Exámenes de ampliación de cálculo

Jose S. Cánovas Peña

26 de febrero de 2008

Advertencia: Estos ejercicios no han sido corregidos convenientemente. Si encuentras algún error escríbeme para que lo corrija en sucesivas versiones.

Índice General

Capítulo 1

20–6–2005

Enunciado

1. **(1 Pto.)** Indicar de forma razonada si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: existe una curva γ cerrada, simple y diferenciable a trozos verificando

$$\int_\gamma z^2 + \cos(1/z)\, dz = 2\pi i.$$

2. **(1 Pto.)** Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua de forma que

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = 1$$

con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Determinar el valor de la integral

$$\iint_E f\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) dudv$$

donde $E = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} < 1\right\}$, con $a, b > 0$.

3. **(2 Ptos.)** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ la región del espacio descrita mediante las ecuaciones

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\right\}$$

Se pide:

(a) Enunciar el teorema de cambio de variable para integrales.

(b) Comprobar que la aplicación $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como

$$\phi(u, v, z) = (au, bv, z)$$

con $a, b > 0$ constantes, es un cambio de variable.

(c) Suponiendo $\rho(x,y,z) = (1+x^2+y^2)\cos(z)$ indica el valor de la densidad en cada punto $(x,y,z) \in \Omega$, calcular la masa del conjunto

$$m(\Omega) = \iiint_{\Omega} \rho(x,y,z)\, dxdydz$$

4. **(2 Ptos.)** Consideremos un sólido $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ sobre el que se tiene una distribución de temperaturas descrita por el campo escalar $T(x,y,z) = x^4 + yz^2$. Como consecuencia de la ley de Fourier sabemos que el flujo térmico vendrá dado por el campo vectorial

$$J(x,y,z) = -\kappa \nabla T(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \mathcal{M},$$

siendo $\kappa > 0$ la constante de conductividad térmica. Teniendo en cuenta que $\mathcal{M}$ puede describirse como unión de los conjuntos $\mathcal{M}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq (2-z)^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$ y $\mathcal{M}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 1,\ z > 1\}$:

(a) Enunciar el teorema de la divergencia de Gauss.

(b) Calcular el flujo de calor a través de la frontera de $\mathcal{M}$.

5. **(2 Ptos.)** Dada la circunferencia $\gamma(t) = 1 + i + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ y la integral

$$\int_{\gamma} \left(z^4 e^{1/z} + \frac{\sin z}{z(z^2+1)^2} \right) dz,$$

se pide:

(a) Enunciar el teorema de los residuos, explicando claramente todos los conceptos que aparezcan en su enunciado.

(b) Determinar el valor de la integral anterior en función del valor del radio $r > 0$.

6. **(2 Ptos.)** Calcula el desarrollo en serie de Laurent alrededor del punto $z_0 = 1$ de la función

$$f(z) = e^{1/(z-1)} + \frac{2i}{z(z-1)}$$

Indicar además el anillo de convergencia, clasificar el tipo de singularidad y determinar el valor del residuo de f en $z_0 = 1$.

Examen resuelto

Indicar de forma razonada si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: existe una curva γ cerrada, simple y diferenciable a trozos verificando

$$\int_\gamma z^2 + \cos(1/z)\, dz = 2\pi i.$$

Solución. Dividimos

$$\int_\gamma z^2 + \cos(1/z)\, dz = \int_\gamma z^2 dz + \int_\gamma \cos(1/z) dz.$$

Como z^2 es derivable, por el teorema de Cauchy

$$\int_\gamma z^2 dz = 0.$$

Por otra parte, la única singularidad de $\cos(1/z)$ es 0. Como

$$\cos\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{-2n}.$$

Como el término que multiplica a $\frac{1}{z}$ es cero, se tiene que $\operatorname{Res}(\cos(1/z), 0) = 0$ y entonces

$$\int_\gamma \cos(1/z) dz = 0.$$

Así

$$\int_\gamma z^2 + \cos(1/z)\, dz = 0$$

y la afirmación es falsa.

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua de forma que

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = 1$$

con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Determinar el valor de la integral

$$\iint_E f\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) dudv$$

donde $E = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} < 1\right\}$, con $a, b > 0$.

Solución. El cambio

$$\left\{ \begin{array}{l} x = u/a, \\ y = v/b, \end{array} \right.$$

transforma de forma biyectiva el conjunto E en el conjunto D. Como el determinate del jacobiano es

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{vmatrix} = \frac{1}{ab},$$

se tiene

$$1 = \iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{E} f\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) \frac{1}{ab}\, dudv,$$

y así

$$\iint\limits_{E} f\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)\, dudv = ab.$$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ la región del espacio descrita mediante las ecuaciones

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\right\}$$

Se pide:

(a) Enunciar el teorema de cambio de variable para integrales.

(b) Comprobar que la aplicación $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como

$$\phi(u, v, z) = (au, bv, z)$$

con $a, b > 0$ constantes, es un cambio de variable.

(c) Suponiendo $\rho(x, y, z) = (1 + x^2 + y^2) \cos z$ indica el valor de la densidad en cada punto $(x, y, z) \in \Omega$, calcular la masa del conjunto

$$m(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} \rho(x, y, z)\, dxdydz.$$

Solución. (a) Teoría.

(b) La aplicación ϕ es lineal y el determinante de la matriz asociada en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ab \neq 0,$$

por lo que su núcleo es $\operatorname{Ker}(\phi) = \{(0, 0, 0)\}$. Como

$$\dim \operatorname{Im} \phi = 3 - \dim \operatorname{Ker}(\phi) = 3,$$

entonces $\operatorname{Im} \phi = \mathbb{R}^3$ y por tanto ϕ es biyectiva, por lo que es un cambio de variable.

(c) Calculamos

$$m(\Omega) \;=\; \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dxdydz$$

$$\begin{aligned}
&= \iiint_\Omega (1+x^2+y^2)\cos z dxdydz = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos u,\ r\in(0,1], \\ y = 2r\sin u,\ u\in[0,2\pi), \\ z=z,\ z\in[0,1], \end{array} \right\} \\
&= \int_0^1\int_0^1\int_0^{2\pi} (1+r^2)\cos z 2r dudrdz \\
&= \int_0^1\int_0^1 4\pi(r+r^3)\cos z drdz \\
&= \int_0^1 4\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cos z dz = 3\pi\sin 1.
\end{aligned}$$

Consideremos un sólido $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^3$ sobre el que se tiene una distribución de temperaturas descrita por el campo escalar $T(x,y,z) = x^4+yz^2$. Como consecuencia de la ley de Fourier sabemos que el flujo térmico vendrá dado por el campo vectorial

$$\mathbf{J}(x,y,z) = -\kappa\nabla T(x,y,z), \quad (x,y,z)\in\mathcal{M},$$

siendo $\kappa > 0$ la constante de conductividad térmica. Teniendo en cuenta que $\mathcal{M}$ puede describirse como unión de los conjuntos $\mathcal{M}_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le(2-z)^2,\ 0\le z\le 1\}$ y $\mathcal{M}_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(z-1)^2\le 1,\ z>1\}$:

(a) Enunciar el teorema de la divergencia de Gauss.

(b) Calcular el flujo de calor a través de la frontera de $\mathcal{M}$.

Solución. (a) Teoría.
(b) Calculamos

$$\mathbf{J}(x,y,z) = -\kappa\nabla T(x,y,z) = -\kappa(4x^3, z^2, 2yz).$$

Aplicamos el teorema de Gauss

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{J}dS &= \iiint_{\mathcal{M}} \operatorname{div}(\mathbf{J})(x,y,z)dxdydz \\
&= \iiint_{\mathcal{M}_1} -\kappa(12x^2+2y)dxdydz + \iiint_{\mathcal{M}_2} -\kappa(12x^2+2y)dxdydz.
\end{aligned}$$

Calculamos en primer lugar

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{M}_1} -\kappa(12x^2+2y)dxdydz &= \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos u,\ r\in(0,2-z], \\ y = r\sin u,\ u\in[0,2\pi), \\ z=z,\ z\in[0,1], \end{array} \right\} \\
&= -2\kappa\int_0^1\int_0^{2-z}\int_0^{2\pi}(6r^2\cos^2 u + r\sin u)r dudrdz \\
&= -2\kappa\int_0^1\int_0^{2-z} 6r^3\pi drdz \\
&= -3\pi\kappa\int_0^1 (2-z)^4 dz = -\frac{93}{5}\pi\kappa.
\end{aligned}$$

Posteriormente

$$\iiint_{\mathcal{M}_2} -\kappa(12x^2+2y)dxdydz = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos u \sin v,\ r\in(0,1], \\ y = r\sin u\sin v,\ u\in[0,2\pi), \\ z = 1 + r\cos v,\ v\in[0,\pi/2], \end{array} \right\}$$

$$= -2\kappa \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} (6r^2\cos^2 u\sin^2 v + r\sin u\sin v) r^2 \sin v dvdudr$$

$$= -2\kappa \int_0^1\int_0^{2\pi} \left(4r^4\cos^2 u + \frac{\pi}{4}r^3\sin u\right) dudr$$

$$= -2\kappa \int_0^1 4\pi r^4 = -\frac{8}{5}\pi\kappa.$$

Entonces

$$\iint_S \mathbf{J}dS = -\frac{93}{5}\pi\kappa - \frac{8}{5}\pi\kappa = -\frac{101}{5}\pi\kappa.$$

Dada la circunferencia $\gamma(t) = 1 + i + re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$ y la integral

$$\int_\gamma \left(z^4 e^{1/z} + \frac{\sin z}{z(z^2+1)^2}\right) dz,$$

se pide:

(a) Enunciar el teorema de los residuos, explicando claramente todos los conceptos que aparezcan en su enunciado.

(b) Determinar el valor de la integral anterior en función del valor del radio $r > 0$.

Solución. (a) Teoría.
(b) Calculamos primero

$$\int_\gamma z^4 e^{1/z} dz.$$

Si $f(z) = z^4 e^{1/z}$, su única singularidad es 0 y como

$$z^4 e^{1/z} = z^4 \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!z^n} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!z^{n-4}} \quad \text{si } z\neq 0.$$

El sumando para $n=5$, es $\frac{1}{5!z}$, por lo que

$$\text{Res}(f(z),0) = \frac{1}{5!}.$$

Distinguimos los siguientes casos:

- Si $r<\sqrt{2}$ entonce 0 está en el exterior de la circunferencia y por el teorema de Cauchy

$$\int_\gamma z^4 e^{1/z} dz = 0.$$

- Si $r > \sqrt{2}$ entonces 0 está en el interior de la circunferencia y así

$$\int_\gamma z^4 e^{1/z} dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f(z), 0) = \frac{2\pi i}{5!}.$$

Calculamos ahora

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{z(z^2+1)^2} dz.$$

Las singularidades son 0 y $\pm i$. Como

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z(z^2+1)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} \frac{1}{(z^2+1)^2} = 1,$$

entonces 0 es una singularidad evitable y $\mathrm{Res}(g(z), 0) = 0$, donde $g(z) = \frac{\sin z}{z(z^2+1)^2}$. Calculamos ahora

$$\lim_{z\to i} (z-i)^2 \frac{\sin z}{z(z^2+1)^2} = \lim_{z\to i} \frac{\sin z}{z(z+i)^2} = -\frac{\sin i}{4i},$$

por lo que i es un polo de orden dos y así

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(g(z), i) &= \frac{1}{1!} \lim_{z\to i} \frac{d}{dz} \left((z-i)^2 \frac{\sin z}{z(z^2+1)^2} \right) \\ &= \lim_{z\to i} \frac{d}{dz} \left(\frac{\sin z}{z(z+i)^2} \right) \\ &= \lim_{z\to i} \frac{z(z+i)^2 \cos z - \sin z (3z^2 + 4iz - 1)}{z^2(z+i)^4} = \frac{i\cos i + 8\sin i}{16}. \end{aligned}$$

Análogamente

$$\lim_{z\to -i} (z+i)^2 \frac{\sin z}{z(z^2+1)^2} = \lim_{z\to -i} \frac{\sin z}{z(z-i)^2} = -\frac{\sin i}{4i},$$

por lo que i es un polo de orden dos y así

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(g(z), -i) &= \frac{1}{1!} \lim_{z\to -i} \frac{d}{dz} \left((z+i)^2 \frac{\sin z}{z(z^2+1)^2} \right) \\ &= \lim_{z\to -i} \frac{d}{dz} \left(\frac{\sin z}{z(z-i)^2} \right) \\ &= \lim_{z\to -i} \frac{z(z-i)^2 \cos z - \sin z (3z^2 - 4iz - 1)}{z^2(z-i)^4} = \frac{i\cos i - 8\sin i}{16}. \end{aligned}$$

Distinguimos ahora los siguientes casos:

- Si $r < 1$, no hay singularidades en el interior de la circunferencia y por el teorema de Cauchy

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{z(z^2+1)^2} dz = 0.$$

- Si $1 < r < \sqrt{5}$, la única singularidad no evitable en el interior de la circunferencia es i y por tanto

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{z(z^2+1)^2} dz = 2\pi i \mathrm{Res}(g(z), i) = -\pi \frac{\cos i - 8i \sin i}{8}.$$

- Si $r > \sqrt{5}$, las dos singularidades no evitables en el interior de la circunferencia son $\pm i$ y entonces

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{z(z^2+1)^2} dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(g(z), i) + \mathrm{Res}(g(z), -i)) = -\pi \frac{\cos i}{4}.$$

Calculamos ahora la integral inicial según los siguientes casos:

- Si $r < 1$, no hay singularidades en el interior de la circunferencia y por el teorema de Cauchy

$$\int_\gamma \left(z^4 e^{1/z} + \frac{\sin z}{z(z^2+1)^2} \right) dz = 0.$$

- Si $1 < r < \sqrt{2}$,

$$\int_\gamma \left(z^4 e^{1/z} + \frac{\sin z}{z(z^2+1)^2} \right) dz = -\pi \frac{\cos i - 8i \sin i}{8}.$$

- Si $\sqrt{2} < r < \sqrt{5}$,

$$\int_\gamma \left(z^4 e^{1/z} + \frac{\sin z}{z(z^2+1)^2} \right) dz = \frac{2\pi i}{5!} - \pi \frac{\cos i - 8i \sin i}{8}.$$

- Si $r > \sqrt{5}$,

$$\int_\gamma \left(z^4 e^{1/z} + \frac{\sin z}{z(z^2+1)^2} \right) dz = \frac{2\pi i}{5!} - \pi \frac{\cos i}{4}.$$

Calcula el desarrollo en serie de Laurent alrededor del punto $z_0 = 1$ de la función

$$f(z) = e^{1/(z-1)} + \frac{2i}{z(z-1)}$$

Indicar además el anillo de convergencia, clasificar el tipo de singularidad y determinar el valor del residuo de f en $z_0 = 1$.

Solución. Calculamos por separado

$$e^{1/(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-1)^n} \quad \forall z \neq 1.$$

Por otra parte

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-(z-1))^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \text{ si } |z-1| < 1.$$

Entonces si $0 < |z-1| < 1$ se tiene

$$f(z) = e^{1/(z-1)} + \frac{2i}{z(z-1)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-1)^n} + \frac{2i}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} 2i(-1)^n (z-1)^{n-1} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!(z-1)^n} + \frac{1+2i}{z-1} + 1 - 2i + \sum_{n=1}^{\infty} 2i(-1)^{n-1} (z-1)^n.
\end{aligned}
$$

La singularidad es esencial ya que la parte singular tiene infinitos términos y

$$\operatorname{Res}(f(z), 1) = 1 + 2i.$$

Capítulo 2

6–9–2005

Enunciado

1. **(1 Pto.)** Dada una función $f : V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1, con V un conjunto abierto:

   (a) Comprueba que el conjunto $S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in V\} \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie.

   (b) Calcula el vector normal a S en cada punto.

2. **(1 Pto.)** Indica de forma razonada si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: Existen constantes $\delta > 0$, $a_n \in \mathbb{C}$ de forma que

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n, \qquad z \in B(1, \delta)$$

   siendo $g(x + iy) = x^2 y - ix$.

3. **(2.5 Ptos.)** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto descrito mediante las ecuaciones:

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1,\ y > -x \right\}.$$

   Se pide:

   (a) Enunciar de forma detallada el teorema de Green.

   (b) Calcular la integral del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 y - \pi \sin(x), \log(\cos(y^2 + 1)))$ a lo largo de la frontera del conjunto Ω orientada positivamente, es decir,

$$\int_{\partial\Omega^+} \mathbf{F} \cdot ds$$

4. **(2.5 Ptos.)** Sea γ la curva obtenida al intersectar el cilindro

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

   con el plano P dado por la ecuación $ax + by + z = 1$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$ constantes.

   (a) Enunciar de forma detallada el teorema de Stokes.

(b) Dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y^3,\ x^3,\ -z^3)$, utilizar (justificando porqué se puede hacer) el teorema de Stokes para calcular la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de γ,

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds$$

(a) Parametrizar la curva γ y calcular de forma directa la integral anterior.

5. **(3 Ptos.)** Calcular las siguientes integrales:

(a) $\int_\gamma \frac{(z+1)\sin(z)}{z(z-1)^2} + \cos(1/z)\, dz$, siendo $\gamma(t) = i + 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(b) $\int_\beta \mathrm{Re}(z) + \cos(\overline{z})\, dz$, con β el segmento rectilíneo uniendo los puntos 0 y $1 + i$.

Examen resuelto

Dada una función $f : V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1, con V un conjunto abierto:

(a) Comprueba que el conjunto $S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in V\} \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie.

(b) Calcula el vector normal a S en cada punto.

Solución. Teoría.

Indica de forma razonada si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: Existen constantes $\delta > 0$, $a_n \in \mathbb{C}$ de forma que

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n, \qquad z \in B(1, \delta)$$

siendo $g(x + iy) = x^2 y - ix$.

Solución. Comprobamos si la función g es derivable calculando

$$2xy = \frac{\partial \operatorname{Re} g}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im} g}{\partial y} = 0,$$

$$-x = \frac{\partial \operatorname{Im} g}{\partial x} = -\frac{\partial \operatorname{Re} g}{\partial y} = x^2,$$

por lo que la función sólo es derivable en el conjunto $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0 \text{ o } \operatorname{Im} z = 0 \text{ y } \operatorname{Re} z = -1\}$. Entonces g nunca va a ser derivable en una bola $B(1, \delta)$ para cualquier $\delta > 0$ y la afirmación por tanto es falsa ya que de ser verdadera la función tendría que ser derivable.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto descrito mediante las ecuaciones:

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1, \; y > -x \right\}.$$

Se pide:

(a) Enunciar de forma detallada el teorema de Green.

(b) Calcular la integral del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 y - \pi \sin(x), \log(\cos(y^2 + 1)))$ a lo largo de la frontera del conjunto Ω orientada positivamente, es decir,

$$\int_{\partial \Omega^+} \mathbf{F} \cdot ds$$

Solución. (a) Teoría.

(b) Aplicamos el teorema de Green

$$\int_{\partial\Omega^+} \mathbf{F}\cdot ds = \iint_{\Omega} 2xydxdy.$$

Obtenemos la intersección de la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ con la recta $y=-x$, de donde

$$1 = \frac{x^2}{9}+\frac{x^2}{4} = \frac{13}{36}x^2,$$

de donde $x=\pm\frac{6\sqrt{13}}{13}$. Entonces

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} 2xydxdy &= \int_{-6\sqrt{13}/13}^{3}\int_{0}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} 2xydydx + \int_{6\sqrt{13}/13}^{3}\int_{-2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}^{0} 2xydydx \\ &= \int_{-6\sqrt{13}/13}^{3} 4x\left(1-\frac{x^2}{9}\right)dx + \int_{6\sqrt{13}/13}^{3} 4x\left(1-\frac{x^2}{9}\right)dx = \frac{1458}{169}.\end{aligned}$$

Sea γ la curva obtenida al intersectar el cilindro

$$D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1\right\}$$

con el plano P dado por la ecuación $ax+by+z=1$, siendo $a,b\in\mathbb{R}$ constantes.

(a) Enunciar de forma detallada el teorema de Stokes.

(b) Dado el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)=(-y^3,\,x^3,\,-z^3)$, utilizar (justificando porqué se puede hacer) el teorema de Stokes para calcular la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de γ,

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}\cdot ds$$

(c) Parametrizar la curva γ y calcular de forma directa la integral anterior.

Solución. (a) Teoría.
(b) La superficie cuya frontera es γ es

$$S=\begin{cases} x=u, \\ y=v, \\ z=1-au-bv, \\ u^2+v^2\leq 1, \end{cases}$$

que es una gráfica de la función $f(x,y)=1-ax-by$, que es de clase C^2. El campo tiene funciones coordenadas polinómicas y por tanto es de clase C^1. Podemos aplicar el teorema de Stokes

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}\cdot ds = \iint_{S} \operatorname{rot}(\mathbf{F})dS.$$

Como

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F})(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^3 & x^3 & -z^3 \end{vmatrix} = (0,0,3(x^2+y^2)),$$

y

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \end{vmatrix} = (a,b,1),$$

se tiene que si Ω es el círculo de centro $(0,0)$ y radio 1,

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}) dS &= \iint_\Omega \left\langle (0,0,3(u^2+v^2)),(a,b,1) \right\rangle dudv \\ &= \iint_\Omega 3(u^2+v^2) dudv = \left\{ \begin{array}{l} u = r\cos\phi,\ r \in (0,1], \\ v = r\sin\phi,\ \phi \in [0,2\pi), \end{array} \right\} \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3r^3 d\phi dr = \int_0^1 6\pi r^3 dr = \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

(c) Parametrizamos la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 1 - a\cos t - b\sin t)$, $t \in [0,2\pi]$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_\gamma \mathbf{F} \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \left\langle (-\sin^3 t, \cos^3 t, -(1-a\cos t - b\sin t)^3), (-\sin t, \cos t, a\sin t - b\cos t) \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^4 t + \cos^4 t - (1-a\cos t - b\sin t)^3(a\sin t - b\cos t))dt. \end{aligned}$$

Calculamos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^4 t dt &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\cos(2t)}{2} \right)^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 - 2\cos(2t) + \cos^2(2t)}{4} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 - 2\cos(2t) + \frac{1+\cos(4t)}{2}}{4} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{3 - 4\cos(2t) + \cos(4t)}{8} dt = \frac{3}{4}\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos(2t)}{2} \right)^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 + 2\cos(2t) + \cos^2(2t)}{4} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 + 2\cos(2t) + \frac{1+\cos(4t)}{2}}{4} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{3 + 4\cos(2t) + \cos(4t)}{8} dt = \frac{3}{4}\pi. \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} (1 - a\cos t - b\sin t)^3 (a\sin t - b\cos t) dt = \left[\frac{(1 - a\cos t - b\sin t)^4}{4} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Así
$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot ds = \frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi + 0 = \frac{3}{2}\pi.$$

Calcular las siguientes integrales:

(a) $\int_\gamma \frac{(z+1)\sin z}{z(z-1)^2} + \cos(1/z)\,dz$, siendo $\gamma(t) = i + 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(b) $\int_\beta \mathrm{Re}(z) + \cos(\overline{z})\,dz$, con β el segmento rectilíneo uniendo los puntos 0 y $1+i$.

Solución. (a) Calculamos de forma separada
$$\int_\gamma \frac{(z+1)\sin z}{z(z-1)^2} + \cos(1/z)\,dz = \int_\gamma \frac{(z+1)\sin z}{z(z-1)^2}dz + \int_\gamma \cos(1/z)dz.$$
Las singularidades de $f(z) = \frac{(z+1)\sin(z)}{z(z-1)^2}$ son 1 y 0, que están ambas en el interior de la circunferencia. Como
$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{(z+1)\sin z}{z(z-1)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{z+1}{(z-1)^2}\frac{\sin z}{z} = 1,$$
la singularidad 0 es evitable y por tanto $\mathrm{Res}(f(z), 0) = 0$. Por otra parte
$$\lim_{z\to 1}(z-1)^2 f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{(z+1)\sin z}{z} = 2\sin 1,$$
tenemos que 1 es un polo de orden dos y por tanto
$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f(z), 1) &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left((z-1)^2 f(z)\right) \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{(z+1)\sin z}{z}\right) \\
&= \lim_{z\to 1}\frac{(\sin z + (z+1)\cos z)z - (z+1)\sin z}{z^2} = 2\cos 1 - \sin 1.
\end{aligned}$$
Entonces
$$\int_\gamma \frac{(z+1)\sin z}{z(z-1)^2}dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(f(z), 0) + \mathrm{Res}(f(z), 1)) = 2\pi i(2\cos 1 - \sin 1).$$

Por otra parte
$$g(z) = \cos\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{-2n},$$
por lo que el término que multiplica a $\frac{1}{z}$ es cero y $\mathrm{Res}(g(z), 0) = 0$. Entonces
$$\int_\gamma \cos(1/z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(g(z), 0) = 0.$$
Entonces
$$\int_\gamma \frac{(z+1)\sin z}{z(z-1)^2} + \cos(1/z)\,dz = 2\pi i(2\cos 1 - \sin 1).$$

(b) La curva $\beta(t) = (1-t)0 + t(1+i) = t + it$, $t \in [0,1]$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_\beta \mathrm{Re}(z) + \cos(\overline{z})\, dz &= \int_0^1 (t + \cos(t(1-i)))\,(1+i)dt \\
&= (1+i)\left[\frac{t^2}{2} + \frac{\sin(t(1-i))}{1-i}\right]_0^1 \\
&= (1+i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sin(1-i)}{1-i}\right).
\end{aligned}$$

Capítulo 3

23–1–2006

Enunciado

1. **(1 Pto.)** Dados dos campos escalares $u, v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ suficientemente derivables, comprobar que se verifica la identidad
$$\operatorname{div}(\nabla u \times \nabla v) = 0$$
donde $\times$ indica el producto vectorial.

2. **(1 Pto.)** ¿Existe una función holomorfa $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ verificando $\operatorname{Im} g(x + iy) = x\cos(y)$? Razonar la respuesta.

3. **(2.5 Ptos.)** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto descrito mediante las ecuaciones:
$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 < 1,\ y > 0\right\} \bigcup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4,\ y < 0\right\}$$
Se pide:
   (a) Enunciar de forma detallada el teorema de Green.
   (b) Calcular la integral del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (x^2y - \pi\sin(x), \log\cos(y^2 + 1))$ a lo largo de la frontera del conjunto Ω orientada positivamente, es decir,
$$\int_{\partial\Omega^+} \mathbf{F} \cdot ds$$

4. **(2.5 Ptos.)** Sean S la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ $(c > 0)$ y el campo vectorial
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2z^2,\ x^2yz^2,\ -2x^2y^2z)$$
Se pide:
   (a) Enunciar el teorema de la divergencia de Gauss explicando los conceptos que aparecen en el enunciado.
   (b) Comprobar que dicho teorema se puede aplicar al cálculo de la integral de superficie
$$\int_S \mathbf{F} \cdot dS$$
y calcularla usando dicho teorema.

(c) Obtener de forma directa (usando la definición) la integral del apartado anterior.

5. **(3 Ptos.)** Dada la función

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{z-\pi} + \frac{2}{z(z-\pi)^2}$$

Calcula su desarrollo en serie de Laurent alrededor del punto $z_0 = \pi$. Indica además el anillo de convergencia de la serie y el carácter de la singularidad. ¿Cuál es el residuo de f en $z_0 = 0$?

Examen resuelto

Dados dos campos escalares $u, v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ suficientemente derivables, comprobar que se verifica la identidad

$$\operatorname{div}(\nabla u \times \nabla v) = 0$$

donde $\times$ indica el producto vectorial.

Solución. Calculamos

$$\nabla u \times \nabla v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Entonces, desarrollando y aplicando el Teorema de Schwarz

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\nabla u \times \nabla v) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\
&\quad - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \\
&= \frac{\partial v}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \right) + \frac{\partial v}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \right) \\
&\quad + \frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \right) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} \right) \\
&= \frac{\partial v}{\partial z}0 + \frac{\partial u}{\partial y}0 + \frac{\partial v}{\partial y}0 + \frac{\partial u}{\partial z}0 + \frac{\partial v}{\partial x}0 + \frac{\partial u}{\partial x}0 = 0.
\end{aligned}$$

¿Existe una función derivable $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ verificando $\operatorname{Im} g(x+iy) = x\cos(y)$? Razonar la respuesta.

Solución. En caso de existir la parte imaginaria debe ser armónica, esto es

$$\frac{\partial^2 \operatorname{Im} g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \operatorname{Im} g}{\partial y^2} = 0.$$

Calculamos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \operatorname{Im} g}{\partial x^2} &= 0, \\
\frac{\partial^2 \operatorname{Im} g}{\partial y^2} &= -x\cos y,
\end{aligned}$$

y entonces

$$\frac{\partial^2 \operatorname{Im} g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \operatorname{Im} g}{\partial y^2} = -x\cos y,$$

por lo que no puede existir dicha función g.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto descrito mediante las ecuaciones:

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 < 1,\ y > 0\right\} \bigcup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4,\ y < 0\right\}$$

Se pide:

(a) Enunciar de forma detallada el teorema de Green.

(b) Calcular la integral del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = (x^2y - \pi \sin(x), \log\cos(y^2+1))$ a lo largo de la frontera del conjunto Ω orientada positivamente, es decir,

$$\int_{\partial\Omega^+} \mathbf{F}dt.$$

Solución. (a) Teoría.
(b) Utilizamos el teorema de Green

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega^+} \mathbf{F}dt &= \iint_{\Omega} -2xydxdy \\
&= -\int_0^1 \int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}} 2xydxdy - \int_{-2}^0 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} 2xydxdy \\
&= -\int_0^1 0dy - \int_{-2}^0 0dy = 0.
\end{aligned}$$

Sean S la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ $(c > 0)$ y el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (xy^2z^2,\ x^2yz^2, -2x^2y^2z)$$

Se pide:

(a) Enunciar el teorema de la divergencia de Gauss explicando los conceptos que aparecen en el enunciado.

(b) Comprobar que dicho teorema se puede aplicar al cálculo de la integral de superficie

$$\int_S \mathbf{F} \cdot dS$$

y calcularla usando dicho teorema.

(c) Obtener de forma directa (usando la definición) la integral del apartado anterior.

Solución. (a) Teoría.

(b) La esfera de centro $(0,0,0)$ y radio c es una superficie que encierra un volumen y que es unión de dos superficies, $S_1 \cup S_2$, dadas por

$$S_1 = \begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = +\sqrt{c^2 - u^2 - v^2}, \\ u^2 + v^2 \leq c^2, \end{cases}$$

y

$$S_2 = \begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = -\sqrt{c^2 - u^2 - v^2}, \\ u^2 + v^2 \leq c^2, \end{cases}$$

que son gráficas de funciones reales de clase C^1 definidas sobre conjuntos básicos de $\mathbb{R}^2$. Por otra parte el campo tiene funciones coordenadas polinómicas, por lo que es de clase C^1. Si V es el volumen encerrado por S, aplicamos el teorema de Gauss

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} dS &= \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F})(x,y,z) dxdydz \\
&= \iiint_V (y^2z^2 + x^2z^2 - 2x^2y^2) dxdydz = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos u \sin v, \ r \in (0, c], \\ y = r \sin u \sin v, \ u \in [0, 2\pi), \\ z = r\cos v, \ v \in [0, \pi]. \end{array} \right\} \\
&= \int_0^c \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^4(\sin^2 u \sin^2 v \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v \cos^2 v - 2\cos^2 u \sin^2 u \sin^4 v) r^2 \sin v dv du dr \\
&= \int_0^c \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^6(\sin^2 v \cos^2 v - 2\cos^2 u \sin^2 u \sin^4 v) \sin v dv du dr.
\end{aligned}$$

Como

$$\int_0^{\pi} \sin^3 v \cos^2 v dv = \left\{ \begin{array}{c} \cos v = t, \\ -\sin v dv = dt \end{array} \right\} = \int_{-1}^{1} (t^2 - t^4) dt = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15},$$

y

$$\int_0^{\pi} \sin^5 v dv = \left\{ \begin{array}{c} \cos v = t, \\ -\sin v dv = dt \end{array} \right\} = \int_{-1}^{1} (t^4 - 2t^2 + 1) dt = \frac{2}{5} - \frac{4}{3} + 2 = \frac{16}{15},$$

se tiene que

$$\iint_S \mathbf{F} dS = \int_0^c \int_0^{2\pi} r^6 \left(\frac{4}{15} - \frac{32}{15} \cos^2 u \sin^2 u \right) du dr.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^2 u \sin^2 u du &= \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2u)}{2} \frac{1 - \cos(2u)}{2} du \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos^2(2u)}{4} du \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(4u)}{8} du = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\iint_S \mathbf{F} dS = \int_0^c r^6 \left(\frac{8}{15}\pi - \frac{8}{15}\pi \right) dr = 0.$$

(c) Consideramos la parametrización de la esfera

$$S = \begin{cases} x = c\cos u \sin v, \\ y = c \sin u \sin v, \\ z = c\cos v, \\ (u,v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]. \end{cases}$$

Entonces

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = -\sin v(x, y, z),$$

y así

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} dS &= \iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} \big\langle (xy^2z^2,\ x^2yz^2, -2x^2y^2z), -\sin v(x,y,z) \big\rangle \, dudv = 0 \\ &= \iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} 0 dudv = 0. \end{aligned}$$

Dada la función

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{z - \pi} + \frac{2}{z(z-\pi)^2}$$

Calcula su desarrollo en serie de Laurent alrededor del punto $z_0 = \pi$. Indica además el anillo de convergencia de la serie y el carácter de la singularidad. ¿Cuál es el residuo de f en $z_0 = 0$?

Solución. Calculamos primero

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos(z - \pi + \pi) \\ &= \cos(z-\pi)\cos\pi - \sin(z-\pi)\sin\pi \\ &= -\cos(z-\pi) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(z-\pi)^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(z-\pi)^{2n} \quad \forall z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{\pi + z - \pi} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1 - \frac{z-\pi}{-\pi}} \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-\pi}{-\pi}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^{n+1}}(z-\pi)^n \ \text{ si } |z-\pi| < \pi. \end{aligned}$$

Entonces si $0 < |z-\pi| < \pi$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\cos(z)}{z-\pi} + \frac{2}{z(z-\pi)^2} \\ &= \frac{1}{z-\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(z-\pi)^{2n} + \frac{2}{(z-\pi)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi^{n+1}}(z-\pi)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}(z-\pi)^{2n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{\pi^{n+1}}(z-\pi)^{n-2}. \end{aligned}$$

La singularidad π es un polo de orden dos.

Por otro lado, dado que

$$\lim_{z\to 0} z\left(\frac{\cos(z)}{z-\pi} + \frac{2}{z(z-\pi)^2}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{z\cos(z)}{z-\pi} + \lim_{z\to 0}\frac{2}{(z-\pi)^2} = \frac{2}{\pi^2},$$

si tiene que 0 es un polo de orden uno y por tanto

$$\operatorname{Res}(f(z),0) = \lim_{z\to 0} z\left(\frac{\cos(z)}{z-\pi} + \frac{2}{z(z-\pi)^2}\right) = \frac{2}{\pi^2}.$$

Capítulo 4

3–7–2006

Enunciado

1. **(1 Punto)** Dados el campo escalar f y el campo vectorial $\mathbf{F}$, suficientemente derivables, probar que
$$\mathrm{div}(f \cdot \mathbf{F}) = f \cdot \mathrm{div}\mathbf{F} + < \mathrm{grad} f, \mathbf{F} > .$$

2. **(1 Punto)** Consideremos la función de variable compleja
$$f(z) = \overline{z}$$
donde $\overline{z}$ denota el conjugado de z. Comprueba que
$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i.$$
donde $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. ¿Contradice esto el Teorema de Cauchy? ¿Por qué?

3. Sea γ la circunferencia de radio 1 y centro $(0,1)$, y sea el campo $\mathbf{F}(x,y) = (x^2y, xy^2)$. Se pide

   (a) **(1 Punto)** Enunciar el Teorema de Green explicando los conceptos que aparecen en el enunciado.

   (b) **(1.5 Puntos)** Comprobar que dicho teorema se puede verifica calculando de dos maneras distintas la integral
$$\int_\gamma \mathbf{F} dt.$$

4. **(2.5 Puntos)** Verifica que se puede utilizar el Teorema de la Divergencia en el siguiente ejemplo y utilizarlo para calcular
$$\iint_\Phi \mathbf{F} dS,$$
donde Φ es la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio R y $\mathbf{F}(x,y,z) = (xz, yx, zy)$.

5. Se pide:

(a) **(1 Punto)** Enunciar el Teorema de los residuos explicando cada uno de los conceptos que aparecen.

(b) **(2 Puntos)** Sea $\gamma(t) = 1 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, donde $r > 0$. Calcular

$$\int_{\gamma} \frac{z+1}{z^4 + z^3 - 2z^2} dz.$$

Examen resuelto

Dados el campo escalar f y el campo vectorial $\mathbf{F}$, suficientemente derivables, probar que

$$\mathrm{div}(f \cdot \mathbf{F}) = f \cdot \mathrm{div}\mathbf{F} + < \mathrm{grad} f, \mathbf{F} > .$$

Solución. Sea $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(f \cdot \mathbf{F}) &= \mathrm{div}((fF_1, fF_2, fF_3)) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(fF_1) + \frac{\partial}{\partial y}(fF_2) + \frac{\partial}{\partial z}(fF_3) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}F_1 + f\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}F_2 + f\frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}F_3 + f\frac{\partial F_3}{\partial z} \\
&= f\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}F_1 + \frac{\partial f}{\partial y}F_2 + \frac{\partial f}{\partial z}F_3 \\
&= f \cdot \mathrm{div}\mathbf{F} + < \mathrm{grad} f, \mathbf{F} > .
\end{aligned}$$

Consideremos la función de variable compleja

$$f(z) = \overline{z}$$

donde $\overline{z}$ denota el conjugado de z. Comprueba que

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i.$$

donde $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. ¿Contradice esto el Teorema de Cauchy? ¿Por qué?

Solución. Calculamos

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} \overline{(e^{it})} i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} 0 dt = 0.$$

No contradice el teorema de Cauchy porque la función conjugado no es derivable.

Sea γ la circunferencia de radio 1 y centro $(0,1)$, y sea el campo $\mathbf{F}(x,y) = (x^2y, xy^2)$. Se pide

(a) **(1 Punto)** Enunciar el Teorema de Green explicando los conceptos que aparecen en el enunciado.

(b) **(1.5 Puntos)** Comprobar que dicho teorema se verifica calculando de dos maneras distintas la integral

$$\int_\gamma \mathbf{F} dt.$$

Solución. (a) Teoría.
(b) Parametrizamos la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ y calculamos

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F} dt &= \int_0^{2\pi} \big\langle (\cos^2 t \sin t, \cos t \sin^2 t), (-\sin t, \cos t) \big\rangle \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-2\cos^2 t \sin^2 t + 2\cos^2 t \sin^2 t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} 0 dt = 0.
\end{aligned}$$

Por otra parte, si Ω es el círculo encerrado por la circunferencia

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F} dt &= \iint_\Omega (y^2 - x^2) dx dy = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\phi, \ r \in (0,1], \\ y = r \sin\phi, \ \phi \in [0, 2\pi). \end{array} \right\} \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 (\sin^2\phi - \cos^2\phi) r d\phi dr \\
&= \int_0^1 r^3 \int_0^{2\pi} -2\cos(2\phi) d\phi dr = 0.
\end{aligned}$$

Verifica que se puede utilizar el Teorema de la Divergencia en el siguiente ejemplo y utilizarlo para calcular

$$\iint_\Phi \mathbf{F} dS,$$

donde Φ es la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio R y $\mathbf{F}(x,y,z) = (xz, yx, zy)$.

Solución. La esfera de centro $(0,0,0)$ y radio R es una superficie que encierra un volumen y que es unión de dos superficies, $S_1 \cup S_2$, dadas por

$$S_1 = \left\{ \begin{array}{l} x = u, \\ y = v, \\ z = +\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}, \\ u^2 + v^2 \leq R^2, \end{array} \right.$$

y

$$S_2 = \left\{ \begin{array}{l} x = u, \\ y = v, \\ z = -\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}, \\ u^2 + v^2 \leq R^2, \end{array} \right.$$

que son gráficas de funciones reales de clase C^1 definidas sobre conjuntos básicos de $\mathbb{R}^2$. Por otra parte el campo tiene funciones coordenadas polinómicas, por lo que es de clase C^1. Si V es el volumen encerrado por Φ, aplicamos el teorema de Gauss

$$\iint_\Phi \mathbf{F} dS = \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F})(x,y,z) dx dy dz$$

$$
\begin{aligned}
&= \iiint_V (x+y+z)dxdydz = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos u \sin v,\ r \in (0,R], \\ y = r \sin u \sin v,\ u \in [0,2\pi), \\ z = r\cos v,\ v \in [0,\pi]. \end{array} \right\} \\
&= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r(\cos u \sin v + \sin u \sin v + \cos v) r^2 \sin v du dv dr \\
&= \int_0^R \int_0^\pi 2\pi r^3 \cos v \sin v dv dr = 0.
\end{aligned}
$$

Se pide:

(a) **(1 Punto)** Enunciar el Teorema de los residuos explicando cada uno de los conceptos que aparecen.

(b) **(2 Puntos)** Sea $\gamma(t) = 1 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, donde $r > 0$. Calcular

$$\int_\gamma \frac{z+1}{z^4+z^3-2z^2} dz.$$

Solución. (a) Teoría.
(b) Calculamos las singularidades del integrando resolviendo la ecuación

$$z^4 + z^3 - 2z^2 = z^2(z^2+z-2) = 0,$$

cuyas soluciones son 0, de multiplicidad dos, y

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2},$$

esto es -2 y 1, ambas de multiplicidad uno. Si $f(z) = \frac{z+1}{z^4+z^3-2z^2}$, como

$$\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z+1}{z^2+z-2} = -\frac{1}{2},$$

se tiene que 0 es un polo de orden dos y entonces

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f(z),0) &= \lim_{z\to 0} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz}(z^2 f(z)) \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z+1}{z^2+z-2} \right) \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{-2z^2-2z-1}{(z^2+z-2)^2} = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Por otro lado

$$\lim_{z\to -2} (z+2) f(z) = \lim_{z\to -2} \frac{z+1}{z^2(z-1)} = \frac{1}{12},$$

y así -2 es un polo de orden uno y

$$\operatorname{Res}(f(z),-2) = \lim_{z\to -2} \frac{z+1}{z^2(z-1)} = \frac{1}{12}.$$

Finalmente,

$$\lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z+1}{z^2(z+2)} = \frac{2}{3},$$

y así -2 es un polo de orden uno y

$$\mathrm{Res}(f(z),1) = \lim_{z\to 1}\frac{z+1}{z^2(z+2)} = \frac{2}{3}.$$

Distinguimos ahora los siguientes casos:

- Si $r<1$, entonces la única singularidad dentro de la circunferencia es 1 y

$$\int_\gamma \frac{z+1}{z^4+z^3-2z^2}dz = 2\pi i\mathrm{Res}(f(z),0) = \frac{4}{3}\pi i.$$

- Si $1<r<3$, entonces las singularidades dentro de la circunferencia son 1 y 0, obteniéndose

$$\int_\gamma \frac{z+1}{z^4+z^3-2z^2}dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(f(z),1)+\mathrm{Res}(f(z),0)) = \frac{5}{6}\pi i.$$

- Si $r>3$, entonces las tres singularidades están dentro de la circunferencia y

$$\int_\gamma \frac{z+1}{z^4+z^3-2z^2}dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(f(z),1)+\mathrm{Res}(f(z),0)+\mathrm{Res}(f(z),-2)) = \pi i.$$

Capítulo 5

15–9–2006

Enunciado

1. **(1 Punto)** Explica brevemente qué es una función derivable y da algún criterio para saber cuando una fiunción es derivable.

2. **(1 Punto)** Consideremos la ecuación algebraica
$$2e^{i\frac{\pi}{4}} + ie^{(-1+i)t} + ze^{-i\frac{\pi}{4}} = 0$$
donde $t > 0$ es un parámetro. Resuelve la ecuación anterior en la incógnita $z(t)$ y expresa el resultado en forma binómica.

3. (**2 Puntos)** Consideremos el conjunto
$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4, \quad -2 < z < 0\right\}$$
y sea $\partial\Omega^+$ la frontera de Ω que suponemos orientada con los vectores normales apuntando hacia el exterior de Ω. Consideremos también el campo vectorial
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xz^2,\ yx^2,\ zy^2).$$
Utiliza el Teorema de la divergencia para calcular el flujo del campo $\mathbf{F}$ que sale hacia afuera de Ω.

4. (**2 Puntos)** Sea σ la curva intersección del paraboloide de ecuación
$$1 - z^2 = x^2 + y^2$$
y el plano $z = 0.5$. Calcula la integral de linea, en sentido antihorario, del campo vectorial
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (yz,\ 1,\ 0)$$
a lo largo de σ.

5. **(2 Puntos)** Utiliza el Teorema de los Residuos para calcular la integral
$$\int_\gamma \frac{e^{2z}}{(z^2+1)^2} dz$$
donde γ es la circunferencia $\gamma(t) = i + e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

6. **(2 Punto)** Calcula el desarrollo en serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$$

alrededor del punto $z = \mathbf{i}$ e indica el anillo de convergencia.

Examen resuelto

Explica brevemente qué es una función derivable y da algún criterio para saber cuando una fiunción es derivable.

Solución. Teoría.

Consideremos la ecuación algebraica

$$2e^{i\frac{\pi}{4}} + ie^{(-1+i)t} + ze^{-i\frac{\pi}{4}} = 0$$

donde $t > 0$ es un parámetro. Resuelve la ecuación anterior en la incógnita $z(t)$ y expresa el resultado en forma binómica.

Solución. Vemos que

$$\begin{aligned} z(t) &= -\frac{2e^{i\frac{\pi}{4}} + ie^{(-1+i)t}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}} = -e^{i\frac{\pi}{4}}(2e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{2}}e^{(-1+i)t}) \\ &= -(2e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{-t+i(t+\frac{3\pi}{4})}) = -2i + e^{-t}\left(\cos\left(t+\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(t+\frac{3}{4}\pi\right)\right) \\ &= -e^{t}\cos t - i(2 + e^{-t}\sin t). \end{aligned}$$

Consideremos el conjunto

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 4, \ \ -2 < z < 0\right\}$$

y sea $\partial\Omega^+$ la frontera de Ω que suponemos orientada con los vectores normales apuntando hacia el exterior de Ω. Consideremos también el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (xz^2, \ yx^2, \ zy^2).$$

Utiliza el Teorema de la divergencia para calcular el flujo del campo $\mathbf{F}$ que sale hacia afuera de Ω.

Solución. Como

$$\mathrm{div}\mathbf{F}(x,y,z) = x^2+y^2+z^2,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega^+} \mathbf{F}dS &= \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\mathbf{F}(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz \\ &= \left\{\begin{array}{l} x = r\cos u\sin v, \ r \in (0,2] \\ y = r\sin u\sin v, \ u \in [0,2\pi) \\ z = r\cos v, \ v \in (\pi/2,\pi) \end{array}\right\} = \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2r^2\sin u du dv dr \\ &= \int_0^2\int_0^{2\pi} 2r^4 dvdr = \int_0^2 4\pi r^4 dr = \frac{128}{5}\pi. \end{aligned}$$

Sea σ la curva intersección del paraboloide de ecuación

$$1 - z^2 = x^2 + y^2$$

y el plano $z = 0.5$. Calcula la integral de línea, en sentido antihorario, del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (yz,\ 1,\ 0)$$

a lo largo de σ.

Solución. La curva es la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt{3}/2$ situada en el plano $z = 0.5$, por lo que una parametrización de la misma con el sentido inidicado es $\gamma(t) = (\sqrt{3}/2 \cos t, \sqrt{3}/2 \sin t, 1/2)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F} dt &= \int_0^{2\pi} \left\langle (\sqrt{3}/4 \sin t, 1, 0), (-\sqrt{3}/2 \sin t, \sqrt{3}/2 \cos t, 0) \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} (3/8 \sin^2 t + \sqrt{3}/2 \cos t) dt \\
&= \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^{2\pi} \cos t dt = \frac{3\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Utiliza el Teorema de los Residuos para calcular la integral

$$\int_\gamma \frac{e^{2z}}{(z^2+1)^2} dz$$

donde γ es la circunferencia $\gamma(t) = i + e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solución. Calculamos las singularidades del integrando resolviendo la ecuación

$$(z^2+1)^2 = 0,$$

de donde obtenemos fácilmente que $\pm i$ son raices de multiplicidad dos. Nos damos cuenta que la única singularidad que está en el interior de la curva es i y por tanto

$$\int_\gamma \frac{e^{2z}}{(z^2+1)^2} dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f(z), i),$$

donde $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z^2+1)^2}$. Como

$$\lim_{z \to i} (z-i)^2 \frac{e^{2z}}{(z^2+1)^2} = \lim_{z \to i} \frac{e^{2z}}{(z+i)^2} = -\frac{e^{2i}}{4},$$

se tiene que la singularidad es un polo de orden dos y por tanto

$$\mathrm{Res}(f(z), i) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to i} \frac{d}{dz} \left((z-i)^2 \frac{e^{2z}}{(z^2+1)^2} \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{2z}}{(z+i)^2}\right) = \lim_{z\to i}\frac{2e^{2z}(z+i-1)}{(z+i)^3}\\
&= \frac{e^{2i}(2i-1)}{-4i} = -\frac{e^{2i}(2+i)}{4}.
\end{aligned}
$$

Entonces

$$\int_\gamma \frac{e^{2z}}{\left(z^2+1\right)^2}dz = -\pi i\frac{e^{2i}(2+i)}{2}.$$

Calcula el desarrollo en serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$$

alrededor del punto $z = \mathbf{i}$ e indica el anillo de convergencia.

Solución. Calculamos alrededor de i el desarrollo de

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z+i} &= \frac{1}{2i+z-i} = \frac{1}{2i}\frac{1}{1-\frac{z-i}{-2i}} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{-2i}\right)^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}(z-i)^n \text{ si } |z-i| < 4.
\end{aligned}
$$

Entonces si $0 < |z-i| < 4$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}(z-i)^n = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}(z-i)^{n-1}\\
&= \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2i)^{n+2}}(z-i)^n.
\end{aligned}
$$

Capítulo 6

10–2–2007

Enunciado

1. **(1 Punto)** Enuncia con precisión el Teorema de Green y pon un ejemplo en el que se use dicho resultado, explicando claramente que en dicho ejemplo se cumplen las condiciones que permiten la utilización del mismo.

2. Sea $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ la superficie descrita matemáticamente por medio de las ecuaciones

$$S_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (2 - z)^2, \quad 0 < z \leq 1\right\},$$

$$S_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, \quad 1 < z \leq 2\right\},$$

y

$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, \; z = 0\}.$$

Se pide:

(a) **(0.5 Puntos)** Dibuja la superficie S.

(b) **(2 Puntos)** Calcula el flujo del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x, 0, y) \tag{6.1}$$

a través de la superficie S, orientada con los vectores normales apuntando hacia afuera.

(c) **(1 Punto)** Calcula la circulación (integral de línea) del campo $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva (orientada positivamente) descrita analíticamente como

$$\sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0\right\}.$$

Dibuja también la curva σ.

(d) **(0.5 Puntos)** ¿Podemos concluir del apartado anterior que $\mathbf{F}$ es un campo conservativo? ¿Por qué?

3. **(2 Puntos)** Sea $\mathbf{G} = (u, v) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 y $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva de clase C^1. Por otra parte, consideremos la función de variable compleja $g = u + iv : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donde u y v son las mismas funciones que aparecen en el campo $\mathbf{G}$.

Comprueba que la integral de línea de $\mathbf{G}$ a lo largo de φ coincide con la parte real de la integral compleja a lo largo del camino φ de la conjugada de g, es decir,

$$\int_{\varphi} \mathbf{G} \cdot ds = \mathrm{Re}\left(\int_{\varphi} \overline{g}\,(z)\,dz\right)$$

donde $\overline{g}\,(z) = \overline{g\,(z)}$ es la conjugada de g.

4. **(3 Puntos)** Siendo $r > 0$ un número positivo y $\gamma(t) = 1 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, calcular la integral

$$\int_{\gamma} \frac{z+1}{z^3 - 2z^2 + z} dz$$

en función del parámetro r.

Examen resuelto

Enunciar con precisión el Teorema de Green y poner un ejemplo en el que se use dicho resultado, explicando claramente que en dicho ejemplo se cumplen las condiciones que permiten la utilización del mismo.

Solución. El enunciado puede verse en la teoría. Un ejemplo puede ser el cálculo de la integral

$$\int_\gamma xdx + ydy,$$

donde γ es la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1, recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj, siendo γ una curva de Jordan de clase C^1. El campo $\mathbf{F}(x,y) = (x,y)$ es de clase C^1. Entonces si Ω es el interior de la circunferencia

$$\int_\gamma xdx + ydy = \iint_\Omega 0dxdy = 0.$$

Sea $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ la superficie descrita matemáticamente por medio de las ecuaciones

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (2-z)^2, \quad 0 < z \leq 1\right\},$$

$$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, \quad 1 < z \leq 2\right\},$$

y

$$S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, \quad z = 0\}.$$

Se pide:

(a) (0.5 Puntos) Dibujar la superficie S.

(b) (2 Puntos) Calcular el flujo del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x,0,y) \tag{6.2}$$

a través de la superficie S, orientada con los vectores normales apuntando hacia afuera.

(c) (1 Punto) Calcular la circulación (integral de línea) del campo $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva (orientada positivamente) descrita analíticamente como

$$\sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0\right\}.$$

(d) (0.5 Puntos) ¿Podemos concluir del apartado anterior que $\mathbf{F}$ es un campo conservativo? ¿Por qué?

Solución. (a) La superficie S_1 es un tronco cónico, S_2 es un casquete esférico y S_3 es la tapa inferior del tronco cónico dado por S_2, teniéndose la figura

(b) Como la superficie encierra un volumen V, y se puede aplicar el teorema de Gauss, se tiene que

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} dS &= \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F})(x,y,x) dxdydz = \iiint_V dxdydz \\ &= \iiint_{V_1} dxdydz + \iiint_{V_2} dxdydz,\end{aligned}$$

donde V_1 es el volumen encerrado por el tronco cónico y V_2 el encerrado por la semiesfera. Como

$$\begin{aligned}\iiint_{V_1} dxdydz &= \frac{1}{3}\pi(4-1) = \pi, \\ \iiint_{V_2} dxdydz &= \frac{2}{3}\pi,\end{aligned}$$

usando fórmulas del cálculo de volumen para superficies elementales. Así

$$\iint_S \mathbf{F} dS = \pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi.$$

(c) La curva es una circunferencia centrada en $(0,0)$ y de radio 2 situada en el plano $z=0$, por lo que ésta puede parametrizarse por $\sigma(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$. Entonces

$$\begin{aligned}\int_\sigma \mathbf{F} dt &= \int_0^{2\pi} \langle (\cos t, 0, \sin t), (-2\sin t, 2\cos t, 0)\rangle\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} -2\cos t \sin t dt = 0.\end{aligned}$$

(d) Que sea la anterior integral nula no implica que dicho campo sea conservativo. Para comprobar esto basta calcular

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F})(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & 0 & y \end{vmatrix} = (1,0,0)$$

para comprobar que no es conservativo.

Sea $\mathbf{G} = (u,v) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 y $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva de clase C^1. Por otra parte, consideremos la función de variable compleja $g = u + iv : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donde u y v son las mismas funciones que aparecen en el campo $\mathbf{G}$. Comprueba que la integral de línea de $\mathbf{G}$ a lo largo de φ coincide con la parte real de la integral compleja a lo largo del camino φ de la conjugada de g, es decir,

$$\int_\varphi \mathbf{G} dt = \operatorname{Re}\left(\int_\varphi \overline{g}(z)\, dz\right)$$

donde $\overline{g}(z) = \overline{g(z)}$ es la conjugada de g.

Solución. Calculamos

$$\begin{aligned}\int_{\varphi}\mathbf{G}dt &= \int_a^b \langle u(\varphi(t)), v(\varphi(t)), \varphi'(t)\rangle\, dt \\ &= \int_a^b (u(\varphi(t))x'(t) + v(\varphi(t))y'(t))\, dt,\end{aligned}$$

siendo $\varphi(t) = (x(t), y(t))$. Por otra parte

$$\begin{aligned}\int_{\varphi}\overline{g}\,(z)\,dz &= \int_a^b \overline{g}(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\ &= \int_a^b (u(\varphi(t))x'(t) + v(\varphi(t))y'(t) + i(u(\varphi(t))y'(t) - u(\varphi(t))y'(t)))\, dt,\end{aligned}$$

por lo que

$$\operatorname{Re}\int_{\varphi}\overline{g}\,(z)\,dz = \int_a^b (u(\varphi(t))x'(t) + v(\varphi(t))y'(t))\, dt = \int_{\varphi}\mathbf{G}dt.$$

Siendo $r > 0$ un número positivo y $\gamma(t) = 1 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, calcular la integral

$$\int_{\gamma}\frac{z+1}{z^3 - 2z^2 + z}dz$$

en función del parámetro r.

Solución. Calculamos las singularidades resolviendo la ecuación

$$z^3 - 2z^2 + z = z(z^2 - 2z + 1) = 0,$$

por lo que 0 es solución y

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1,$$

que es otra solución doble. Como

$$\lim_{z\to 0} z\frac{z+1}{z^3 - 2z^2 + z} = \lim_{z\to 0}\frac{z+1}{z^2 - 2z + 1} = 1,$$

el 0 es polo de orden uno mientras que

$$\lim_{z\to 1}(z-1)^2\frac{z+1}{z^3 - 2z^2 + z} = \lim_{z\to 1}\frac{z+1}{z} = 2,$$

nos dice que 1 es polo de orden dos. Si $f(z) = \frac{z+1}{z^3-2z^2+z}$, calculamos los residuos

$$\operatorname{Res}(f(z), 0) = \lim_{z\to 0} z\frac{z+1}{z^3 - 2z^2 + z} = 1,$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f(z),1) &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left((z-1)^2\frac{z+1}{z^3-2z^2+z}\right)\\
&= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z+1}{z}\right)\\
&= \lim_{z\to 1}\frac{-1}{z^2} = -1.
\end{aligned}$$

Distinguimos ahora los siguientes casos:

- Si $r < 1$ la única singularidad dentro de la circunferencia es es 1, por lo que
$$\int_\gamma \frac{z+1}{z^3-2z^2+z}dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f(z),1) = -2\pi i.$$
- Si $r > 1$, son dos las singularidades dentro del círculo y entonces
$$\int_\gamma \frac{z+1}{z^3-2z^2+z}dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(f(z),1) + \mathrm{Res}(f(z),0)) = 0.$$

Capítulo 7

9–07–07

Enunciado

1. **(2.5 Puntos)** Calcular el volumen del recinto del espacio limitado por las superficies $4x^2 + y^2 = 4$, $y + z = 4$, $z = 0$.

2. Sea S la superficie dada por el triángulo de vértices $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, y $(1, 0, 0)$. Dado el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, xy, xz)$, se pide:

   (a) **(1 Punto)** Enunciar el Teorema de Stokes explicando los conceptos que aparecen en el enunciado. (Teoría)

   (b) **(1.5 Puntos)** Comprobar dicho teorema aplicándolo al cálculo de la integral de linea
   $$\int_\gamma \mathbf{F} dl,$$
   siendo γ la curva frontera de S que une $(0, 0, 1)$ con $(0, 1, 0)$, éste con $(1, 0, 0)$ y éste último con $(0, 0, 1)$. Es decir, calcular la integral directamente primero y despúes utilizando el teorema de Stokes.

3. **(1 Punto)** Resuelve la siguiente ecuación algebraica y expresa el resultado en forma polar y binómica. Representa gráficamente la solución.
   $$1 + 2i + 2e^{-\frac{\pi}{3}i} = z^2 e^{-\frac{\pi}{3}i}.$$

4. **(1.5 Puntos)** Dar la definición de serie de potencias explicando los conceptos que aparecen en el enunciado, y explicar cómo obtener su radio de convergencia. Desarrollar en serie de potencias centrada en 0 la siguiente función
   $$f(z) = \frac{z}{(z - i)(z + 3)},$$
   indicando su conjunto de convergencia.

5. **(2.5 Puntos)** Calcular
   $$\int_\gamma \frac{\sin z}{z(z - 3)^3} dz$$
   siendo $\gamma(t) = 4e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Examen resuelto

Calcular el volumen del recinto del espacio limitado por las superficies $4x^2 + y^2 = 4$, $y + z = 4$, $z = 0$.

Solución. Si despejamos z en la ecuación $y + z = 4$ obtenemos que $z = 4 - y \geq 0$ para todo $(x, y) \in \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 4\}$. Entonces el volumen pedido V es

$$V = \iint_\Omega (4 - y)dxdy.$$

Esta integral puede calcularse de dos maneras. Como Ω es el interior de una elipse, con el cambio de coordenadas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = 2r\sin\theta, \end{cases}$$

obtenemos que el recinto de integración se escribe en estas coordenadas como $(0, 1] \times [0, 2\pi)$ y como el determinante de la matriz jacobiana del cambio es $2r$, obtenemos que

$$V = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (4 - 2r\sin\theta)2rd\theta \right) dr = 8\pi.$$

Otra manera es escribirla como

$$V = \int_{-1}^1 \left(\int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} (4 - y)dy \right) dx = 16 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}dx = 8\pi.$$

Sea S la superficie dada por el triángulo de vértices $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, y $(1, 0, 0)$. Dado el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, xy, xz)$, se pide:

(a) Enunciar el Teorema de Stokes explicando los conceptos que aparecen en el enunciado. (Teoría)

(b) Comprobar dicho teorema aplicándolo al cálculo de la integral de linea

$$\int_\gamma \mathbf{F}dl,$$

siendo γ la curva frontera de S que une $(0, 0, 1)$ con $(0, 1, 0)$, éste con $(1, 0, 0)$ y éste último con $(0, 0, 1)$. Es decir, calcular la integral directamente primero y después utilizando el teorema de Stokes.

Solución. Calculamos primero la integral directamente. Para ello parametrizamos la curva $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, donde $\gamma_1(t) = (1 - t)(0, 0, 1) + t(0, 1, 0) = (0, t, 1 - t)$, $t \in [0, 1]$ es el segmento que une $(0, 0, 1)$ con $(0, 1, 0)$, $\gamma_2(t) = (1 - t)(0, 1, 0) + t(1, 0, 0) = (t, 1 - t, 0)$, $t \in [0, 1]$ es el segmento que une $(0,1,0)$ con $(1,0,0)$ y $\gamma_3(t) = (1-t)(1,0,0) + t(0,0,1) = (1-t,0,t)$, $t \in [0,1]$ es el segmento que une $(1,0,0)$ con $(0,0,1)$. Entonces

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} dl = \int_0^1 < (0,0,0),(0,1,-1) > dt = \int_0^1 0dt = 0.$$

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F} dl = \int_0^1 < (t, t-t^2, 0),(1,-1,0) > dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} dl = \int_0^1 < (1-t, 0, t-t^2),(-1,0,1) > dt = \int_0^1 (-1+2t-t^2) dt = -\frac{1}{3}.$$

Como

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} dl = \sum_{i=1}^{3} \int_{\gamma_i} \mathbf{F} dl = 0.$$

Calculémoslo ahora usando la integral de superficie. Los tres puntos están en el plano $x+y+z = 1$ y el triángulo en cuestión es la superifice

$$\Phi = \begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = 1-u-v, \end{cases} \qquad (u,v) \in \Omega = \{(u,v) : u \geq 0,\ v \geq 0,\ u+v \leq 1\}.$$

Calculamos

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1,1,1)$$

y

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & xy & xz \end{vmatrix} = (0, -z, y).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} dl &= \iint_{\Phi} \mathrm{Rot}(\mathbf{F}) dS = \iint_{\Omega} < (0, u+v-1, v),(1,1,1) > dudv \\ &= \iint_{\Omega} (u+2v-1) dudv = \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (u+2v-1) dv \right) du = 0. \end{aligned}$$

Resuelve la siguiente ecuación algebraica y expresa el resultado en forma polar y binómica. Representa gráficamente la solución.

$$1 + 2i + 2e^{-\frac{\pi}{3}i} = z^2 e^{-\frac{\pi}{3}i}.$$

Solución. Despejamos

$$z^2 = e^{\frac{\pi}{3}i}(1 + 2i + 2e^{-\frac{\pi}{3}i}) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+2i) + 2 = \frac{5}{2} - \sqrt{3} + i\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = w.$$

Como
$$|w| = 2.01787$$
y un argumento es
$$\varphi = 1.18038,$$
tenemos que
$$z = \sqrt{\frac{5}{2} - \sqrt{3} + i\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \begin{cases} \sqrt{2.01787}_{\frac{1.18038}{2}} = 1.42052_{0.59019} = 1.18022 + i0.79055, \\ \sqrt{2.01787}_{\frac{1.18038+2\pi}{2}} = 1.42052_{2.16099} = -1.18022 - i0.79055. \end{cases}$$
Gráficamente los dos números están contenidos en los extremos de un segmento que pasa por el origen de coordenadas.

Dar la definición de serie de potencias explicando los conceptos que aparecen en el enunciado, y explicar cómo obtener su radio de convergencia. Desarrollar en serie de potencias centrada en 0 la siguiente función
$$f(z) = \frac{z}{(z-i)(z+3)},$$
indicando su conjunto de convergencia.

Solución. Calculamos sólo la serie de potencias (el resto está en la teoría). Para ello descomponemos en fracciones simples
$$\frac{z}{(z-i)(z+3)} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+3},$$
de donde obtenemos el sistema
$$\begin{cases} 1 = A + B, \\ 0 = 3A - iB, \end{cases}$$
y obtenemos $A = \frac{i}{i+3}$ y $B = \frac{3}{i+3}$. Calculamos aparte
$$\frac{1}{z-i} = -\frac{1}{i}\frac{1}{1-\frac{z}{i}} = -\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{i}\right)^n = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{z^n}{i^n} \text{ si } z \in B(0,1),$$
$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(-3)^n} \text{ si } z \in B(0,3).$$
Entonces
$$\frac{z}{(z-i)(z+3)} = \frac{i}{i+3}\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{z^n}{i^n} + \frac{3}{i+3}\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(-3)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{i+3}\left((-3)^{-n} - (-i)^n\right) z^n \text{ si } z \in B(0,1).$$

Calcular
$$\int_\gamma \frac{\sin z}{z(z-3)^3} dz$$
siendo $\gamma(t) = 4e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Solución. Sea $f(z) = \frac{\sin z}{z(z-3)^3}$. Sus singularidades son aquellos números que anulan el denominador, esto es 0 y 3. Como ambos están en el interior de γ tenemos por el teorema de los residuos que

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{z(z-3)^3} dz = 2\pi i[\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,3)].$$

Calculamos ambos residuos. Por un lado, como

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z(z-3)^3} = \frac{-1}{27},$$

tenemos que 0 es una singularidad evitable y por lo tanto $\mathrm{Res}(f,0) = 0$. Por otro lado, como

$$\lim_{z\to 3} (z-3)^3 \frac{\sin z}{z(z-3)^3} = \lim_{z\to 3} \frac{\sin z}{z} = \frac{\sin 3}{3},$$

tenemos que 3 es un polo de orden 3 y por lo tanto

$$\mathrm{Res}(f,3) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 3} \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{\sin z}{z}\right) = \frac{1}{2} \lim_{z\to 3} \frac{2z\cos z + (z^2-2)\sin z}{z^3} = \frac{6\cos 3 + 7\sin 3}{54}.$$

Así

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{z(z-3)^3} dz = \pi i \frac{6\cos 3 + 7\sin 3}{27}.$$

Capítulo 8

6–9–2007

Enunciado

1. **(2.5 Puntos)** Enunciar las fórmulas integrales de Cauchy y explicar los conceptos que aparecen en el enunciado. Como aplicación, calcular **sin hacer uso del teorema de los residuos** la integral
$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-i)^2}dz,$$
donde $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

2. Sea S la superficie formada por la semiesfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, $z \leq 1$, el tronco cilíndrico $x^2 + y^2 = 1$, $1 \leq z \leq 4$ y el círculo $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 4$. Dado el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x(z - y + 1), y(x - z + 1), z(y - x + 1))$, se pide:

   (a) **(1 Punto)** Enunciar el Teorema de Gauss explicando los conceptos que aparecen en el enunciado.

   (b) **(1.5 Puntos)** Comprobar que dicho teorema se puede aplicar al cálculo de la integral de superficie
   $$\iint_S \mathbf{F} dS,$$
   y calcular dicha integral mediante la aplicación del teorema.

3. **(2.5 Puntos)** Calcular
$$\int_\gamma yzdx + (xz + y)dy + (xy + 1)dz$$
siendo γ una curva de clase C^1 que une el punto $(0, 0, 0)$ con el punto $(1, 1, 1)$.

4. **(2.5 Puntos)** Calcular la integral
$$\int_\gamma \frac{z}{1 + 2z^2 + z^4}dz,$$
en los siguientes casos:

   (a) $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

   (b) $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Examen resuelto

Enunciar las fórmulas integrales de Cauchy y explicar los conceptos que aparecen en el enunciado. Como aplicación, calcular **sin hacer uso del teorema de los residuos** la integral

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-i)^2} dz,$$

donde $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Solución. Las fórmulas de Cauchy pueden verse en la teoría. Respecto al cálculo de la integral, tenemos que i está dentro de la circunferencia que describe la curva y por las fórmulas integrales de Cauchy

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-i)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(i),$$

donde $f(z) = e^z$, y por tanto $f'(i) = e^i = \cos 1 + i \sin 1$. Así

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-i)^2} dz = -2\pi \sin 1 + i2\pi \cos 1.$$

Sea S la superficie formada por la semiesfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, $z \leq 1$, el tronco cilíndrico $x^2 + y^2 = 1$, $1 \leq z \leq 4$ y el círculo $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 4$. Dado el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (x(z - y + 1), y(x - z + 1), z(y - x + 1))$, se pide:

(a) **(1 Punto)** Enunciar el Teorema de Gauss explicando los conceptos que aparecen en el enunciado.

(b) **(1.5 Puntos)** Comprobar que dicho teorema se puede aplicar al cálculo de la integral de superficie

$$\iint_S \mathbf{F} dS,$$

y calcular dicha integral mediante la aplicación del teorema.

Solución. (a) Teoría.

(b) La superficie es unión de gráficas de funciones reales de clase C^1 definidas sobre conjuntos del plano. Más precisamente, se comprueba fácilmente que $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$, donde

$$S_1 = \begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = 1 - \sqrt{1 - u^2 - v^2}, \\ (u, v) \in \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}, \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{cases} x = u, \\ z = +\sqrt{1 - u^2}, \\ z = v, \\ (u, v) \in [-1, 1] \times [1, 4], \end{cases}$$

$$S_3 = \begin{cases} x = u, \\ z = -\sqrt{1-u^2}, \\ z = v, \\ (u,v) \in [-1,1] \times [1,4], \end{cases}$$

$$S_4 = \begin{cases} x = u, \\ z = v, \\ z = 4, \\ (u,v) \in \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \le 1\}. \end{cases}$$

Además S encierra un volumen V. Por otra parte, el campo tiene sus funciones coordenadas polinómicas que son de clase C^∞.Entonces podemos aplicar el Teorema de Gauss

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} dS &= \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F})(x,y,z) dxdydz \\ &= \iiint_V 3 dxdydz \\ &= 3 \iiint_{V_1} dxdydz + 3 \iiint_{V_2} dxdydz, \end{aligned}$$

donde

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 \le 1,\ z \le 1\},$$

$$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1,\ 1 \le z \le 4\}.$$

Calculando aparte

$$\iiint\limits_{V_1} dxdydz = \frac{2}{3}\pi,$$

$$\iiint\limits_{V_2} dxdydz = 3\pi,$$

aplicando las fórmulas del volumen de la semiesfera V_1 y el cilindro V_2. Entonces

$$\iint\limits_S \mathbf{F} dS = 2\pi + 9\pi = 11\pi.$$

Calcular

$$\int_\gamma yzdx + (xz+y)dy + (xy+1)dz$$

siendo γ una curva de clase C^1 que une el punto $(0,0,0)$ con el punto $(1,1,1)$.

Solución. Calculamos el rotacional del campo

$$\operatorname{Rot}(\mathbf{F})(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz+y & xy+1 \end{vmatrix} = (0,0,0),$$

por lo que el campo es conservativo. Entonces existe una función potencial $f(x, y, z)$ de modo que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= yz,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= xz+y,\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= xy+1.\end{aligned}$$

Utilizamos la primera condición para conseguir

$$f(x,y,z) = \int yzdx = xyz + g(y,z),$$

derivamos esta expresión respecto de y y sustituimos en la segunda condición

$$xz + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = xz + y,$$

por lo que

$$g(y,z) = \int ydy = \frac{y^2}{2} + h(z),$$

y así

$$f(x,y,z) = \int yzdx = xyz + \frac{y^2}{2} + h(z).$$

Derivando respecto de z esta última expresión y sustituyendo en la tercera expresión

$$xy + h'(z) = xy + 1,$$

de donde

$$h(z) = \int dz = z,$$

y así una función potencial es

$$f(x,y,z) = \int yzdx = xyz + \frac{y^2}{2} + z.$$

Entonces

$$\int_\gamma yzdx + (xz+y)dy + (xy+1)dz = f(1,1,1) - f(0,0,0) = \frac{5}{2}.$$

Calcular la integral

$$\int_\gamma \frac{z}{1+2z^2+z^4}dz,$$

en los siguientes casos:

(a) $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

(b) $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Solución. Calculamos las singularidades de la función mediante la ecuación $1 + 2z^2 + z^4 = 0$, de donde

$$z^2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1,$$

y por tanto las soluciones son $\pm i$, ambas de multiplicidad dos. Calculamos a continuación las integrales.

(a) En este caso ambas singularidades están dentro de la circunferencia y así

$$\int_\gamma \frac{z}{1+2z^2+z^4} dz = 2\pi i [\mathrm{Res}(f(z), i) + \mathrm{Res}(f(z), -i)],$$

donde $f(z) = \dfrac{z}{1+2z^2+z^4}$. Ambos son polos de orden dos ya que

$$\lim_{z \to i} (z-i)^2 f(z) = \lim_{z \to i} \frac{z}{(z+i)^2} = -\frac{i}{4},$$

$$\lim_{z \to -i} (z+i)^2 f(z) = \lim_{z \to -i} \frac{z}{(z-i)^2} = \frac{i}{4}.$$

Calculamos aparte

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f(z), i) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \to i} \frac{d}{dz} \left((z-i)^2 f(z) \right) \\ &= \lim_{z \to i} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(z+i)^2} \right) \\ &= \lim_{z \to i} \frac{i-z}{(z+i)^3} = 0, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f(z), -i) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \to -i} \frac{d}{dz} \left((z+i)^2 f(z) \right) \\ &= \lim_{z \to -i} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(z-i)^2} \right) \\ &= \lim_{z \to -i} \frac{-i-z}{(z-i)^3} = 0, \end{aligned}$$

y así

$$\int_\gamma \frac{z}{1+2z^2+z^4} dz = 0.$$

(b) En este caso las singularidades están en el exterior de la circunferencia y por tanto la función $f(z)$ es derivable en el interior de la curva. Aplicamos el teorema de Cauchy para obtener

$$\int_\gamma \frac{z}{1+2z^2+z^4} dz = 0.$$

Capítulo 9

15–2–2008

Enunciado

1. **(1 Punto)** Enuncia con precisión el Teorema de Gauss y pon un ejemplo en el que se use dicho resultado, explicando claramente que en dicho ejemplo se cumplen las condiciones que permiten la utilización del mismo.

2. (**2 Puntos**) Determinar el valor de a para que el campo $\mathbf{F}(x, y) = (ax + xy, ax^2 + y)$ sea conservativo y determinar en este caso la integral
$$\int_\sigma \mathbf{F} dt$$
siendo σ una curva que une los puntos $(1, 1)$ con $(2, 2)$.

3. **(2.5 Puntos)** Justificar la igualdad
$$\int_\sigma xydx + 2yzdy + 3xzdz = -\iint_\Omega (2y, 3z, x)dS$$
siendo
$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 4\}$$
y $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\sigma(t) = (2\cos t, 2\sin t, 4)$. Parametrizar Ω de forma compatible con la orientación de σ y obtener el valor de dichas integrales calculando la integral de superficie.

4. **(2 Puntos)** Calcular la serie de Laurent centrada en 0 de la función $f(z) = \frac{1}{z(z+1)^2}$ indicando su anillo de convergencia.

5. **(2.5 Puntos)** Siendo $r > 0$ un número positivo y $\gamma(t) = 1 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, calcular la integral
$$\int_\gamma \frac{z + i}{z^4 + z^2} dz$$
en función del parámetro r.

Examen resuelto

Enuncia con precisión el Teorema de Gauss y pon un ejemplo en el que se use dicho resultado, explicando claramente que en dicho ejemplo se cumplen las condiciones que permiten la utilización del mismo.

Solución. Teoría.

Determinar el valor de a para que el campo $\mathbf{F}(x,y) = (ax + xy, ax^2 + y)$ sea conservativo y determinar en este caso la integral

$$\int_\sigma \mathbf{F}dt$$

siendo σ una curva que une los puntos $(1,1)$ con $(2,2)$.

Solución. Calculamos el rotacional del campo

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ax+xy & ax^2+y & 0 \end{vmatrix} = (0,0,2ax-x) = (0,0,0),$$

de donde $a = 1/2$. Así el campo $\mathbf{F}(x,y) = (x/2 + xy, x^2/2 + y)$ es conservativo. Buscamos su función potencial $f(x,y)$ de manera que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{x}{2} + xy, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x^2}{2} + y. \end{aligned}$$

De la primera condición

$$f(x,y) = \int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int \left(\frac{x}{2} + xy\right) dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2}y + k(y),$$

y derivando esta expresión respecto de y y sustituyendo en la segunda condición obtenmos

$$\frac{x^2}{2} + y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{2} + k'(y),$$

y simplificando

$$k(y) = \int y dy = \frac{y^2}{2},$$

por lo que una función potencial es

$$f(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2}y + \frac{y^2}{2}.$$

Entonces

$$\int_\sigma \mathbf{F}dt = f(2,2) - f(1,1) = 7 - \frac{5}{4} = \frac{23}{4}.$$

Justificar la igualdad

$$\int_\sigma xydx + 2yzdy + 3xzdz = -\iint_\Omega (2y, 3z, x)dS$$

siendo

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 4\}$$

y $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\sigma(t) = (2\cos t, 2\sin t, 4)$. Parametrizar Ω de forma compatible con la orientación de σ y obtener el valor de dichas integrales calculando la integral de superficie.

Solución. Si $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy, 2yz, 3xz)$, entonces su rotacional es

$$\mathrm{rot}(\mathbf{F})(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & 2yz & 3xz \end{vmatrix} = (-2y, -3z, -x).$$

Como σ es la curva frontera de Ω, que es la superficie gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$. La igualdad es pues virtud del Teorema de Stokes.

Parametrizamos Ω como

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} x = u, \\ y = v, \\ z = u^2 + v^2, \\ (u, v) \in \Lambda = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 4\}. \end{array} \right\}$$

Entonces

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (-2u, -2v, 1),$$

y dado que la coordenada z de $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ es positivo, dicho vector apunta hacia arriba. Dicha parametrización es compatible con la de la curva, teniendo en cuenta que el eje x sale perpendicularmente del plano del papel. Entonces

$$\begin{aligned} \iint_\Omega (2y, 3z, x)dS &= \iint_\Lambda < (2v, 3(u^2 + v^2), u), (-2u, -2v, 1) > dudv \\ &= \iint_\Lambda (-4vu - 6u^2v - 6v^3 + u)dudv \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (-4r\cos\theta\sin\theta - 6r^3\cos^2\theta\sin\theta - 6\sin^3\theta + r\cos\theta)rd\theta dr = 0. \end{aligned}$$

Calcular la serie de Laurent centrada en 0 de la función $f(z) = \frac{1}{z(z+1)^2}$ indicando su anillo de convergencia.

Solución. Teniendo en cuenta que $\frac{1}{(z+1)^2} = -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z+1}\right)$, calculamos

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad \text{si } |z| < 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z+1)^2} &= -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z+1}\right) = -\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\right) \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}((-1)^n z^n) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1) z^n.
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z(z+1)^2} = \frac{1}{z}\frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{n-1} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{n-1} \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+2)z^n \quad \text{si } 0 < |z| < 1.
\end{aligned}$$

Siendo $r > 0$ un número positivo y $\gamma(t) = 1 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, calcular la integral

$$\int_\gamma \frac{z+i}{z^4+z^2}dz$$

en función del parámetro r.

Solución. Si $f(z) = \frac{z+i}{z^4+z^2}$, calculamos sus polos con la ecuación

$$z^4 + z^2 = z^2(z^2+1) = 0,$$

de donde éstos son 0, de multiplicidad dos y $\pm i$, ambos de multiplicidad uno. Calculamos

$$\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z+i}{z^2+1} = i,$$

por lo que 0 es un polo de orden dos cuyo residuo es

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f(z),0) &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}(z^2 f(z)) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z+i}{z^2+1}\right) \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{1-z^2-2zi}{(z^2+1)^2} = 1.
\end{aligned}$$

Con i calculamos

$$\lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{z+i}{z^2(z+i)} = -1,$$

por lo que es un polo de orden uno cuyo residuo es precisamente $\operatorname{Res}(f(z),i) = -1$. Finalmente,

$$\lim_{z\to -i} f(z) = \lim_{z\to -i}\frac{z+i}{z^2(z-i)(z+i)} = \lim_{z\to -i}\frac{1}{z^2(z-i)} = -\frac{i}{2},$$

por lo que $-i$ es una singularidad evitable y así su residuo es $\operatorname{Res}(f(z),-i) = 0$.

Distinguimos ahora los siguientes casos:

- Si $r < 1$, no hay singularidades en el interior de la circunferencia por lo que
$$\int_\gamma \frac{z+i}{z^4+z^2}dz = 0.$$

- Si $1 < r < \sqrt{2}$, la única singularidad en el interior de la curva es 0, por lo que
$$\int_\gamma \frac{z+i}{z^4+z^2}dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f(z),0) = 2\pi i.$$

- Si $r > \sqrt{2}$, entonces todas las singularidades están en el interior de la circunferencia y así
$$\int_\gamma \frac{z+i}{z^4+z^2}dz = 2\pi i[\mathrm{Res}(f(z),0) + \mathrm{Res}(f(z),i) + \mathrm{Res}(f(z),-i)] = 0.$$