AMPLIACIÓN DE CÁLCULO. Curso 2008/9.

Hoja 5: El cuerpo de los números complejos.

1. Expresar los siguientes números complejos en forma binómica:

$$\begin{array}{llll} \text{(a) } (1+i)^3 & \text{(c) } \frac{2+3i}{3-4i} & \text{(e) } i^5+i^{16} & \text{(g) } 1+i+i^2+i^3 \\ \text{(b) } \frac{1}{i} & \text{(d) } (1+\mathrm{i}\sqrt{3})^3 & \text{(f) } 2_{\pi/2} & \text{(h) } 1_{\pi/4} \end{array}$$

2. Escribir en forma algebráica los complejos siguientes, donde ρ denota el módulo y θ un argumento

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \rho=2, \theta=\pi & \text{b) } \rho=1, \theta=-\pi/4 \\ \text{c) } \rho=\sqrt{2}, \theta=\pi/3 & \text{d) } \rho=2, \theta=-\pi/2 \end{array}$$

3. Calcular las siguientes raíces:

$$\begin{array}{llll} \text{(a) } \sqrt[3]{1} & \text{(c) } \sqrt[3]{i} & \text{(e) } \sqrt[6]{-8} & \text{(g) } \sqrt[4]{-1} \\ \text{(b) } \sqrt[8]{1} & \text{(d) } \sqrt{1-i} & \text{(f) } \sqrt{3+4i} & \text{(h) } \sqrt[3]{-2+2i} \end{array}$$

4. Calcular el módulo y el argumento de los siguientes números complejos:

$$\text{(a) } 3+4i \quad \text{(b) } \frac{1+i}{1-i} \quad \text{(c) } \mathrm{i}^7+i^{10} \quad \text{(f) } 1+i+i^2$$

5. Calcular el módulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

$$\begin{array}{llll} \text{(a) } 2i & \text{(c) } -3i & \text{(e) } -1 & \text{(g) } \sqrt[4]{-1} \\ \text{(b) } 3 & \text{(d) } \frac{1+i}{\sqrt{2}} & \text{(f) } -3+i\sqrt{3} & \text{(h) } \sqrt[3]{-2+2i} \end{array}$$

6. Representar gráficamente los siguientes conjuntos de números complejos:

$$\begin{array}{lll} \text{(a) } \{z\in\mathbb{C}: |z|=1\} & \text{(c) } \{z\in\mathbb{C}: |z|\le 1\} & \text{(e) } \{z\in\mathbb{C}: z+\overline{z}\le 1\} \\ \text{(b) } \{z\in\mathbb{C}: z-\overline{z}=i\} & \text{(d) } \{z\in\mathbb{C}: \mathrm{Im}z<0\} & \text{(f) } \{z\in\mathbb{C}: |\mathrm{Re}z|<1\} \end{array}$$

7. Representar gráficamente el conjunto de los puntos del plano z tales que se verifica:

$$\begin{array}{llll} \text{(a) } \mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=z\overline{z} & \text{(b) } |z|^{-1}\ge 1,\ (z\ne 0) & \text{(c) } |z-5i|=8 & \text{(d) } |z-5i|=8 \\ \text{(e) } \mathrm{Im}(z^2)>2 & \text{(f) } \mathrm{Re}(\overline{z^{-1}})=1 & \text{(g) } 2<|z|<3 & \text{(h) } \left|\frac{z-1}{z+1}\right|\le 1 \\ \text{(i) } |z-2|=|1-2\overline{z}| & \text{(j) } \mathrm{Re}\left(z^2-z\right)=0 & & \end{array}$$

8. Dados los números complejos $z_1=-2-i$ y $z_2=-4+i$. Hallar z_1+z_2, $3z_1-2z_2$, z_1z_2, $(z_2)^{-1}$, $\frac{z_1}{z_2}$.

9. Si $z_1=6i$ y $z_2=8-i$, hallar z_1z_2, $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{z_2}{z_1}$, $z_2^2-z_1$.

10. Hallar las partes real e imaginaria del complejo $z=\frac{1-i}{1+i}$.

11. Determinar x e y, para que se cumpla la igualdad $(1+i)(x+iy)=i$.

12. Calcular $(2+2i)^2$, $(2-2i)^2$, $(2+2i)(2-2i)$.

13. Demostrar que $|z|=1 \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z^{-1})$.

14. Encontrar las cuatro raíces cuartas de $z_1=-8(1-\sqrt{3}i)$ y de $z_2=-81$.

15. Calcular $(-1+\sqrt{3}i)^{30}$, $\sqrt[3]{-1+i}$.

16. ¿En qué vector se transforma $-\sqrt{3}+3i$ al girarlo $\pi/2$?.¿Qué ángulo es necesario girarlo para que el resultado sea $2\sqrt{3}i$?

17. Demostrar la *identidad de Lagrange*, para $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

Indicación: Considerar el número complejo $z=(a+bi)(c+di)$ y hallar su módulo de dos modos diferentes.

18. Sea $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ un polinomio con coeficientes reales, esto es, $a_i \in \mathbb{R}$ para $0 \le i \le n$. Se pide:

   a) Comprobar que para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple la igualdad $p(\overline{z})=\overline{p(z)}$.

   b) Usando el apartado anterior, probar que si z_0 es solución compleja de $P(z)=0$, entonces su conjugado también es solución.

   c) Calcular todas las soluciones de $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$.

19. Resolver las ecuaciones

$$\text{(a) } x^2+1=0 \quad \text{(b) } x^3+2=0 \quad \text{(c) } x^5+64=0 \quad \text{(d) } (x^2+4)(x-1)^2=0.$$

20. Estudiar la convergencia de las siguientes series complejas:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2i)^2}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+i}{n}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1+i)^n}{n}$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2^n)+\frac{i}{n}}{n^2}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(in)^n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n+i\sin n}{n!}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)+i\sin(n\pi)}{n}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{in\sin n}{3^n}$

21. Dada la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, comprobar que es absolutamente convergente si $|z|<1$ y que es divergente para $|z|>1$. Estudiar su carácter para $z \in \{1,-1,i,-i\}$.

22. Supongamos que $\preceq$ es una relación de orden sobre $\mathbb{C}$ de manera que restringida a $\mathbb{R}$ coincide con la usual, es decir, si $x,y \in \mathbb{R}$, entonces $x \preceq y$ si y sólo si $x \le y$. Supongamos que $\preceq$ cumple las condiciones de compatibilidad:

   (P1) $z \preceq z'$ si y sólo si $z+w \preceq z'+w$ para todo $w \in \mathbb{C}$.

   (P2) $z \preceq z'$ y $0 \preceq w$ implica $z \cdot w \preceq z' \cdot w$.

   Comprobar que para dicha relación se cumple que $i \not\preceq 0$ y $0 \not\preceq i$, con lo que $\mathbb{C}$ no está totalmente ordenado.

23. Comprobar que la relación $\preceq$ definida por

$$z \preceq z' \Leftrightarrow \text{Re}z \le \text{Re}z' \text{ e } \text{Im}z \le \text{Im}z'$$

es de orden sobre $\mathbb{C}$ y verifica las hipótesis (P1) y (P2) del ejercicio anterior.

24. Dados $z,w \in \mathbb{C}$ comprobar las desigualdades:

   a) $|z-w| \ge ||z|-|w||$.

   b) $|z-w|^2+|z+w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$.

   c) $|1-\overline{z}w|^2-|z-w|^2=(1-|z|^2)(1-|w|^2)$.