AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS.

Métodos variacionales.

1. Resuelve el siguiente problema variacional

$$\left.\begin{array}{ll} \text{mín} & J(y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2} y'(t)^2\, dt \\ \text{s.a.} & \displaystyle\int_0^1 y(t)\, dt = a \\ y(0) = 0 & y(1) = 1 \end{array}\right\}$$

2. Resuelve el problema

$$\begin{aligned} \text{mín } J(x,y) &= \int_1^2 \left[(y')^2 - 2xy \right] dx \\ y(1) &= 0; \qquad y(2) = -1 \end{aligned}$$

3. Resuelve el problema

$$\begin{aligned} \text{mín } J(x,y) &= \int_0^4 \left[xy' - (y')^2 \right] dx \\ y(0) &= 0; \qquad y(4) = 3 \end{aligned}$$

4. Resuelve el problema

$$\begin{aligned} \text{mín } J(x,y) &= \int_0^1 (3x - y)\, y dx \\ y(0) &= 0; \qquad y(1) = 1 \end{aligned}$$

5. Resuelve el problema

$$\begin{aligned} \text{mín } J(x,y) &= \int_0^1 \left[y^3 + 3x^2 y' \right] dx \\ y(0) &= 1; \qquad y(1) = 1 \end{aligned}$$

6. Resuelve el problema

$$\begin{aligned} \text{mín } J(x,y) &= \int_0^1 \left[2xy - (y')^2 + 3y'y \right] dx \\ y(0) &= 1; \qquad y(1) = -1 \end{aligned}$$

7. Hallar las extremales del problema isoperimético

$$\begin{gathered}
\min\ J(y) = \int_0^1 (y')^2 + x^2 dt \\
\text{s.a.} \int_0^1 y^2 dt = 2 \\
x(0) = 0; \qquad x(1) = 0
\end{gathered}$$

8. Escribir la ecuación diferencial de las extremales del problema isoperimétrico sobre el extremo de la funcional

$$\begin{gathered}
\min\ J(x) = \int_0^{t_1} p(t)\,\dot{x}^2(t) + q(t)\,x^2(t)\,dt \\
\text{s.a.} \int_0^{t_1} r(t)\,x^2(t)\,dt = 1 \\
x(0) = 0; \qquad x(t_1) = 0
\end{gathered}$$

9. Hallar la extremal del problema isoperimétrico sobre el extremo del funcional:

$$\begin{gathered}
\min\ J(x) = \int_0^1 \dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) - 4t\dot{x}_2(t) - 4x_2(t)\,dt \\
\text{s.a.} \int_0^1 \dot{x}_1^2(t) - t\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2^2(t)\,dt = 2 \\
x_1(0) = x_2(0) = 0 \\
x_1(1) = x_2(1) = 1
\end{gathered}$$

10. Sabiendo que la longitud de una curva que une dos puntos $P = (a, A)$ y $Q = (b, B)$ viene dada por la integral

$$L(y) = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx$$

demuestra que la curva que une P con Q con menor longitud es la línea recta que los une.

11. Resuelve para los distintos valores de a el problema siguiente

$$\begin{gathered}
\min\ J(y) = \int_0^1 \left(y^2 + x^2 y'\right) dx \\
y(0) = 0; \qquad y(1) = a
\end{gathered}$$

12. Resuelve, si es posible, el problema siguiente:

$$\begin{gathered}
\min\quad J(y) = \int_0^1 \tfrac{1}{2}(y' - x)^2\,dx \\
y(0) = 1, \qquad y(1) = 2
\end{gathered}$$

13. Resuelve el problema

$$\begin{aligned} \min J(x,y) &= \int_0^1 \left[xy' - y^2\right] dx \\ y(0) &= 0; \qquad y(1) = 1 \end{aligned}$$

14. (*) Halla una curva $y(x)$ con $y(a) = y(b) = 0$, de longitud dada $l_0 > b - a$, de modo que junto con el segmento $a \leq x \leq b$, limite una figura de área máxima, es decir, resuelve el problema siguiente

$$\begin{gathered} \max \int_a^b y(x)\, dx \\ y(a) = y(b) = 0 \\ \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = l_0 \end{gathered}$$

(Ayuda: La solución general es un arco de circunferencia $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \lambda^2$)

15. (*) Geodésicas sobre una superficie: Sea $\varphi(x,y,z) = 0$ una superficie lisa regular en R^3($\varphi \in C^1(D)$, con $D \subseteq R^3$, y además $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \neq 0$). Buscamos una curva $(x(t), y(t), z(t))$ que una los puntos (x_0, y_0, z_0) y (x_1, y_1, z_1) situados sobre la superficie y que sea un extremal para el funcional de la longitud de arco

$$J = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

es decir, buscamos extremales del funcional anterior que cumplan las condiciones

$$\varphi(x,y,z) = 0$$

$$x(a) = x_0 \qquad y(a) = y_0 \qquad z(a) = z_0$$

$$x(b) = x_1 \qquad y(b) = y_1 \qquad z(b) = z_1$$

Resuelve el problema cuando:

a) $\varphi(x,y,z) = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2 - \mathrm{R}^2$
b) $\varphi(x,y,z) = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 - \mathrm{R}^2$

16. Resuelve para los distintos valores de a, el problema siguiente

$$\min \ J(y) = \int_0^2 \left(yy' + [y']^2\right) dx$$

a) Con extremos fijos

$$y(0) = 1; \qquad y(2) = a$$

b) Con extremos variables

$$y(0) = 1; \qquad y(2) \qquad \text{libre}$$

17. Resuelve el siguiente problema

$$\min \quad J(y) = \int_0^1 \tfrac{1}{2}\left((y')^2 + y^2\right) dx$$

para los siguientes casos:

a) Extremos fijos:
$$y(0) = 0; \qquad y(1) = 1$$

b) Extremo inferior libre:
$$y(0) \text{ libre}; \qquad y(1) = 1$$

c) Extremo superior libre
$$y(0) = 0; \qquad y(1) \text{ libre}$$

d) Ambos extremos libres
$$y(0) \text{ libre}; \qquad y(1) \text{ libre}$$

18. Resuelve el siguiente problema

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & J(y) = \int_0^1 \frac{1}{2}\left((y')^2 + y^2\right) dx \\ \text{sujeto a} & \int_0^1 y(x)\, dx = 1 \\ & y(0) = 0; \qquad y(1) = 1 \end{array}$$

(*) Ejercicios con dificultad especial.