AMPLIACIÓN DE CÁLCULO. Curso 2008/9.

Hoja 1: Integración en varias variables.

1. Calcular para $\Omega = [0,1] \times [0,3]$ las integrales

$$\text{(a)} \iint_\Omega xydxdy. \quad \text{(b)} \iint_\Omega xe^y dxdy. \quad \text{(c)} \iint_\Omega y^2 \sin x dxdy.$$

2. Calcular las integrales dobles siguientes en los recintos que se indican:

   (a) $\iint_\Omega ydxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   (b) $\iint_\Omega (3y^3 + x^2)dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   (c) $\iint_\Omega \sqrt{xy}dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1,\ y^2 \leq x \leq y\}$.

   (d) $\iint_\Omega ye^x dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, \_0 \leq x \leq y^2\}$.

   (e) $\iint_\Omega y + \log x dxdy$ en $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0.5 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\}$.

3. Calcular las integrales dobles siguientes en los recintos que a continuación se dan:

   (a) $\iint_\Omega (4 - y^2)dxdy$ en el recinto limitado por las ecuaciones $y^2 = 2x$ e $y^2 = 8 - 2x$.

   (b) $\iint_\Omega (x^4 + y^2)dxdy$ en el recinto limita

   (c) do por $y = x^3$ e $y = x^2$.

   (d) $\iint_\Omega (x + y)dxdy$ en el recinto limitado por $y = x^3$ e $y = x^4$ con $-1 \leq x \leq 1$.

   (e) $\iint_\Omega (3xy^2 - y)dxdy$ en la región limitada por $y = |x|$, $y = -|x|$ y $x \in [-1,1]$.

4. Calcular la superficie de las siguientes regiones:

   (a) Círculo de radio R.

   (b) Elipse de semiejes a, b.

   (c) La región limitada por las ecuaciones $x^2 = 4y$ y $2y - x - 4 = 0$.

   (d) La región limitada por las ecuaciones $x + y = 5$ y $xy = 6$.

   (e) La región limitada por las ecuaciones $x = y$ y $x = 4y - y^2$.

5. Calcular el volumen de los siguientes sólidos:

   (a) El limitado por $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ y los planos de coordenadas.

(b) El tronco limitado superiormente por $z = 2x + 3y$ e inferiormente por el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

(c) Esfera de radio R.

(d) Cono de altura h y radio de la base R.

(e) El tronco limitado superiormente por la ecuación $z = 2x + 1$ e inferiormente por el disco $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$.

6. Calcular cambiando a coordenadas polares:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dxdy.$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dydx.$

(c) $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} dydx.$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{1/2} \int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} xy\sqrt{x^2 + y^2} dxdy.$

7. Calcular para $\Omega = [0, 1] \times [0, 3] \times [-1, 1]$ las integrales

$$\text{(a)} \iiint_\Omega xyz dxdydz. \quad \text{(b)} \iiint_\Omega xe^{y+z} dxdydz. \quad \text{(c)} \iiint_\Omega y^2 z^3 \sin x dxdydz.$$

8. Calcular las integrales que a continuación se piden en los recintos correspondientes:

(a) $\displaystyle\iiint_\Omega (y^3 + z + x) dxdydz$ en $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

(b) $\displaystyle\iiint_\Omega (y \sin z + x) dxdydz$ en $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq z \geq y^2,\ 0 \leq x, y \leq 1\}$.

(c) $\displaystyle\iiint_\Omega x dxdydz$ en $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \geq y^2 + x^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

(d) $\displaystyle\iiint_\Omega yxz dxdydz$ en $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -5 \leq z \leq y^2 + x,\ -1 \leq x, y \leq 1\}$.

9. Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por $z = 1$ e inferiormente por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

10. Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por el cilindro parabólico $z = 1 - y^2$, inferiormente por el plano $2x+3y+z+10 = 0$ y lateralmente por el cilindro circular $x^2+y^2+x = 0$.

11. Hallar el volumen del sólido limitado por los paraboloides de ecuaciones $z = 2 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$.

12. Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por la superficie cilíndrica $x^2 + z = 4$, inferiormente por el plano $x + z = 2$ y lateralmente por los planos $y = 0$ e $y = 3$.

13. Haciendo uso de las coordenadas esféricas $x = r\sin\phi\cos\theta$, $y = r\sin\phi\sin\theta$ y $z = r\cos\phi$, calcular:

   (a) El volumen de una esfera de radio R.

   (b) $\displaystyle\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz$ en el recinto $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 2\}$.

   (c) El volumen del recinto del apartado (b).

14. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las ecuaciones $z = x^2 + 4y^2$, el plano $z = 0$ y lateralmente por los cilindros $x = y^2$ y $x^2 = y$.

15. Calcular $\displaystyle\iint_\Omega e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy$ siendo Ω el triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta $x + y = 1$.

16. Calcular el volumen comprendido entre los cilindros $z = x^2$ y $z = 4 - y^2$.

17. Calcular el volumen del balón de Rugby de ecuaciones $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

18. Calcular $\displaystyle\iint_\Omega xydxdy$ donde Ω es la región limitada por las curvas $y = 2x$, $y = 2x - 2$, $y = x$ e $y = x + 1$. Indicación: hacer el cambio de variable $x = u - v$, $y = 2u - v$.

19. Calcular el volumen encerrado por un cilindro de radio $r/2$ y una esfera de radio r cuyo centro está situado en un punto de la superficie del cilindro. Indicación: hacer el cambio a coordenadas cilíndricas.

20. Calcular
$$\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$
donde Ω es la región limitada por las esferas $x^2+y^2+z^2 = a^2$ y $x^2+y^2+z^2 = b^2$, donde $0 < b < a$. Indicación: hacer el cambio a coordenadas esféricas.

21. Sea S un sólido de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Dado un punto $(x,y,z) \in S$ (si S es una lámina, se entenderá en este y en el resto de los ejercicios que $z = 0$), se define la densidad de masa en dicho punto, $\rho(x,y,z)$ como la masa por unidad de volumen o superficie. Se tiene entonces que la masa del sólido es
$$M = \iiint_S \rho(x,y,z)dxdydz$$
si se trata de un sólido tridimensional y
$$M = \iint_S \rho(x,y)dxdy$$
en caso de un sólido bidimensional. Calcular la masa de los siguientes sólidos:

   (a) S es el círculo de centro $(0,0)$ y radio r con densidad de masa $\rho(x,y) = x^2 + y^2$.

   (b) S es la esfera centrada en $(0,0,0)$, con radio r y homogénea, es decir, con densidad de masa constante. Idem si la densidad de masa es $\rho(x,y,z) = x$.

(c) $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$ con densidad de masa $\rho(x,y,z)=x^2+y^2$.

(d) S está limitado por $z=x^2+y^2$, $0\leq z\leq 4$ y $\rho(x,y,z)=z$.

22. Una lámina de masa M tiene la forma

$$\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -R\leq x\leq R, 0\leq y\leq\sqrt{R^2-x^2}\}$$

con $R>0$. Hallar el centro de masas sabiendo que la densidad es proporcional a la distancia al borde curvado.

23. Sea S un sólido de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ con densidad de masa $\rho(x,y,z)$. Se define el centro de masas de S como el punto (x_M,y_M,z_M) donde

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{1}{M}\iiint_S x\rho(x,y,z)dxdydz,\\ y_M &= \frac{1}{M}\iiint_S y\rho(x,y,z)dxdydz,\\ z_M &= \frac{1}{M}\iiint_S z\rho(x,y,z)dxdydz. \end{aligned}$$

Si S es plano habría que considerar únicamente integrales dobles. Calcular los centros de masa del ejercicio 21.

24. Sea S un sólido de $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^3$ y consideremos una recta en L en $\mathbb{R}^3$. Dado el punto $(x,y,z)\in S$, sea la distancia del punto (x,y,z) a la recta L. Se define entonces el momento de inercia de S con respecto a L como

$$I_L=\iiint\limits_S \rho(x,y,z)r(x,y,z)^2dxdydz,$$

donde $\rho(x,y,z)$ es la densidad de masa. Se define el radio de giro respecto de la recta L como $k=\sqrt{I/M}$, donde M es la masa de S. Obtener los momentos de inercia y los radios de giro siguientes:

25. Dado un sólido S de $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^3$ y un sistema de referencia en su centro de masas, el momento de inercia respecto de los ejes x, y y z es

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \iiint_S \rho(x,y,z)(y^2+z^2)dxdydz;\\ I_{yy} &= \iiint_S \rho(x,y,z)(x^2+z^2)dxdydz;\\ I_{zz} &= \iiint_S \rho(x,y,z)(x^2+y^2)dxdydz; \end{aligned}$$

donde $\rho(x,y,z)$ es la densidad de masa del sólido en el punto (x,y,z). Las cantidades

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx}=\iiint_S \rho(x,y,z)xydxdydz;\\ I_{xz} &= I_{zx}=\iiint_S \rho(x,y,z)xzdxdydz;\\ I_{yz} &= I_{zy}=\iiint_S \rho(x,y,z)yzdxdydz; \end{aligned}$$

miden las perturbaciones provocadas en los ejes z, y y x al producirse el giro del cuerpo y se conocen con el nombre de productos de inercia. Cuando dichas cantidades son nulas sobre un eje, éste es lo que se llama un eje principal de inercia del sólido. Se construye el tensor de inercia como la matriz simétrica

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}.$$

Como podemos apreciar dicha matriz es diagonalizable. Los ejes principales de inercia del sólido estarán generados entonces por los vectores propios asociados a los valores propios de la matriz I, que además podrán ser elegidos perpendiculares si elegimos una base ortonormal al diagonalizar la matriz. Obtener los ejes principales de inercia de los siguientes sólidos:

(a) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ y $\rho(x,y) = k$.

(b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ y $\rho(x,y) = k$.

(c) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq R^2,\ 0 \leq z \leq h\}$ y $\rho(x,y) = k$.

(d) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq h\}$ y $\rho(x,y) = k$.

(e) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq z,\ 0 \leq z \leq h\}$ y $\rho(x,y) = k$.

(f) $S = [-a,a] \times [-b,b]$ y $\rho(x,y) = x$.

(g) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ y $\rho(x,y) = z$.

26. Dado un sólido S en $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^2$, se define su momento de inercia respecto a un punto P como

$$I_P = \iiint_S \rho(x,y,z) r(x,y,z)^2 dxdydz,$$

donde $r(x,y,z)$ es la distancia del punto $(x,y,z) \in S$ a P. Demostrar que

$$2I_{C_M} = I_{xx} + I_{yy} + I_{zz},$$

donde C_M es el centro de masas del sólido.

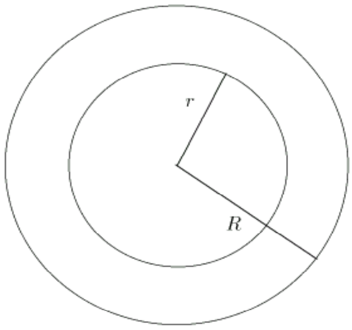
27. **Teorema del eje perpendicular.** En la notación del ejercicio 25 probar que si S es un sólido plano, entonces

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}.$$

28. **Teorema del eje paralelo.** Sea S un sólido en $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^3$ de masa M, y una recta l_M que pasa por el centro de masas del sólido. Sea l una recta paralela a l_M. Si I_M e I son los momentos del sólido respecto de l_M y l respectivamente y d es la distancia entre ambas rectas, demostrar que

$$I = I_M + d^2 M.$$

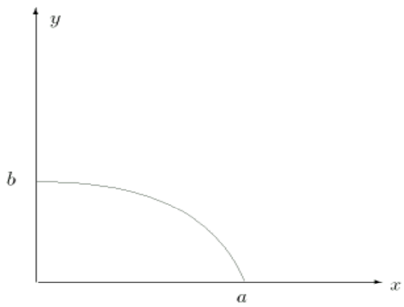
29. Una lámina homogénea de masa M tiene forma de anillo como muestra la siguiente figura



Calcular el momento de inercia de la lámina en los siguientes casos:

(a) Respecto de un diámetro.
(b) Respecto de una tangente a la circunferencia interior.
(c) Respecto de una tangente a la circunferencia exterior.

30. Se coloca en el plano xy una lámina homogénea de masa M con forma de cuarto de elipse, como muestra la siguiente figura



Hallar I_x, I_y e I_z.