AMPLIACIÓN DE CÁLCULO. Curso 2008/9.

HOJA 3: INTEGRAL DE LÍNEA.

1. Sea $f(x,y,z)=y$ y $\sigma(t)=(0,0,t)$, $0\le t\le 1$. Probar que $\int_\sigma f dt = 0$.

2. Calcular las siguientes integrales de trayectoria $\int_\sigma f dt$ donde:

   a) $f(x,y,z)=x+y+z$ y $\sigma(t)=(\sin t,\cos t,t)$, $t\in[0,2\pi]$.
   b) $f(x,y,z)=\cos z$ y σ el mismo de la parte (a).
   c) $f(x,y,z)=x\cos z$ y $\sigma(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}$, $t\in[0,1]$.

3. Calcula la longitud de las siguientes curvas:

   a) La circunferencia de radio R.
   b) $\sigma(t)=(t,\sin t,\cos t)$, $t\in[0,\pi]$.
   c) $\sigma(t)=(\sin(4t),2t^2,\cos(4t))$, $t\in[0,4\pi]$.

4. Sea $\mathbf{F}(x,y,z)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$. Evaluar la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de las siguientes curvas:

   a) $\sigma(t)=(t,t,t)$, $0\le t\le 1$.
   b) $\sigma(t)=(\cos t,\sin t,0)$, $0\le t\le 2\pi$.
   c) $\sigma(t)=(t^2,3t,2t^3)$, $-1\le t\le 2$.

5. Calcular cada una de las siguientes integrales:

   a) $\int_\sigma x dy - y dx$, $\sigma(t)=(\cos t,\sin t)$, $0\le t\le 2\pi$.
   b) $\int_\sigma x dx + y dy$, $\sigma(t)=(\cos \pi t,\sin \pi t)$, $0\le t\le 2$.
   c) $\int_\sigma yz dx + xz dy + xy dz$ donde σ es la unión de segmentos de recta que unen $(1,0,0)$ a $(0,1,0)$ y este último a $(0,0,1)$.
   d) $\int_\sigma x^2 dx - xy dy + dz$ donde σ es el arco de la parábola $z=x^2$, $y=0$ que une $(-1,0,1)$ con $(1,0,1)$.

6. Calcular las siguientes integrales curvilíneas:

   a) $\int_\sigma 2xyz dx + x^2 z dy + x^2 y dz$,
   b) $\int_\sigma (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$,
   c) $\int_\sigma \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}$,

   siendo σ una curva uniendo los puntos $(1,1,1)$ y $(-1,-1,2)$.

7. Sean σ una curva de clase C^1 y $\mathbf{F}$ un campo vectorial. Demostrar:

   a) Si $\mathbf{F}$ es perpendicular a σ' a lo largo de σ, entonces
   $$\int_\sigma \mathbf{F} dt = 0.$$
   b) Si $\mathbf{F}$ es paralelo a σ' a lo largo de σ, es decir, $\mathbf{F}(\sigma(t))=\lambda(t)\sigma'(t)$ con $\lambda(t)>0$, entonces
   $$\int_\sigma \mathbf{F} dt = \int_\sigma \|\mathbf{F}\|\, ds.$$

8. Evaluar $\int_\sigma y dx + (3y^3-x)dy + z dz$ para cada una de las trayectorias $\sigma(t)=(t,t^n,0)$, $0\le t\le 1$, $n\in\mathbb{N}$.

9. Sea $\mathbf{F}(x,y,z)=(3z^2x+2xy)\mathbf{i}+x^2\mathbf{j}+3zx^2\mathbf{k}$. Mostrar que la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo del perimetro del cuadrado de vértices $(\pm1,\pm1,5)$ es cero.

10. Calcular $\int_\sigma 2xyz dx + x^2 z dy + x^2 y dz$, donde σ es una curva sin autointersecciones que conecta $(1,1,1)$ con $(1,2,4)$.

11. Calcular mediante el Teorema de Green las siguientes integrales curvilineas:

   a) $\oint_\sigma 3ydx + 5xdy$, con σ la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1.
   b) $\oint_\sigma x^2dy$ donde σ es el rectángulo de vértices $(0,0)$, $(a,0)$, (a,b) y $(0,b)$.
   c) $\oint_\sigma (xy+3y^2)dx + (5xy+2x^2)dy$ donde σ es $(x-1)^2+(y-2)^2=1$.

12. Hallar las áreas de la elipse de ecuaciones $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ y la astroide $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

13. Sean $P,Q:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dos funciones de clase $C^1(\Omega)$, con Ω un conjunto simplemente conexo, de manera que $\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$ en Ω. Demostrar que para cualesquiera dos curvas de Jordan σ_1 y σ_2 contenidas en Ω se verifica que

$$\oint_{\sigma_1} Pdx+Qdy=\oint_{\sigma_2} Pdx+Qdy.$$

14. Sea σ una curva de Jordan que no pasa por el origen y que interseca con cada recta que pasa por el origen en a lo sumo dos puntos. Calcular

$$\oint_\sigma -\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$$

en los caso en que σ encierre y no encierre al origen de coordenadas.

15. Idem para

$$\oint_\sigma -\frac{y^3}{(x^2+y^2)^2}dx+\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}dy.$$

16. Sea D una región simplemente conexa. Supongamos que $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es una función armónica, esto es, de clase $C^2(D)$ y satisfaciendo la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0\quad\forall(x,y)\in D.$$

Probar que

$$0=\int_{\mathrm{Fr}(D)}\left(\frac{\partial f}{\partial y}dx-\frac{\partial f}{\partial x}dy\right)=0.$$

17. Sea S una región simplemente conexa. Demostrar que el área de dicha región vale

$$A(S)=\frac{1}{2}\int_{\partial S} xdy-ydx.$$

Indicación: aplicar el teorema de Green al campo $(P(x,y)=-y,\ Q(x,y)=x)$.

18. Como aplicación del ejercicio anterior, calcula el área de la región limitada por la curva

$$\sigma(t)=(a\cos^3 t, a\sin^3 t)\ ,\ 0\le t\le 2\pi.$$

19. Sea σ la trayectoria dada por $\sigma(t)=(t^2,t,3)$, $t\in[0,1]$.

   a) Hallar la longitud de σ, $l(\sigma)$.
   b) Dada $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, se define el valor promedio de f a lo largo de σ como $(\int_\sigma f ds)/l(\sigma)$. Calcular el valor promedio de $f_1(x,y,z)=x$, $f_2(x,y,z)=y$ y $f_3(x,y,z)=z$ (coordenadas promedio).

20. Sea Ω una lámina de densidad constante ρ de manera que su frontera es una curva de Jordan σ de clase C^1. Demostrar que los momentos de inercia de la lámina respecto a los ejes coordenados, I_y e I_x vienen dados por las fórmulas

$$I_x=-\frac{\rho}{3}\oint_\sigma y^3dx\qquad I_y=\frac{\rho}{3}\oint_\sigma x^3dy.$$

21. Sabiendo que la masa de las siguientes varillas homogéneas (densidad de masa constante), vale 10, determinar cuál es la densidad de masa en los siguientes casos:

   a) $\sigma(t)=(\cos t,\sin t)$, $t\in[0,\pi/2]$.
   b) $\sigma(t)=(2\cos t,2\sin t,t^2)$, $t\in[0,2\pi]$.
   c) $\sigma(t)=(t,\sin t,\cos t)$, $t\in[0,3\pi/2]$.