AMPLIACIÓN DE CÁLCULO. Curso 2008/9.

Hoja 4: Integral de superficie.

1. Hallar el plano tangente de las siguientes superficies en el punto especificado:

   a) $x = 2u$, $y = u^2 + v$, $z = v^2$ en $(0, 1, 1)$.
   b) $x = u^2 - v^2$, $y = u + v$, $z = u^2 + 4v$ en $(-1/4, 1/2, 2)$.

2. ¿Son regulares las superficies del ejercicio anterior?

3. Sea $\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$, con $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Demostrar que la ecuación del plano tangente en $\Phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ coincide con el plano tangente de f en el punto (x_0, y_0).

4. Hallar una expresión para un vector unitario normal a la superficie

$$x = \cos v \sin u, \quad y = \sin v \sin u, \quad z = \cos u,$$

   para $(u, v) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. Identificar la superficie.

5. Idem con la superficie

$$x = 3 \cos v \sin u, \quad y = 2 \sin v \sin u, \quad z = \cos u,$$

   para $(u, v) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$.

6. Idem para la superficie

$$x = \sin v, \quad y = u, \quad z = \cos v,$$

   para $(u, v) \in [-1, 3] \times [0, 2\pi]$.

7. Calcular el vector normal a la superficie y determinar la regularidad de la misma siendo

$$x = (2 - \cos v) \cos u, \quad y = (2 - \cos v) \sin u, \quad z = \sin v,$$

   para $(u, v) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$.

8. Demostrar que el plano de ecuación $ax + by + cz = d$ es una superficie y calcular su vector normal.

9. Considerar la superficie de $\mathbb{R}^3$ dada por la parametrización

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta) \text{ con } (r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 4\pi].$$

   Se pide:

   a) Esbozar una gráfica de la misma.
   b) Hallar una expresión para el vector normal unitario.
   c) Hallar la ecuación del plano tangente en un punto (x_0, y_0, z_0) de la superficie.
   d) Si (x_0, y_0, z_0) es un punto de la superficie, mostrar que el segmento horizontal que va del eje z a dicho punto está contenido en la superficie y en el plano tangente de la superficie en dicho punto.

10. Hallar:

    a) Una parametrización para el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$.
    b) El vector normal unitario en cada punto de dicha superficie.
    c) Hallar el plano tangente a la superficie en un punto $(x_0, y_0, 0)$.

11. Hallar las áreas de las superficies de los ejercicios 6, 4, 7 y 9.

12. Sea $\Phi(u, v) = (u - v, u + v, uv)$ definido en el disco unitario D del plano uv. Hallar el área de $\Phi(D) = \mathrm{graf}\Phi$.

13. Hallar una parametrización de la superficie $x^2 - y^2 = 1$ donde $x > 0$, $1 \leq y \leq 2$ y $0 \leq z \leq 1$. Una vez obtenida, calcular el área de dicha superficie.

14. Sea S la superficie obtenida al girar la gráfica de la función $y = f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$, alrededor del eje x. Demostrar que el área de la misma puede expresarse según la fórmula

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

15. Sea S la superficie obtenida al girar la gráfica de la función $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, $a > 0$, alrededor del eje y. Demostrar que el área de la misma puede expresarse según la fórmula

$$2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

16. Sea $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva de Jordan de clase C^1, de manera que su imagen está en el semiplano derecho del plano xy. Demostrar que el área de la superficie generada al rotar la imagen de σ alrededor del eje y es igual a $2\pi\overline{x}l(\sigma)$ donde $l(\sigma)$ es la longitud de la curva σ y $\overline{x}$ es la coordenada promedio x a lo largo de σ.

17. Consideremos el Toro de ecuaciones

$$x = (R - \cos v)\cos u, \quad y = (R - \cos v)\sin u, \quad z = \sin v,$$

para $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Probar que su área es $4\pi^2 R$.

18. Calcular $\iint_S x dS$, donde S es el triángulo con vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

19. Dada una superficie S, con densidad de masa por unidad de superficie $\rho(x, y, z)$ para cada $(x, y, z) \in S$, se puede calcular la masa de la misma con la fórmula

$$\iint_S \rho(x, y, z)dS.$$

Sea $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de la helicoide $S = \Phi(\Omega) = \mathrm{graf}\Phi$ dada por $\Omega = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ y $\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$. Calcular la masa de una helicoide que tenga densidad de masa $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

20. Calcular $\iint_S (x + y + z)dS$ donde S es la esfera de radio 1.

21. Calcular $\iint_S z dS$, donde S es la superficie $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

22. Calcular $\iint_S z^2 dS$, donde S es la frontera del cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

23. Hallar la masa de una superficie esférica de radio R tal que en cada punto (x, y, z) de la misma la densidad de masa es igual al cuadrado de la distancia al centro de la esfera.

24. Sea la temperatura en un punto de $\mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$. El flujo de calor a través de una superficie S se define como $\iint_S -(\nabla T)dS$. Calcular el flujo de calor a través de la superficie $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leq y \leq 1$.

25. Idem pero con temperatura $T(x, y, z) = x$ siendo S la esfera de radio uno.

26. Sea S la superficie cerrada formada por el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ y su base $x^2 + y^2 = 1$. Sea $\mathbf{E}$ el campo eléctrico dado por $\mathbf{E}(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$. Hallar el flujo eléctrico hacia afuera de S.

27. Evaluar $\iint_S \mathrm{rot}\mathbf{F}dS$, donde S es la superficie $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$, $z \leq 0$ y $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, x, zx^3y^2)$. (Tomar el vector normal unitario hacia afuera de S).

28. Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, 2x, -z)$ sobre la porción del plano $2x + y = 6$ situada en el primer octante y limitada por el plano $z = 4$.

29. Hallar el flujo del rotacional de $\mathbf{V}(x, y, z) = (y - 2x, yz^2, -y^2z)$ hacia afuera de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.

30. Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, xy, xyz)$ hacia afuera de la superficie total del cuerpo limitado por las superficies $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $x = 0$, $y = 0$ y $z = c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.

31. Idem para $\mathbf{F}(x, y, z) = (6z, 2x + y, -x)$ sobre la cara de la superficie del cilindro $x^2 + z^2 = 9$ limitada por los plano coordenados (primer octante) y el plano $y = 8$.

32. La lluvia puede ser interpretada como un fluido uniforme que fluye verticalmente hacia abajo y que por tanto, puede ser descrita por el campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (0,0,-1)$. Hallar el flujo de lluvia a través del cono $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$, $z \geq 0$. Si debido al viento, la lluvia cae con una inclinación de 45^o y se describe por $\mathbf{F}(x,y,z) = -(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$, ¿cuál es ahora el flujo a través del cono?

33. Sean
$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\ ,\ 0 \leq z \leq 1\right\},$$
$$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\ ,\ z \geq 1\right\}$$
y $S = S_1 \cup S_2$. Calcular $\iint_S \mathrm{rot}\mathbf{F}dS$ donde $\mathbf{F}(x,y,z) = (zx + z^2y + x,\ z^3yx + y,\ z^4x^2)$.

34. Calcula $\iint_S \mathrm{rot}\mathbf{F}dS$ donde S es la semiesfera $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1,\ x \geq 0\}$ y $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3, -y^3, 0)$.

35. Usar el Teorema de la divergencia para calcular
$$\iint_S (x^2 + y + z)dS$$
siendo $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$.

36. Sea S una superficie cerrada. Usar el Teorema de la divergencia para probar que si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de clase C^2, entonces
$$\iint_S \mathrm{rot}\mathbf{F}dS = 0.$$

37. Sea S una superficie de $\mathbb{R}^3$ tal que encierra un volumen V. Probar las fórmulas de Green
$$\iint_S < f\nabla g, \mathbf{n} > dS = \iiint_V (f\Delta g + < \nabla f, \nabla g >)dxdydz$$
y
$$\iint_S < (f\nabla g - g\nabla f), \mathbf{n} > dS = \iiint_V (f\Delta g - g\Delta f)dzdydz$$
siendo $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones de clase C^2 en el interior de D, con $S \subset D$, y $\mathbf{n}$ el vector normal exterior a la superficie. El operador
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$
es el laplaciano de f.

38. Dado el campo escalar $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ y un campo vectorial $\mathbf{F}$, calcular el flujo del campo $\nabla f + \nabla \times \mathbf{F}$ a través de la esfera $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

39. Siendo $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+2y, -3z, x)$, calcular el flujo del rotacional de $\mathbf{F}$ a través de la superficie $2x+y+2z = 6$ limitada por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$.

40. Calcular el flujo del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (18z, -12, 3y)$ sobre la superficie del tetraedro limitado por los ejes coordenados y el plano $2x + 3y + 6z = 12$.

41. Evaluar $\iint_S \mathbf{F}dS$ donde $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy^2, x^2y, y)$ y S es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ acotada por los planos $z = 1$ y $z = -1$, incluyendo los trozos $x^2 + y^2 \leq 1$ cuando $z = \pm 1$.

42. Evaluar $\iint_S \mathbf{F}dS$ donde $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,-z)$ y S es la frontera del cubo $[0,1]^3$.

43. Evaluar $\iint_S \mathbf{F}dS$ donde $\mathbf{F}(x,y,z) = (1, 1, z(x^2 + y^2)^2)$ y S es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$.

44. Demostrar que si S es una superficie cerrada que encierra un volumen V, entonces
$$\iiint_V < \nabla f, \mathbf{F} > dxdydz = \iint_S f\mathbf{F}dS - \iiint_V f\mathrm{div}\mathbf{F}dxdydz,$$
siendo f y $\mathbf{F}$ campos escalares y vectoriales suficientemente derivables.