

AMPLIACIÓN DE CÁLCULO. Curso 2008/9.

HOJA 9: EL TEOREMA DE LOS RESIDUOS.

1. Determina y clasifica las singularidades de las funciones:

(a) $\frac{1}{z - z^3}$

(b) $\frac{z^4}{1 + z^4}$

(c) $\frac{z^5}{(1 - z)^2}$

(d) $\frac{1}{z(z^2 + 4)^2}$

(e) $\frac{z^2 + 1}{e^z}$

(f) $\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$

(g) $e^{z - \frac{1}{z}}$

2. Calcula los residuos de las siguientes funciones en sus singularidades.

(a) $\frac{1}{z^3 - z^5}$

(b) $\frac{z^2}{(z^2 + 1)^2}$

(c) $\frac{1}{z(1 - z^2)}$

(d) $\frac{\operatorname{sen} z}{(z + 1)^3}$

(e) $\operatorname{tg} z$

(f) $\frac{1}{\operatorname{sen} z}$

(g) $e^{z + \frac{1}{z}}$

(h) $\operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(1/z)$

(i) $\frac{e^{2z}}{(z - 1)^2}$

(j) $\frac{z - \operatorname{sen} z}{z}$

(k) $z \cos(1/z)$

(l) $\frac{1}{z + z^2}$

3. Calcula los residuos de las siguientes funciones en sus singularidades, indicando además de qué tipo son dichas singularidades.

(a) $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{(z + 1)^3},$ (b) $g(z) = e^{-\frac{1}{z}},$ (c) $h(z) = \frac{z - \operatorname{sen} z}{z}$

4. Calcula los residuos de las siguientes funciones en sus singularidades, clasificando éstas previamente.

(a) $f(z) = \frac{z^2}{(z + 1)^3(z + i)},$ (b) $g(z) = e^{1/(z-2i)},$ (c) $h(z) = \frac{z - \operatorname{sen} z}{z(z - 1)}$

5. Utiliza el teorema de los residuos para calcular las integrales siguientes:

(a) $\int_{\gamma} \frac{e^{-z}}{z^2} dz,$

$$\gamma(t) = 3e^{it}, t \in [0, 2\pi]$$

(b) $\int_{\gamma} z^2 e^{1/z} dz,$

$$\gamma(t) = 3e^{it}, t \in [0, 2\pi]$$

(c) $\int_{\gamma} \frac{z + 1}{z^2 - 2z} dz,$

$$\gamma(t) = 3e^{it}, t \in [0, 2\pi]$$

(d) $\int_{\gamma} \frac{z}{(z - 1)(z - 2)} dz,$

$$\gamma(t) = 2 + \frac{e^{it}}{2}, t \in [0, 2\pi]$$

6. Sea $\gamma(t) = 1 + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$. Calcular en función del parámetro r el valor de las siguientes integrales:

(a) $\int_{\gamma} \frac{z - 1}{z^3 + 2z^2 + z} dz.$

(b) $\int_{\gamma} \frac{2z}{z^4 + 2z^2 + 1} dz.$

$$(c) \int_{\gamma} e^z \frac{z^2}{z^3 - 2z^2 + 1} dz.$$

$$(d) \int_{\gamma} z^2 e^{1/z} dz.$$

7. Sea γ el cuadrado de vértices (R, R) , $(-R, R)$, $(-R, -R)$ y $(R, -R)$ recorrido en sentido positivo. Determinar las integrales siguientes en función del parámetro R .

$$(a) \int_{\gamma} \frac{z - 1}{z^3 + 2z^2 + z} dz.$$

$$(b) \int_{\gamma} \frac{2z}{z^4 + 2z^2 + 1} dz.$$

$$(c) \int_{\gamma} e^z \frac{z^2}{z^3 - 2z^2 + 1} dz.$$

$$(d) \int_{\gamma} z^2 e^{1/z} dz.$$

8. Calcula el valor de la integral

$$\int_{\gamma} \frac{e^{1/z}}{\mathbf{i}z + 2} dz$$

siendo γ la curva cuyo rango se representa en la figura siguiente. (10-12-99)

