AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS.

Optimización estática.

1. Encuentra sobre $\mathbb{R}$, los extremos locales y globales de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = x^5 + x^4 - \frac{x^3}{3} + 2 \qquad \text{b) } g(x) = (2x+1)^2 (x-4)$$

2. Halla los extremos locales y globales de $f(x) = x^3 - 12x + 3$ en el intervalo $[-4, 4]$.

3. Dada la función

$$f(x,y) = e^{ax+y^2} + b \operatorname{sen}\left(x^2 + y^2\right), \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

   a) Determina el valor de a y b, sabiendo que $f(x,y)$tiene un extremo relativo en $(0,0)$ y que el polinomio de Taylor de 2^o orden de $f(x,y)$en ese punto, toma el valor 6 en el punto $(1,2)$.

   b) Indica la clase de extremo que presenta $f(x,y)$ en $(0,0)$.

4. Estudia los extremos relativos y absolutos de las siguientes funciones

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + 3xy - y^2 \\ f(x,y) &= x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \\ f(x,y) &= \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x+y) \quad 0 < x, y < 2\pi \end{aligned}$$

5. Demuestra que el origen es el único punto crítico de la función

$$f(x,y,z) = xy + yz + zx$$

   a) ¿Es un punto de máximo o de mínimo relativo?

   b) Encuentra 2 rectas que pasen por el origen tal que en una de ellas sea $f > 0$ y en la otra $f < 0$. ¿Porqué es posible encontrar estas rectas?

6. Encuentra los extremos de las siguientes funciones sobre los conjuntos correspondientes:

$$\begin{array}{ll} f_1(x,y) = xy\left(1 - x^2 - y^2\right) & \text{en } \Omega_1 = [0,1] \times [0,1] \\ f_2(x,y) = xy & \text{en } \Omega_2 = \text{ Triángulo de vértices } (0,0) - (1,0) - (0,1) \end{array}$$

7. Determina, si existen, los extremos relativos y absolutos de la función $f(x,y,z) = y$ sobre el conjunto

$$F = \left\{x^2 + z^2 = 9; x + y + z = 1\right\}$$

8. Resuelve el problema

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{Sujeto a} & x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx - 1 = 0 \\ & x + 2y - 3z = 0 \end{array}$$

9. Halla la mínima distancia entre la recta $x + y = 4$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

10. Maximiza la función $f(x,y,z) = 3 + x^2 + 2y^2 + 4y - 2x + (z-2)^2$, sujeta a la restricción $2x + 4y + z = 0$.

11. Resuelve el problema

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & x^2 y \\ \text{Sujeto a} & x^2 + y^2 = 1 \end{array}$$

12. Determina los óptimos de $f(x,y,z) = xy + yz + zx$, sujeto a la restricción $x + y + z = 120$

13. Resuelve el siguiente problema

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & -x^2 + 2y + z \\ \text{Sujeto a} & x + 2y - z = 0 \\ & 2y + z = 0 \end{array}$$

14. Un meteoro se mueve a lo largo de la trayectoria de ecuación

$$y = x^2 + 3x - 6$$

Una estación espacial se encuentra en el punto $(x, y) = (2, 2)$. Utiliza las condiciones de KKT para encontrar el punto más cercano entre el meteoro y la estación.

15. Halla los óptimos relativos y absolutos, si los hay, que alcanza $f(x, y, z) = z$, sobre el conjunto $F = \left\{x^2 + y^2 \leq 4; x + y + z = 5\right\}$

16. Resuelve el problema

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & x^2 + 2(y-1) \\ \text{Sujeto a} & x + y^2 \leq 1 \end{array}$$

17. Realiza la descomposición del número 6 en 3 sumandos, de forma que:

   a) Su producto sea máximo.

   b) Su producto sea mínimo.

   c) ¿Qué se puede decir si los tres números son no negativos?

18. Halla, si existen, los extremos relativos y absolutos de la función $f(x, y) = x^2 y$ sobre el conjunto de los puntos que cumplen $x^2 + y^2 \leq 1$.

19. Dado el siguiente problema de programación no lineal

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & (x-7)^2 + (y-10)^2 \\ \text{Sujeto a} & y - 8 \leq 0 \\ & (x-10)^2 + (y-10)^2 - 36 \leq 0 \end{array}$$

   a) Discute las posibles soluciones del problema utilizando el método de los multiplicadores de K.K.T.

20. Dado el siguiente problema de programación no lineal

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & x + y \\ \text{Sujeto a} & x^2 + \dfrac{y^2}{4} \leq 1 \\ & y - x^2 - 1 \geq 0 \end{array}$$

Discute las posibles soluciones del problema utilizando el método de los multiplicadores de K.K.T.

21. Dado el siguiente problema de programación no lineal

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & (x-2)^2 + (y-2)^2 \\ \text{Sujeto a} & y - 5 \leq 0 \\ & (x-4)^2 + (y-4)^2 - 16 \leq 0 \end{array}$$

Discute las posibles soluciones del problema utilizando el método de los multiplicadores de K.K.T.

22. Determinar gráficamente el máximo y mínimo absolutos de la función $f(x, y) = x^2 + (y-4)^2$ sobre el conjunto $F = \{(x, y) \,|x + y \geq 3; -x + y \leq 3; x \leq 2\}$.

Plantea las condiciones de K.K.T. del problema anterior y utiliza la gráfica para deducir qué restricciones son activas y cuales inactivas en los puntos de máximo y mínimo. Calcular a partir de los datos anteriores esos valores máximo y mínimo.

23. Obtener los extremos de la función $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sujeto a las condiciones

$$\left\{ \begin{array}{l} y^2 + z^2 \leq 1, \\ x + y + z \leq 1. \end{array} \right.$$

24. Resolver el siguiente problema

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & x+y+z \\ \text{Sujeto a} & x^2+y^2 \leq 4, \\ & x+2y+3z=0, \end{array}$$

25. Resolver el siguiente problema

$$\begin{array}{cc} \text{Minimizar} & xy+z \\ \text{Sujeto a} & x^2+y^2+z^2=5, \\ & x+1 \leq 0, \end{array}$$

sabiendo que el conjunto en que está definido es compacto.

26. Obtener los extremos de la función $f(x,y,z) = x + 2y + z$ sujeto a las condiciones

$$\left\{ \begin{array}{l} y^2+z^2 \leq 9, \\ x+y+z \geq 1, \\ x+y+z \leq 4. \end{array} \right.$$

27. Resuelver el siguiente problema

$$\begin{array}{cc} \text{Minimizar} & x^2+y^2+z^2 \\ \text{Sujeto a} & x+y+z \leq -1. \end{array}$$

28. Resolver el siguiente problema

$$\begin{array}{cc} \text{Maximizar} & x+y+z \\ \text{Sujeto a} & x^2+y^2=1, \\ & 3x+2z \leq 1. \end{array}$$

29. Resuelva el siguiente problema

$$\begin{array}{cc} \text{Optimizar} & x+2y+3z \\ \text{Sujeto a} & x+y+z \leq -1. \\ & x^2+y^2=1. \end{array}$$