todos los valores propios negativos, es definida negativa, y por tanto confirmamos que se trata de un máximo.

Pregunta de Prácticas

7. **(2 puntos)** Resuelve el problema

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{yy}, \quad t > 0, \ y \in (0, \pi), \\ u(0, y) = 0, \quad y \in [0, \pi], \\ u_t(0, y) = \sin y \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = t^2, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Solución. Se trata de un problema de Dirchlet con condiciones de contorno no nulas, por lo que es necesario hacer el cambio $v(t, y) = u(t, y) - t^2$, que nos da el problema

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{yy} + 2, \quad t > 0, \ y \in (0, \pi), \\ v(0, y) = 0, \quad y \in [0, \pi], \\ v_t(0, y) = \sin y \\ v(t, 0) = v(t, \pi) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

La solución formal será de la forma

$$v(t, y) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(ny),$$

que sustituimos en la ecuación y simplificando obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n''(t) + n^2 T_n(t) + \frac{4}{n\pi}(1 - (-1)^n) \right] \sin(ny) = 0,$$

dado que

$$2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi}((-1)^n - 1) \sin(ny).$$

De la primera condición inicial

$$v(0, y) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin(ny)$$

obtenemos que $T_n(0) = 0$. De la segunda

$$v_t(0, y) = \sin y = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \sin(ny)$$

obtenemos

$$T_n'(0) = \begin{cases} 0 & si \quad n \neq 1, \\ 1 & si \quad n = 1. \end{cases}$$

Tenemos las ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} T_1''(t) + T_1(t) = -\frac{8}{\pi}, \\ T_1(0) = 0, \ T_1'(0) = 1, \end{cases}$$

y si $n \neq 1$,

$$\begin{cases} T_n''(t) + n^2 T_n(t) = \frac{4}{n\pi}((-1)^n - 1), \\ T_n(0) = T_n'(0) = 0, \end{cases}$$

cuyas soluciones son

$$T_1(t) = \frac{8}{\pi}\left(\cos t - 1\right) + \sin t,$$

y si $n \neq 1$,

$$T_n(t) = \frac{4}{n^3\pi}\left((-1)^n - 1\right)\left(1 - \cos(nt)\right),$$

por lo que

$$\begin{aligned} u(t,y) &= t^2 + \left(\frac{8}{\pi}\left(\cos t - 1\right) + \sin t\right)\sin y \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n^3\pi}\left((-1)^n - 1\right)\left(1 - \cos(nt)\right)\sin(ny). \end{aligned}$$