

AMPLIACIÓN DE CÁLCULO. Curso 2008/9.

HOJA 2: CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES.

1. Calcular el gradiente de los siguientes campos escalares:

- a) $f(x, y, z) = e^{xyz}$.
- b) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
- c) $f(x, y, z) = \sin(xyz)$.
- d) $f(x, y, z) = \cos(x + y + z)$.

2. Calcular la divergencia y el rotacional de los siguientes campos:

- a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin x)\mathbf{i} + (\cos y)\mathbf{j}$.
- b) $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$.
- c) $\mathbf{F}(x, y, z) = ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} - cz\mathbf{k}$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- d) $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$.
- e) $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$.
- f) $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + x^2y^2z^2\mathbf{j} + y^2z^3\mathbf{k}$.

3. Sea $f \in C^2(D, \mathbb{R})$. Se define el *Laplaciano de f* como la divergencia del gradiente de f , esto es

$$\nabla^2 f = \langle \nabla, \nabla f \rangle = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Una función f se dice *armónica* si $\nabla^2 f = 0$. Identificar cuáles de las siguientes funciones son armónicas:

- a) $f(x, y) = e^x \cos y$.
- b) $f(x, y, z) = e^{-x}(\cos y - \sin y)$.
- c) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$.

4. Dadas las funciones $\mathbf{F}(x, y, z) = 2\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$ y $\mathbf{G}(x, y, z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, calcular:

- a) $\operatorname{rot}(\mathbf{F} \times \mathbf{G})$.
- b) $\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G})$.

5. Sean f y g dos campos escalares, $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ dos campos vectoriales y $\alpha \in \mathbb{R}$. Demostrar las siguientes propiedades:

- a) $\nabla(\alpha f) = \alpha \nabla(f)$.
- b) $\nabla(f + g) = \nabla(f) + \nabla(g)$.
- c) $\nabla(f/g) = (g\nabla(f) - f\nabla(g))/g^2$, $g \neq 0$.
- d) $\nabla(fg) = f\nabla(g) + g\nabla(f)$.
- e) $\operatorname{div}(\alpha \mathbf{F}) = \alpha \operatorname{div}(\mathbf{F})$.
- f) $\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div}(\mathbf{F}) + \operatorname{div}(\mathbf{G})$.
- g) $\operatorname{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{rot}(\mathbf{F}) + \operatorname{rot}(\mathbf{G})$.
- h) $\operatorname{rot}(\alpha \mathbf{F}) = \alpha \operatorname{rot}(\mathbf{F})$.

$$i) \quad \operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \langle \operatorname{rot}(\mathbf{F}), \mathbf{G} \rangle - \langle \mathbf{F}, \operatorname{rot}(\mathbf{G}) \rangle .$$

$$j) \quad \operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = f\operatorname{rot}(\mathbf{F}) + (\nabla f \times \mathbf{F}).$$

$$k) \quad \operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f\operatorname{div}(\mathbf{F}) + \langle \nabla f, \mathbf{F} \rangle .$$

$$l) \quad \operatorname{div}(f\nabla g) = f\operatorname{div}(\nabla g) + \langle \nabla f, \nabla g \rangle .$$

6. Determinar si los siguientes campos vectoriales son conservativos y en caso de serlo obtener su función potencial:

$$a) \quad \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{i} + \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{j} + \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\mathbf{k}.$$

$$b) \quad \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{x}\mathbf{i} + \frac{1}{y}\mathbf{j} + \frac{1}{z}\mathbf{k}.$$

$$c) \quad \mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2)\mathbf{i} + 2yx\mathbf{j}.$$

$$d) \quad \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\mathbf{k}.$$

$$e) \quad \mathbf{F}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}.$$

$$f) \quad \mathbf{F}(x, y, z) = (4x + 2y + 2z)\mathbf{i} + (2x + 4y + 2z)\mathbf{j} + (2x + 2y + 4z)\mathbf{k}.$$

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase C^2 . Comprobar que

$$\frac{1}{x^2 + y^2} \left(\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x, y) + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x, y) \right) = 4 \left(\frac{\delta^2 f}{\delta u^2}(u, v) + \frac{\delta^2 f}{\delta v^2}(u, v) \right)$$

donde $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$.

8. Demostrar que si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar de clase C^2 y se verifica la igualdad

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(x, y) + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}(x, y) = 0,$$

entonces también se verifica

$$\frac{\delta^2 f}{\delta u^2}(u, v) + \frac{\delta^2 f}{\delta v^2}(u, v) = 0$$

donde $x = u / (u^2 + v^2)$ e $y = v / (u^2 + v^2)$.