

AMPLIACIÓN DE CÁLCULO. Curso 2008/9.

HOJA 9: EL TEOREMA DE LOS RESIDUOS.

1. Determina y clasifica las singularidades de las funciones:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \frac{1}{z-z^3} & \text{(b)} \frac{z^4}{1+z^4} & \text{(c)} \frac{z^5}{(1-z)^2} \\ \text{(d)} \frac{1}{z(z^2+4)^2} & \text{(e)} \frac{z^2+1}{e^z} & \text{(f)} \frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{z} \\ \text{(g)} e^{z-\frac{1}{z}} & & \end{array}$$

2. Calcula los residuos de las siguientes funciones en sus singularidades.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \frac{1}{z^3-z^5} & \text{(b)} \frac{z^2}{(z^2+1)^2} & \text{(c)} \frac{1}{z(1-z^2)} \\ \text{(d)} \frac{\operatorname{sen} z}{(z+1)^3} & \text{(e)} \operatorname{tg} z & \text{(f)} \frac{1}{\operatorname{sen} z} \\ \text{(g)} e^{z+\frac{1}{z}} & \text{(h)} \operatorname{sen}(z) \operatorname{sen}(1/z) & \text{(i)} \frac{e^{2z}}{(z-1)^2} \\ \text{(j)} \frac{z-\operatorname{sen} z}{z} & \text{(k)} z \cos(1/z) & \text{(l)} \frac{1}{z+z^2} \end{array}$$

3. Calcula los residuos de las siguientes funciones en sus singularidades, indicando además de qué tipo son dichas singularidades.

$$\text{(a)} f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{(z+1)^3}, \quad \text{(b)} g(z) = e^{-\frac{1}{z}}, \quad \text{(c)} h(z) = \frac{z-\operatorname{sen} z}{z}$$

4. Calcula los residuos de las siguientes funciones en sus singularidades, clasificando éstas previamente.

$$\text{(a)} f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^3(z+\mathbf{i})}, \quad \text{(b)} g(z) = e^{1/(z-2\mathbf{i})}, \quad \text{(c)} h(z) = \frac{z-\operatorname{sen} z}{z(z-1)}$$

5. Utiliza el teorema de los residuos para calcular las integrales siguientes:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int_{\gamma} \frac{e^{-z}}{z^2} dz, & \gamma(t) = 3e^{it}, t \in [0, 2\pi] \\ \text{(b)} \int_{\gamma} z^2 e^{1/z} dz, & \gamma(t) = 3e^{it}, t \in [0, 2\pi] \\ \text{(c)} \int_{\gamma} \frac{z+1}{z^2-2z} dz, & \gamma(t) = 3e^{it}, t \in [0, 2\pi] \\ \text{(d)} \int_{\gamma} \frac{z}{(z-1)(z-2)} dz, & \gamma(t) = 2 + \frac{e^{it}}{2}, t \in [0, 2\pi] \end{array}$$

6. Sea $\gamma(t) = 1 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Calcular en función del parámetro r el valor de las siguientes integrales:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int_{\gamma} \frac{z-1}{z^3+2z^2+z} dz. \\ \text{(b)} \int_{\gamma} \frac{2z}{z^4+2z^2+1} dz. \end{array}$$

$$(c) \int_{\gamma} e^z \frac{z^2}{z^3 - 2z^2 + 1} dz.$$

$$(d) \int_{\gamma} z^2 e^{1/z} dz.$$

7. Sea γ el cuadrado de vértices (R, R) , $(-R, R)$, $(-R, -R)$ y $(R, -R)$ recorrido en sentido positivo. Determinar las integrales siguientes en función del parámetro R .

$$(a) \int_{\gamma} \frac{z-1}{z^3 + 2z^2 + z} dz.$$

$$(b) \int_{\gamma} \frac{2z}{z^4 + 2z^2 + 1} dz.$$

$$(c) \int_{\gamma} e^z \frac{z^2}{z^3 - 2z^2 + 1} dz.$$

$$(d) \int_{\gamma} z^2 e^{1/z} dz.$$

8. Calcula el valor de la integral

$$\int_{\gamma} \frac{e^{1/z}}{iz + 2} dz$$

siendo γ la curva cuyo rango se representa en la figura siguiente. (10-12-99)

