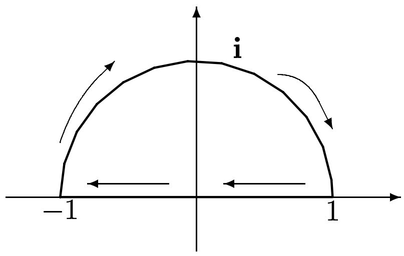
AMPLIACIÓN DE CÁLCULO. Curso 2008/9.

Hoja 7: Integración compleja.

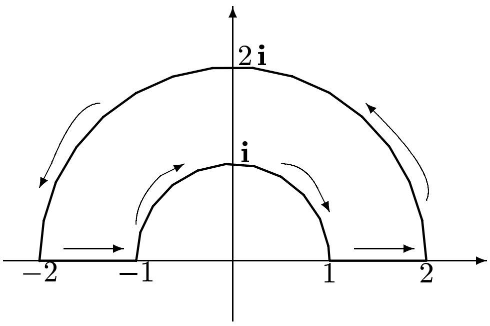
1. Calcular la integral,
$$\int_T \operatorname{Re} z\, dz$$
siendo T el triángulo de vértices 0, $1+i$, 2 recorrido en el sentido de las agujas del reloj. ¿Cuál sería el valor de la integral si el triángulo se recorre en el sentido contrario?

2. Calcular la integral, de la función conjugación, $f(z)=\bar{z}$, a lo largo de la siguiente curva.



3. Calcular la integral, $\displaystyle\int_\gamma |z|\,\overline{z}\,dz$, siendo γ el camino del ejercicio anterior.

4. Calcular el valor de la integral $\displaystyle\int_\gamma z/\overline{z}\,dz$, siendo γ el camino indicado en la figura siguiente:



5. Dado el arco $\gamma(t)=e^{i\,t}$, $t\in[0,2\pi]$, calcular la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz$:

   (a) si $|z_0|>1$

   (b) si $|z_0|<1$

6. Dada la curva $\gamma(t)=e^{i\,t}$, $t\in[0,2\pi]$, calcular la integral,
$$\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} e^z}{z}\,dz$$

7. Calcular el valor de la integral,

$$\int_\gamma \frac{e^{1/z}}{(z-1)^2}\,dz, \qquad \gamma(t) = 1 + \frac{e^{i\,t}}{2}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

8. Comprobar que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2/2 & x \geq 0 \\ -x^2/2 & x < 0 \end{cases}$$

es de clase C^1 pero no existe la segunda derivada en cero. Dado $A \subset \mathbb{C}$ un abierto conteniendo al cero, ¿será posible entontrar una función $F \in \mathcal{H}(A)$ de forma que $F(x) = f(x)$ para cada $x \in A \cap \mathbb{R}$? ¿Por qué?

9. Dado $r > 1$, calcular el valor de la integral,

$$\int_\gamma \frac{\omega}{\omega^4 - 1}\,d\omega, \qquad \gamma(t) = 1 + r\,e^{i\,t}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

10. Calcular la integral,

$$\int_\gamma \frac{z\,e^z}{(z-i)^3}\,dz, \qquad \gamma(t) = i + e^{i\,t}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

11. Calcular la integral,

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z\,(1-z)^3}\,dz$$

(a) para $\gamma(t) = \beta\,e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$ $(0 < \beta < 1)$.

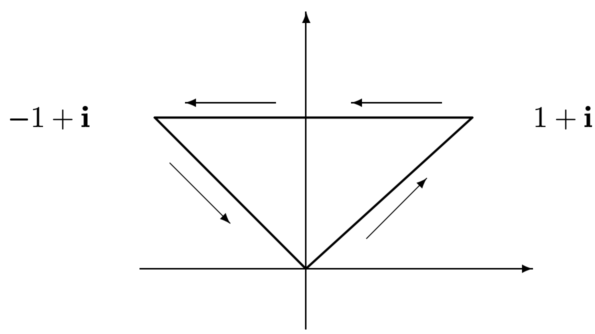
(b) para $\gamma(t) = 1 + \beta\,e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$ $(0 < \beta < 1)$.

(c) para $\gamma(t) = \beta\,e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$ $(1 < \beta)$.

12. Sea la función $f(z) = \operatorname{sen}(\bar{z})$. Se pide calcular:

(a) Los puntos de $\mathbb{C}$ para los cuales f es derivable.

(b) El valor de la integral de f a lo largo de la siguiente curva,



13. Calcular la integral,

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2+9}\,dz$$

(a) para $\gamma(t) = 3\,i + e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$

(b) para $\gamma(t) = -2\,i + 2\,e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$

(c) para $\gamma(t) = 4\,e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$

(d) para $\gamma(t) = e^{i\,t}$, $t \in [0, 2\pi]$

14. Sea γ la circunferencia unidad recorrida en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Calcular:

$$\int_\gamma \frac{e^\omega}{\omega}\, d\omega$$

15. Supongamos que σ es una curva cerrada y diferenciable a trozos. Dado $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{graf}\sigma$ se llama *índice* de σ respecto de z_0 al valor:

$$I(\sigma, z_0) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_\sigma \frac{1}{\omega - z_0}\, d\omega$$

Para el caso en que σ es una circunferencia, comprobar que:

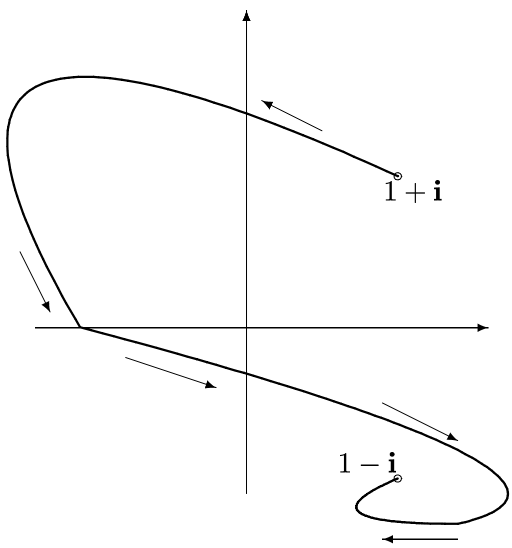
(a) $I(\sigma, z_0) = 1$ si z_0 está en la región limitada por la gráfica de la curva.

(b) $I(\sigma, z_0) = 0$, en otro caso.

16. Calcular el valor de la integral

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$$

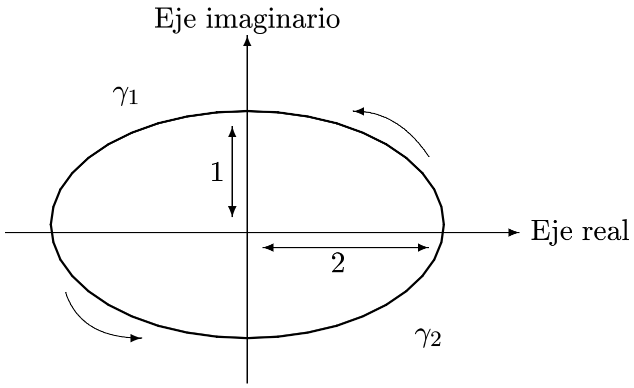
siendo γ la curva cuyo rango se representa en la figura superior, orientada en el sentido que indican las flechas.



17. Calcular el valor de la integral:

$$\int_\gamma \cos\left(\frac{1}{z + 2\,\mathbf{i}}\right)\, dz$$

donde γ es la elipse centrada en el origen de semiejes 2 y 1, respectivamente, recorrida en el sentido contrario al de las agujas del reloj.



Nota: Una posible parametrización de la elipse γ es la dada por

$$\begin{array}{rccl} \gamma_1: & [-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \hookrightarrow & \gamma_1(t) = -t + \mathbf{i}\sqrt{1-\frac{t^2}{4}} \end{array}$$

para la parte de arriba y

$$\begin{array}{rccl} \gamma_2: & [-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \hookrightarrow & \gamma_2(t) = t - \mathbf{i}\sqrt{1-\frac{t^2}{4}} \end{array}$$

para la de abajo ($\gamma = \gamma_1 \sqcup \gamma_2$).

18. Dada la función $g(z) = \cos \overline{z}$, ¿existirá una función derivable en todo $\mathbb{C}$, $f(z)$, de forma que $f'(z) = g(z)$, para cada $z \in \mathbb{C}$? Justificar la respuesta.

19. Calcular el valor de la integral,

$$\int_\gamma \overline{z}\,|z|^2\,dz$$

siendo γ la curva de la figura siguiente, recorrida en el sentido que indican las flechas.