AMPLIACIÓN DE CÁLCULO. Curso 2008/9.

HOJA 6: FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA.

1. Expresar los siguientes números complejos en forma binómica:

   (a) $\operatorname{sen}(2+i)$ (b) $e^{-\pi \mathbf{i}/2}$ (c) $2\,e^{-\pi\mathbf{i}}$ (d) $3\,e^{-\pi\mathbf{i}/2}$

   (e) $\mathbf{i}+3\,e^{2\pi\mathbf{i}}$ (f) $e^{\pi\mathbf{i}/4}-e^{-\pi\mathbf{i}/4}$ (h) $1/e^{-\pi\mathbf{i}/4}$ (i) $e^{1+\pi\mathbf{i}}$

2. Comprobar que son ciertas las igualdades:

   (a) $\sin(iz) = i\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$ (b) $\cos(iz) = \dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$

3. Obtener la parte real y la parte imaginaria de las funciones:

   (a) $f(z) = 3z^2 - iz$, (b) $f(z) = \bar{z} + \dfrac{1}{z}$, (c) $f(z) = z^3 + z + 1$, (d) $f(z) = \dfrac{1-z}{1+z}$

4. Calcular la parte real y la parte imaginaria de las funciones:

   (a) $f(z) = z^2 + i$ (b) $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$

5. Siendo z, z' dos números complejos distintos y $\frac{(z+z')i}{(z-z')} \in \mathbb{R}$. Hallar la relación entre $|z|$ y $|z'|$. (Solución: $|z| = |z'|$).

6. Hallar los números complejos z tales que su cuadrado es igual a su conjugado. (Solución: 0, 1_0, $1_{2\pi/3}$, $1_{4\pi/3}$).

7. Resolver la ecuación $\overline{z} = z^{n-1}$, siendo $n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$. (Solución: 0, $1_{2k\pi/n}$ $n = 0, 1, 2, \ldots, n-1$).

8. Resolver las siguientes ecuaciones:

   a) $e^z + i = 0$. (Solución: $z = \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$).
   b) $4\cos z + 5 = 0$. (Solución: $z = (2k+1)\,\pi \pm i\log 2$, $k \in \mathbb{Z}$).
   c) $e^{-z} + 1 = 0$. (Solución: $z = (2k+1)\,\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$).
   d) $\sin z = 4$. (Solución: $z = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - i\log\left(4 \pm \sqrt{15}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$).

9. Dado el número complejo z, probar que $ze^z + \overline{z}e^{\overline{z}}$ es un número real.

10. Hallar la parte real e imaginaria de las funciones

    (a) $f(z) = \cosh(z-i)$ (b) $f(z) = \tan z$

11. Probar que para cada $z = x + iy \in \mathbb{C}$ se verifican las siguientes desigualdades:

    a) $|\sinh y| \le |\sin z| \le \cosh y$.
    b) $|\sinh y| \le |\cos z| \le \cosh y$.

12. Sea $D = B(0,2) = \{z \in \mathbb{C}/|z| < 2\}$. Calcula y representa gráficamente $f(D)$ para las funciones

    (a) $f(z) = 3 + i + z$ (b) $f(z) = (1+i)z$ (c) $f(z) = 1/z$

13. Estudia la continuidad en el disco $B(0,1) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$ de las funciones

$$\text{(a) } f(z) = \frac{1}{1-z} \qquad \text{(b) } f(z) = \frac{1}{z^2 + 1/2}$$

14. Se considera la función

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1+z^2}{z-i} & siz \neq i \\ 4i & siz = i \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de $f(z)$ en el punto $z = i$.

15. Estudia la continuidad de la función $f(z) = (z^5 + 1)/(z^2 + 4)$.

16. Halla los puntos del círculo $B(0,2)$ en los que es discontinua la función

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)\cdot(z-3)}$$

17. Determina los puntos singulares de las siguientes funciones:

$$\text{(a) } f(z) = \frac{2z+1}{z(z^2+1)} \qquad \text{(b) } f(z) = \frac{z^3+i}{z^2-3z+2} \qquad \text{(c) } f(z) = \frac{z^2+1}{(z+2)(z^2+2z+2)}$$

18. Calcula, a partir de las condiciones de Cauchy-Riemann, las derivadas de las funciones

$$\text{(a) } f(z) = e^z \qquad \text{(b) } f(z) = \operatorname{sen} z \qquad \text{(c) } f(z) = \cos z \qquad \text{(d) } f(z) = ize^z$$

19. Estudia si las siguientes funciones definidas en $\mathbb{C}$ son derivables y en caso afirmativo calcular $f'(z)$

(a) $f(z) = \overline{z} \cdot Imz$ (b) $f(z) = z \cdot Imz$ (c) $f(x+iy) = e^{-y}e^{ix}$

(d) $f(z) = z \cdot \overline{z}$ (e) $f(z) = (z^2-2)e^{-z}$ (f) $f(x+iy) = e^{y}e^{ix}$

(g) $f(z) = (z^2 + \cos z)e^z$ (h) $f(z) = \operatorname{sen} 2z + i$ (i) $f(x+iy) = xy + iy$

20. Calcula los valores de los parámetros reales α, β y γ para que sea entera (derivable en todo $\mathbb{C}$) la función

$$f(z) = Rez + \alpha \cdot Imz + i(\beta \cdot Rez + \gamma \cdot Imz)$$

Caracteriza la función $f(z)$ cuando sea entera.

21. Comprueba que la función $f(z) = \sqrt{|(Rez)\cdot(Imz)|}$ no es derivable en $z = 0$ y, sin embargo, verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann en dicho punto. Razona esta aparente contradicción.

22. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que cumple que $f(z) \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{C}$. Demuestra que $f(z)$ es derivable si y sólo si es constante.

23. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función de variable compleja. Demuestra que la parte real $Ref(z)$ y la parte imaginaria $Imf(z)$ son simultáneamente derivables si y sólo si $f(z)$ es constante.

24. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función de forma que $f(z)$ y $\overline{f}(z)$ son derivables. Demuestra que $f(z)$ es constante.

25. Una función $u : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se dice que es *armónica* en el conjunto abierto D si es de clase $C^2(D)$ (existen sus derivadas parciales de orden dos y son funciones continuas) y verifica la relación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \forall z \in D.$$

Dada una función derivable $f : D \to \mathbb{C}$, comprueba que las funciones parte real $u(x,y) = Ref(x+iy)$ y parte imaginaria $v(x,y) = Imf(x+iy)$ son armónicas en D. **Nota:** Supón, aunque posteriormente veremos que esta suposición es superflua, que las funciones parte real y parte imaginaria de f son de clase $C^2(D)$.

26. Estudia si son armónicas las funciones

(a) $f(x,y) = \log(x^2+y^2)$ (b) $f(x,y) = 2e^x \cos y$

27. Dada una función $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, derivable en el abierto D, se define la aplicación $\phi(z) = |f(z)|^2$. Comprueba que se verifica la igualdad

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(z) = 4|f'(z)|^2$$

para cada $z \in D$. **Nota:** Supón, aunque posteriormente veremos que esta suposición es superflua, que las funciones parte real y parte imaginaria de f son de clase $C^2(D)$.

28. Si D es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica, se llama armónica conjugada a toda función $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumpla que que la nueva función $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ es derivable en D. Prueba que las siguientes funciones son armónicas y halla una armónica conjugada

(a) $u(x,y) = 2x(1-y)$ (b) $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$ (c) $u(x,y) = y/(x^2+y^2)$

29. Determina una función derivable $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, sabiendo que su parte real es $u(x,y) = x/(x^2+y^2)$ y que $f(\pi) = 1/\pi$.

30. Reconstruye la función derivable $f(z)$ a partir la condición $f(i) = 2i - 1$ y la parte real $Ref(x+iy) = x^2 - y^2 + 2x$.

31. Prueba que si $v_1(x,y)$ y $v_2(x,y)$ son dos funciones armónicas conjugadas de una misma función armónica $u(x,y)$ en $\mathbb{C}$, entonces $v_1(x,y)$ y $v_2(x,y)$ difieren en una constante.

32. Sean $u, v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $u(x,y)$ es armónica conjugada de $v(x,y)$ y $v(x,y)$ es armónica conjugada de $u(x,y)$. Prueba que tanto $u(x,y)$ como $v(x,y)$ son constantes.

33. Expresa $Re(e^{1/z})$ en términos de x e y y prueba que esta función es armónica en el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

- **Nota:** Se definen las funciones hiperbólicas complejas $\sinh z := (e^z - e^{-z})/2$ y $\cosh z := (e^z + e^{-z})/2$. Las funciones tangente y tangente hiperbólica se definen de la forma usual, esto es, $\tan z := \sin z / \cos z$ y $\tanh z := \sinh z / \cosh z$. Las restantes funciones trigonométricas e hiperbólicas complejas se definen de forma similar.