9

C.2.

$\boxed{\mathbf{9}}$.

De todos los tríos de números reales cuyos cuadrados suman $\mathbf{352}$ encuentra los que maximizan o minimizan la suma de sus cubos.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) Los máximos absolutos son $(0 \quad 0 \quad \sqrt{359})$, $(0 \quad \sqrt{359} \quad 0)$ y $(\sqrt{359} \quad 0 \quad 0)$ y los mínimos absolutos son $(0 \quad 0 \quad -\sqrt{359})$, $(0 \quad -\sqrt{359} \quad 0)$ y $(-\sqrt{359} \quad 0 \quad 0)$.
2) Los máximos absolutos son $(0 \quad 0 \quad \sqrt{367})$, $(0 \quad \sqrt{367} \quad 0)$ y $(\sqrt{367} \quad 0 \quad 0)$ y los mínimos absolutos son $(0 \quad 0 \quad -\sqrt{367})$, $(0 \quad -\sqrt{367} \quad 0)$ y $(-\sqrt{367} \quad 0 \quad 0)$.
3) Los máximos absolutos son $(0 \quad 0 \quad \sqrt{377})$, $(0 \quad \sqrt{377} \quad 0)$ y $(\sqrt{377} \quad 0 \quad 0)$ y los mínimos absolutos son $(0 \quad 0 \quad -\sqrt{377})$, $(0 \quad -\sqrt{377} \quad 0)$ y $(-\sqrt{377} \quad 0 \quad 0)$.

4) Los máximos absolutos son $(0 \quad 0 \quad 4\sqrt{22})$, $(0 \quad 4\sqrt{22} \quad 0)$ y $(4\sqrt{22} \quad 0 \quad 0)$ y los mínimos absolutos son $(0 \quad 0 \quad -4\sqrt{22})$, $(0 \quad -4\sqrt{22} \quad 0)$ y $(-4\sqrt{22} \quad 0 \quad 0)$.
5) Los máximos absolutos son $(0 \quad 0 \quad \sqrt{379})$, $(0 \quad \sqrt{379} \quad 0)$ y $(\sqrt{379} \quad 0 \quad 0)$ y los mínimos absolutos son $(0 \quad 0 \quad -\sqrt{379})$, $(0 \quad -\sqrt{379} \quad 0)$ y $(-\sqrt{379} \quad 0 \quad 0)$.
6) Los máximos absolutos son $(0 \quad 0 \quad 8\sqrt{6})$, $(0 \quad 8\sqrt{6} \quad 0)$ y $(8\sqrt{6} \quad 0 \quad 0)$ y los mínimos absolutos son $(0 \quad 0 \quad -8\sqrt{6})$, $(0 \quad -8\sqrt{6} \quad 0)$ y $(-8\sqrt{6} \quad 0 \quad 0)$.

9 $x, y, z \in \mathbb{R}$

$x^2+y^2+z^2 = 352 \rightarrow$ esfera

$f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3$ (optimizar)

$L(x,y,z) = x^3+y^3+z^3 + \lambda(x^2+y^2+z^2)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 3x^2+2\lambda x = 0 = x(3x+2\lambda) \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 3y^2+2\lambda y = 0 = y(3y+2\lambda) \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 3z^2+2\lambda z = 0 = z(3z+2\lambda) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

1. $x = y = z = 0$ (descartado porque $x^2+y^2+z^2 \neq 352$)
2. $x = y = 0$, $3z+2\lambda = 0 \Rightarrow z^2 = 352$
   $\rightarrow z = \frac{-2\lambda}{3}$
   $\Rightarrow z = \pm\sqrt{352}$
3. $x = 0$, $y = \pm\sqrt{352}$, $z = 0$

4. $x=0, \quad y=z=\dfrac{-2\lambda}{3}$

$$\Rightarrow \quad 2y^2=2z^2=352 \Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{y}}{z}=\pm\sqrt{176}$$

5. $x=\dfrac{-2\lambda}{3}, \quad y=z=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{352}$

6. $x=\dfrac{-2\lambda}{3}, \quad y=0, \quad z=\dfrac{-2\lambda}{3} \Rightarrow$

$$x=z=\pm\sqrt{176}$$

7. $x=\dfrac{-2\lambda}{3}, \quad y=\dfrac{-2\lambda}{3}, \quad z=0$

$$x=y=\pm\sqrt{176}$$

8. $x=y=z=\dfrac{-2\lambda}{3} \Rightarrow 3x^2=352$

$$\Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{352/3}$$

Así que tenemos 14 puntos candidatos. Para simplificar definimos:

$$a = \sqrt{352} \quad , \quad b = \sqrt{176} \quad , \quad c = \sqrt{352/3}$$

Los puntos son:

$$P_1^{\pm} = (0, 0, \pm a)$$

$$P_2^{\pm} = (0, \pm a, 0)$$

$$P_3^{\pm} = (\pm a, 0, 0)$$

$$P_4^{\pm} = (0, \pm b, \pm b)$$

$$P_5^{\pm} = (\pm b, 0, \pm b)$$

$$P_6^{\pm} = (\pm b, \pm b, 0)$$

$$P_7^{\pm} = (\pm c, \pm c, \pm c)$$

Como la condicion (esfera) es un compacto, tenemos garantizado (usando el teorema de Weierstrass) la existencia de máximos y mínimos absolutos entre los puntos anteriores. Así que calculamos f en dichos puntos:

$$f(P_1^+) = f(P_2^+) = f(P_3^+) = a^3$$
$$f(P_1^-) = f(P_2^-) = f(P_3^-) = -a^3$$
$$f(P_4^+) = f(P_5^+) = f(P_6^+) = 2b^3$$
$$f(P_4^-) = f(P_5^-) = f(P_6^-) = -2b^3$$
$$f(P_7^+) = 3c^3$$
$$f(P_7^-) = -3c^3$$

Ahora, como:

$$h_1 = a^3 = 352^{3/2}$$

$$h_2 = 2b^3 = 2 \cdot \left(\frac{352}{2}\right)^{3/2} = \frac{1}{2^{1/2}} \, 352^{3/2}$$

$$h_3 = 3c^3 = 3 \left(\frac{352}{3}\right)^{3/2} = \frac{1}{3^{1/2}} \, 352^{3/2}$$

Se tiene que $h_1 > h_2 > h_3$ y

entonces:

- P_1^+, P_2^+, P_3^+ son máximos absolutos
- P_1^-, P_2^-, P_3^- son mínimos absolutos.

10

C.2.

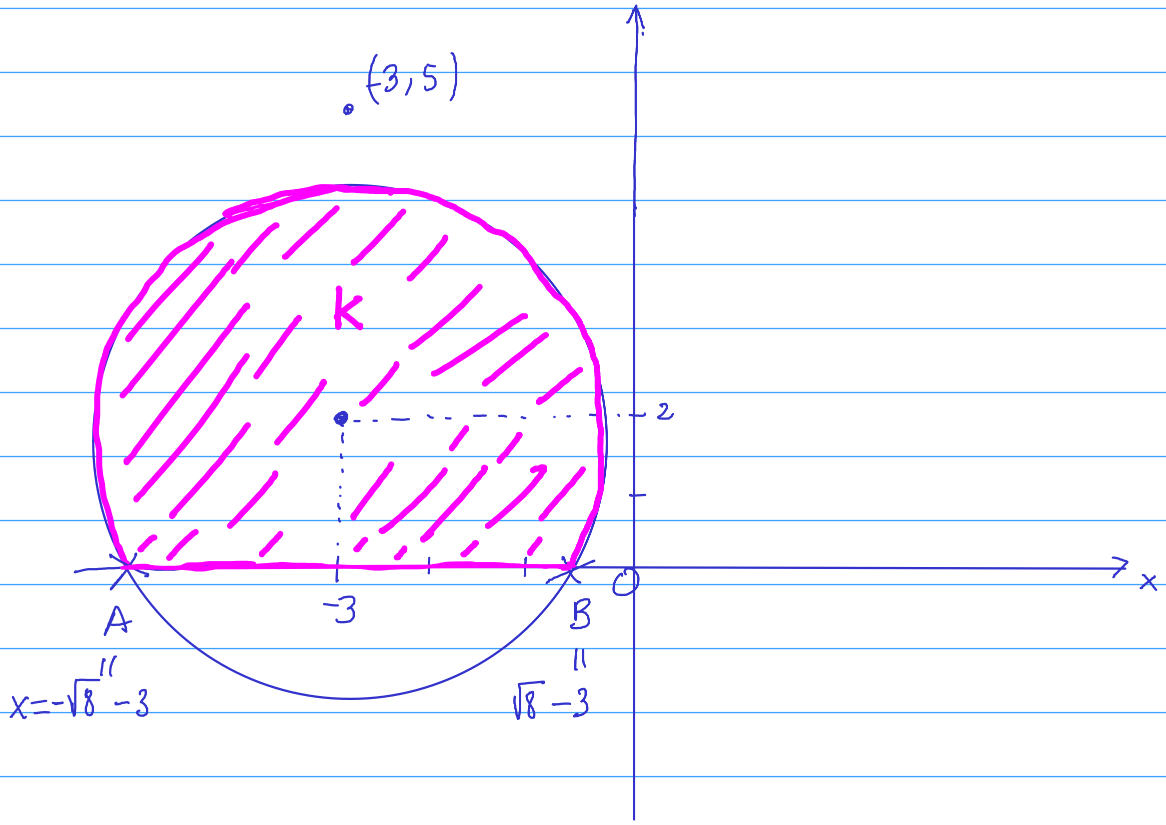
(10) Hay que seguir el mismo procedimiento que el 9.43 ¡Es el mismo ejercicio!

9.43. Consideremos el conjunto

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 8, y \geq 0\}$$

Encuentra los puntos de K más cercanos y más lejanos al punto $(-3, 5)$.

9.43 $K = \{ (x,y) : (x+3)^2 + (y-2)^2 \leq 8 ,\ y \geq 0 \}$



Sea (x,y) un punto del conjunto K.

$f(x,y) = d((x,y),(-3,5)) = \sqrt{(x+3)^2 + (y-5)^2}$

Los máximo de $f(x,y)$ se situarán en los mismos puntos que los de $g(x,y) = (f(x,y))^2 = (x+3)^2 + (y-5)^2$

Buscamos los extremos relativos en Int K

$$\nabla g(x,y) = \big(2(x+3) ,\ 2(y-5) \big) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases}$$

Pero $(-3,5) \notin$ Int K , con lo cual no tenemos puntos candidatos a extremos en Int K.

Buscamos ahora en los puntos de la frontera.

$\partial_1 K$ $\quad \partial_1 K = \{ (x,y) \text{ tq } (x+3)^2 + (y-2)^2 = 8 ,\ y > 0 \}$

$$L(x,y) = (x+3)^2 + (y-5)^2 + \lambda \left[(x+3)^2 + (y-2)^2 - 8 \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (\lambda+1)\, 2\,(x+3) \begin{cases} x = -3 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2(y-5) + 2\lambda(y-2) = 0 = (2+2\lambda)\, y - 10 - 4\lambda = 0$$

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 - 8 = 0$$

$\circledast$ $x = -3 \Rightarrow (y-2)^2 = 8 \Rightarrow y - 2 = \pm\sqrt{8} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 + \sqrt{8} \\ \cancel{y = 2 - \sqrt{8}} \end{cases}$

$$(2+2\lambda)(2+\sqrt{8}) - 4\lambda = 10$$

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{8}\,\lambda = 6 - 2\sqrt{8} \Rightarrow \lambda = \frac{3}{\sqrt{8}} - 1$$

$\circledast$ $\lambda = -1 \Rightarrow -10 = 4\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{-10}{4}$!! (no hay solución para $\lambda = -1$)

$$HL(x,y) = \begin{pmatrix} 2(\lambda+1) & 0 \\ 0 & 2(\lambda+1) \end{pmatrix}$$

$(x,y) = (-3,\ 2+\sqrt{8})$ $\qquad (h_1,h_2) \neq (0,0)$

$$(h_1,h_2)\ HL(x,y)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 2(\lambda+1)(h_1^2+h_2^2) > 0 \Rightarrow (\ast\ast)$$

(h_1,h_2) verifica $\qquad \nabla g(x,y)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 2\sqrt{8}\,h_2 = 0 \Rightarrow h_2 = 0$

$$\nabla g(x,y) = \big(2(x+3)\quad 2(y-2)\big)$$

$(\ast\ast)$ $\quad (-3,\ 2+\sqrt{8})$ es un mínimo relativo condicionado

$\partial_2 K$

$$\partial_2 K = \{(x,y) : y=0,\ A<y<B\}$$

$$g(x,y) \overset{y=0}{=} (x+3)^2 = G(x)$$

$G'(x) = 2(x+3) = 0 \Rightarrow x=-3 \qquad y=0$

$G''(x) = 2>0 \Rightarrow (-3,0)$ es un mínimo relativo condicionado.

$\partial_3 K$ $\quad \partial_3 K = \{(A,0)\}$

$\partial_4 K$ $\quad \partial_4 K = \{(B,0)\}$

puntos candidatos a extremos

Estudiamos los 4 puntos candidatos a extremos absolutos

$g(\sqrt{8}-3,0) = 8+25 = 33$

$g(-\sqrt{8}-3,0) = 8+25 = 33$

$g(-3,0) = 0+25 = 25$

$g(-3,\ 2+\sqrt{8}) = 0+(-3+\sqrt{8})^2 = 9+8-6\sqrt{8} = 17-6\sqrt{8}$

Así que:

$(8-\sqrt{3},0)$ y $(-8-\sqrt{3},0)$ son máximos absolutos

$(-3,2+\sqrt{8})$ es un mínimo absoluto.

11

C.2.

$\boxed{11}$.

Se pide encontrar los puntos más cercanos y más lejanos de la esfera $(z-9)^2 + (y-8)^2 + (x-4)^2 = 9$ al origen de coordenadas.

Indicación: cuando resuelvas el sistema de ecuaciones resultante de igualar las parciales de la lagrangiana a 0 te recomiendo que saques factor común $2x$, $2y$ *o* $2z$ *según proceda. Una vez hecho eso y dividiendo unas ecuaciones por otras obtendrás que los cocientes* $\frac{x}{y}$, $\frac{x}{z}$ *y* $\frac{x}{y}$ *son constantes y te permiten expresar a* z *e* y *como múltiplos de* x*. Introduce esos valores en la condición y obtendrás las soluciones del sistema.*

Observación: en las posibles soluciones siguientes P_l *denota el punto más lejano y* P_c *el más cercano.*

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $P_l = [4.9257, 9.8715, 11.1079]$ y $P_c = [3.0343, 6.0885, 6.8521]$
2) $P_l = [4.9357, 9.8815, 11.1179]$ y $P_c = [3.0443, 6.0985, 6.8621]$
3) $P_l = [4.9857, 9.9315, 11.1679]$ y $P_c = [3.0943, 6.1485, 6.9121]$
4) $P_l = [4.8957, 9.8415, 11.0779]$ y $P_c = [3.0043, 6.0585, 6.8221]$
5) $P_l = [4.9057, 9.8515, 11.0879]$ y $P_c = [3.0143, 6.0685, 6.8321]$
6) $P_l = [4.9457, 9.8915, 11.1279]$ y $P_c = [3.0543, 6.1085, 6.8721]$

(11) Puntos más cercanos y lejanos al origen de la esfera

$$(x-4)^2+(y-8)^2+(z-9)^2=9$$

Por el teorema de Weierstrass tenemos garantizada la existencia de extremos absolutos, así que buscaremos los candidatos a extremos relativos condicionados y localizaremos allí los absolutos.

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

$$L(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda\left[(x-4)^2+(y-8)^2+(z-9)^2-9\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda(x-4) = 0 = \underbrace{2x(1+\lambda) = 8\lambda}_{(E1)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 2\lambda(y-8) = 0 = \underbrace{2y(1+\lambda) = 16\lambda}_{(E2)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z + 2\lambda(z-9) = 0 = \underbrace{2z(1+\lambda) = 18\lambda}_{(E3)}$$

Dividiendo (E1) entre (E2) y (E2) entre (E3)
(suponiendo que no se anulen)

$$\frac{2x}{2y} = \frac{8}{16} \qquad \frac{y}{z} = \frac{16}{18}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{y}{z} = \dfrac{8}{9} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 2x \\[2ex] z = \dfrac{9}{8} y \end{array} \right.$$

Así que las soluciones son de la forma

$$P_x = \left(x, 2x, \frac{9}{4} x \right)$$

Imponemos a P_x la condición de la esfera:

$$(x-4)^2 + (2x-8)^2 + \left(\frac{9}{4}x - 9\right)^2 = 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3.054, \quad y = 6.108, \quad z = 6.872 \\ x = 4.946, \quad y = 9.891, \quad z = 11.127 \end{cases}$$

Así que, comparando las distancias de

$$P_1 = (3.054, 6.108, 6.872) \quad \text{y}$$

$$P_2 = (4.946, 9.891, 11.127)$$

se tiene que P_1 es el mínimo absoluto y P_2 es el máximo absoluto.

Queda por justificar que la división de ecuaciones que hemos hecho no elimina ninguna solución, es decir, que (E2) y (E3) no se pueden anular.

(E2) ó (E3) se anularían si $\lambda = 0$, lo que implica $x = y = 0 = z$ y entonces el punto no estaría en la esfera.

14

C.2.

15

C.2.

16

C.2.

17

C.2.

17.

En este ejercicio tratamos de investigar cuáles son los puntos más cercanos y lejanos al origen situados en la intersección (compacta) del plano $x + y + z = 2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 4$. La aplicación del teorema de Wierstrass nos da la existencia de máximos y mínimos absolutos, en concreto el máximo absoluto es $\left[-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$ y los mínimos absolutos son $[2, 0, 0]$ y $[0, 2, 0]$. Sin embargo existe otro extremo relativo que se pide calcular y justificar si es máximo o mínimo.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $[1.4142, 1.4142, -0.8284]$
2) $[1.4342, 1.4342, -0.8084]$
3) $[1.4542, 1.4542, -0.7884]$
4) $[1.3642, 1.3642, -0.8784]$
5) $[1.3742, 1.3742, -0.8684]$
6) $[1.3942, 1.3942, -0.8484]$

9.45. Encontrar los puntos que están sobre el cilindro de ecuación $x^2+y^2=1$ y sobre el plano de ecuación $x+y+z=1$ y cuya distancia al origen de coordenadas sea máxima o mínima

9.45

$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

ligadures $\begin{cases} x^2+y^2=1 \longrightarrow g_1(x,y,z) = x^2+y^2-1 \\ x+y+z=1 \longrightarrow g_2(x,y,z) = x+y+z-1 \end{cases}$

$L(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-1)+\mu(x+y+z-1)$

(S) $\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x+2\lambda x+\mu = 2x(1+\lambda)+\mu = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y+2\lambda y+\mu = 2y(1+\lambda)+\mu = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z+\mu = 0 \\ x^2+y^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

(*) $2x(1+\lambda) = 2y(1+\lambda) \overset{\text{si } \lambda\neq -1}{\Longrightarrow} x=y \Rightarrow 2x^2=1 \Rightarrow y=x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = 1 \mp \dfrac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mu = -2z = -2 \pm \dfrac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{-\mu}{2y} - 1 = \dfrac{2 \mp \frac{4}{\sqrt{2}}}{2\cdot\frac{1}{\pm\sqrt{2}}} - 1 = \pm\sqrt{2} - 2 - 1 = \pm\sqrt{2}-3$

(*) Si $\lambda = -1 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow \left.\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}\right\} \Rightarrow x^2+(1-x)^2=1$

$\Rightarrow 2x^2-2x+1=1 \Rightarrow 2x(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=1 \\ x=1 \Rightarrow y=0 \end{cases}$

$\boxed{\text{SOLUCIONES DE (S)}}$

A. $x=0,\ y=1,\ z=0$ con $\lambda=-1$ y $\mu=0$

B. $x=1,\ y=0,\ z=0$ con $\lambda=1$ y $\mu=0$

C. $x=y=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ z=1-\sqrt{2}$ con $\lambda=\sqrt{2}-3$ y $\mu=-2+2\sqrt{2}$

D. $x=y=\dfrac{-1}{\sqrt{2}},\ z=1+\sqrt{2}$ con $\lambda=-\sqrt{2}-3$ y $\mu=-2-2\sqrt{2}$

$\boxed{\text{Calculamos ahora } HL(x,y,z)}$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2x+2\lambda x+\mu=2x(1+\lambda)+\mu$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=2y+2\lambda y+\mu=2y(1+\lambda)+\mu$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}=2z+\mu=0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=2(1+\lambda)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=2(1+\lambda)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}=2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}=0$$

$$HL(x,y,z)=\begin{pmatrix}2(1+\lambda) & 0 & 0\\ 0 & 2(1+\lambda) & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$(h_1,h_2,h_3)\ HL(x,y,z)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}=2(1+\lambda)(h_1^2+h_2^2)+2h_3^2=Q$$

(h_1,h_2,h_3) debe satisfacer:

C1. $\nabla g_1(x,y,z)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}=(2x,2y,0)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}=2x\,h_1+2y\,h_2=0$

c.2 $\nabla g_2(x,y,z)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix} = (1,1,1)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix} = h_1+h_2+h_3=0$

$\boxed{\text{PUNTO A}}$ $\qquad \underline{\lambda=-1} \qquad A=(0,1,0)$

$$Q=2h_3^2 \Rightarrow Q>0$$

$$\left.\begin{array}{l} h_1+h_2+h_3=0 \\ 2h_2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow h_1+h_3=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} h_3=-h_1 \\ (h_1,h_2,h_3)\neq 0 \\ h_2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow h_3\neq 0$$

A es un mínimo relativo condicionado

$\boxed{\text{PUNTO B}}$ $\qquad \underline{\lambda=-1} \qquad B=(1,0,0)$

$$Q=2h_3^2 \Rightarrow Q>0$$

$$\left.\begin{array}{l} h_1+h_2+h_3=0 \\ 2h_1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow h_2+h_3=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} h_3=-h_2 \\ (h_1,h_2,h_3)\neq 0 \\ h_1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow h_3\neq 0$$

B es un mínimo relativo condicionado

$\boxed{\text{PUNTO C}}$ $C=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1-\sqrt{2}\right)$ $\lambda=\sqrt{2}-3$ y $\mu=-2+2\sqrt{2}$

$$2(1+\lambda)(h_1^2+h_2^2)+2h_3^2 = Q$$

$$\| $$

$$2(\sqrt{2}-2)(h_1^2+h_2^2)+2h_3^2$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x\,h_1+2y\,h_2=0 = \frac{2}{\sqrt{2}}(h_1+h_2)=0 \Rightarrow \underline{h_1=-h_2} \\ h_1+h_2+h_3=0 \Rightarrow h_3=0 \\ \qquad (h_1,h_2,h_3)\neq(0,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow h_1\neq 0\neq h_2$$

$$Q = \underbrace{2(\sqrt{2}-2)}_{\wedge \atop 0}\underbrace{(h_1^2+h_2^2)}_{\vee \atop 0} < 0 \Rightarrow$$

C es un máximo relativo condicionado

PUNTO D $\quad D = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 1+\sqrt{2}\right) \quad \lambda = -\sqrt{2}-3$ y $\mu = -2+2\sqrt{2}$

$$2(1+\lambda)(h_1^2+h_2^2) + 2h_3^2 = Q$$

$$\parallel$$

$$2(\sqrt{2}-4)(h_1^2+h_2^2) + 2h_3^2$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x\,h_1 + 2y\,h_2 = 0 = \frac{-2}{\sqrt{2}}(h_1+h_2) = 0 \Rightarrow \underline{h_1 = -h_2} \\ h_1+h_2+h_3 = 0 \Rightarrow h_3 = 0 \\ (h_1, h_2, h_3) \neq (0,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow h_1 \neq 0 \neq h_2$$

$$Q = 2\underbrace{(\sqrt{2}-4)}_{<0}\underbrace{(h_1^2+h_2^2)}_{>0} < 0 \Rightarrow$$ D es un máximo relativo condicionado

FINALMENTE, comparando lo que vale f en todos los puntos extremos relativos, tenemos:

A y B son mínimos absolutos
D es un máximo absoluto.

18

C.2.

$\boxed{\mathbf{18}}$. Calcula la integral

$$\iiint_\Omega \log z + \operatorname{sen}\left(y^2 + x^2\right) dxdydz$$

con $\Omega = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 7 \leq z \leq 11\}$.

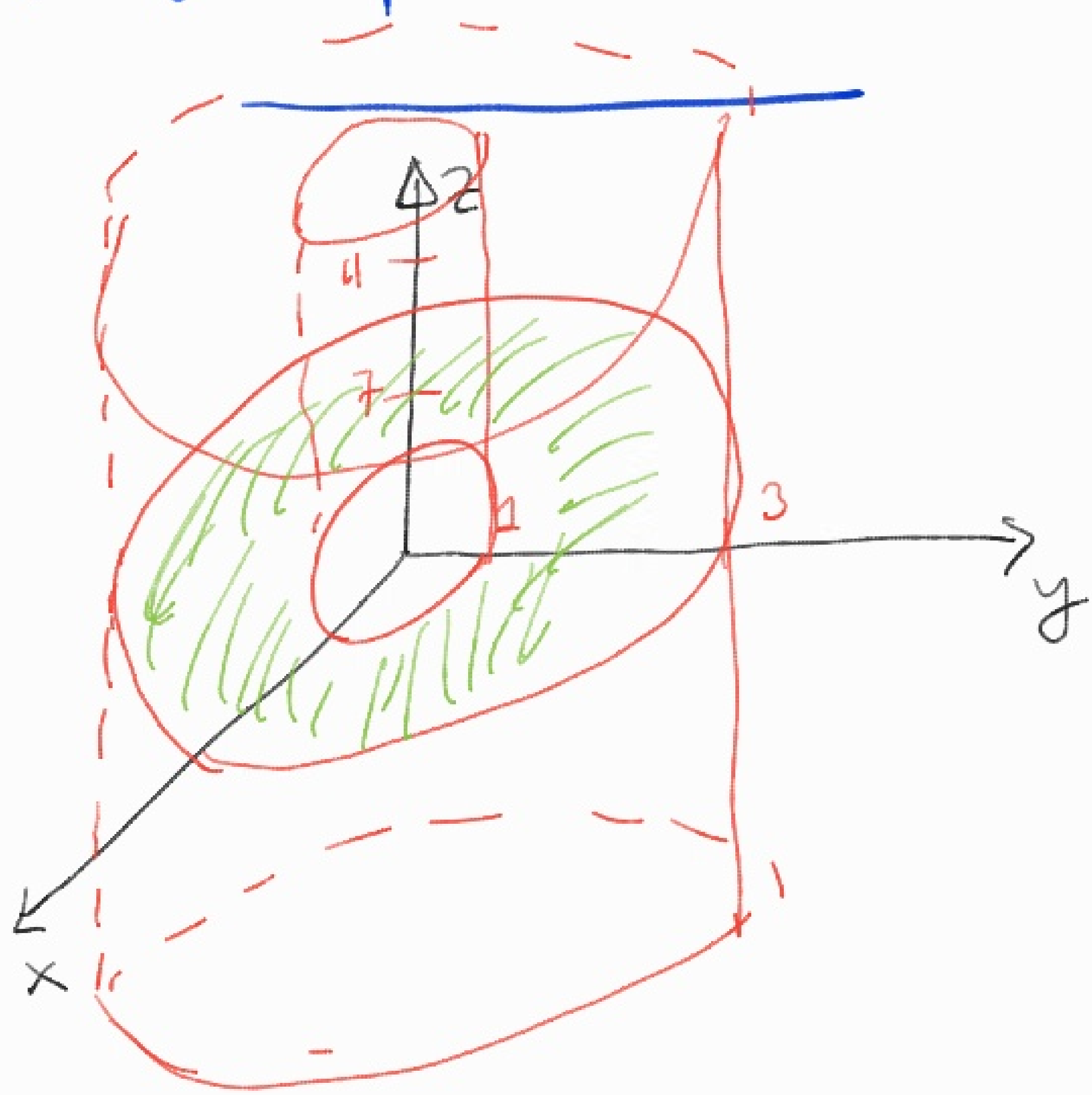
Ten en cuenta que los argumentos de las funciones trigonométricas se expresan en radianes.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) **246.2883762723447**
2) **238.2883762723447**
3) **228.2883762723447**
4) **240.2883762723447**
5) **241.2883762723447**
6) **245.2883762723447**

(18) $$\iiint_{\Omega} \log z + \operatorname{sen}(x^2+y^2)\, dx\,dy\,dz$$

$$\Omega = \{(x,y,z) \text{ tq } 1 \le x^2+y^2 \le 9, \quad 7<z<11\}$$



$$\Omega_c = \{(r,\theta,z),\ 7<z<11,\ 1<r<3,\ 0<\theta<2\pi\}$$

$$I = \iiint_{\Omega_C} \left[\log(z) + \operatorname{sen}(r^2)\right] r \, dr \, d\theta \, dz$$

$$= \int_7^{11} \int_0^{2\pi} \int_1^3 r \log z + \frac{2}{2} r \operatorname{sen}(r^2) \, dr \, d\theta \, dz$$

$$= \int_7^{11} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \log z - \frac{1}{2} \cos(r^2)\right]_{r=1}^{r=3} d\theta \, dz$$

$$= \int_7^{11} \int_0^{2\pi} \frac{8}{2} \log z - \frac{1}{2}(\cos 9 - \cos 1) \, d\theta \, dz$$

$$= 2\pi \int_7^{11} 4 \log z - \frac{1}{2}(\cos 9 - \cos 1) \, dz$$

$$= 8\pi \int_7^{11} \log z \, dz - \pi(\cos 9 - \cos 1)\underset{\|\,(*)}{(11-7)}$$

Intermedio

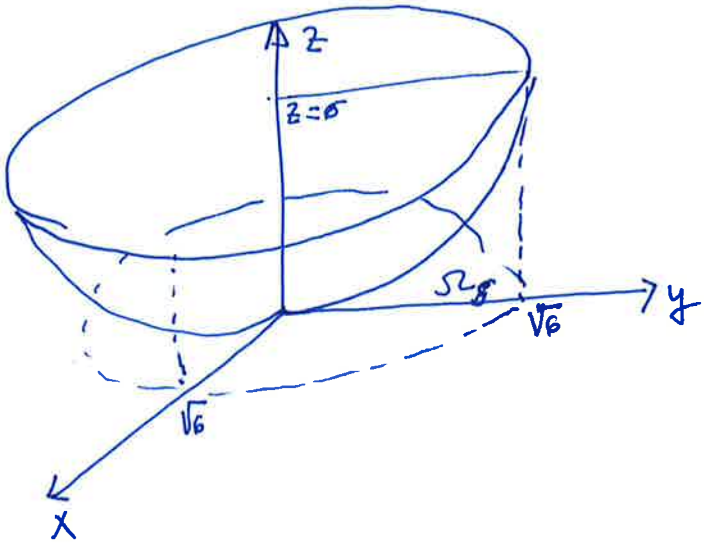
$u = \log z \quad dv = dz$

$\int \log z \, dz$

19

C.2.

(19) Volumen limitado por $z=6$ y $z=x^2+y^2$



$$\Omega_{S,P} = \{(r,\theta),\ 0<r\leq\sqrt{6},\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$$

$$V = \iint_{\Omega_S} 6-x^2-y^2\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt{6}}\int_0^{2\pi}(6-r^2)r\,d\theta\,dr =$$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{6}} 6r-r^3\,dr = 2\pi\left[3r^2-\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{6}} = 2\pi\cdot\left(18-\frac{36}{4}\right)\approx 56,5487$$

21 a 24

C.2.

$\boxed{\mathbf{21}}$.

En este ejercicio y los siguientes vamos a utilizar el cambio de variable $\Phi(u,v) = \left[u^{\frac{2}{3}}\, v^{\frac{1}{3}}, u^{\frac{1}{3}}\, v^{\frac{2}{3}}\right]$.

Calcula $J\Phi(u,v)$.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\begin{pmatrix} \frac{2\,u^{\frac{1}{3}}\,v^{\frac{1}{3}}}{3} & \frac{u^{\frac{2}{3}}}{3\,v^{\frac{2}{3}}} \\ \frac{v}{3\,u^{\frac{2}{3}}} & \frac{2\,u^{\frac{2}{3}}}{3\,v^{\frac{1}{3}}} \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} \frac{2\,u^{\frac{1}{3}}\,v^{\frac{1}{3}}}{3} & \frac{u^{\frac{2}{3}}}{3\,v^{\frac{1}{3}}} \\ \frac{v^{\frac{2}{3}}}{3\,u^{\frac{2}{3}}} & \frac{2\,u^{\frac{1}{3}}}{3\,v^{\frac{1}{3}}} \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} \frac{2\,u^{\frac{1}{3}}\,v^{\frac{1}{3}}}{3} & \frac{u^{\frac{2}{3}}}{3\,v^{\frac{1}{3}}} \\ \frac{v^{\frac{2}{3}}}{3\,u^{\frac{2}{3}}} & \frac{2\,u^{\frac{2}{3}}}{3\,v^{\frac{1}{3}}} \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} \frac{2\,v^{\frac{1}{3}}}{3} & \frac{u^{\frac{2}{3}}}{3\,v^{\frac{2}{3}}} \\ \frac{v^{\frac{2}{3}}}{3\,u^{\frac{2}{3}}} & \frac{2\,u^{\frac{1}{3}}}{3\,v^{\frac{1}{3}}} \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} \frac{2\,v^{\frac{1}{3}}}{3\,u^{\frac{1}{3}}} & \frac{u^{\frac{2}{3}}}{3\,v^{\frac{2}{3}}} \\ \frac{v^{\frac{2}{3}}}{3\,u^{\frac{2}{3}}} & \frac{2\,u^{\frac{1}{3}}}{3\,v^{\frac{1}{3}}} \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} \frac{2\,v^{\frac{1}{3}}}{3} & \frac{u^{\frac{2}{3}}}{3\,v^{\frac{1}{3}}} \\ \frac{v^{\frac{2}{3}}}{3\,u^{\frac{2}{3}}} & \frac{2\,u^{\frac{1}{3}}}{3\,v^{\frac{1}{3}}} \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{22}}$.

Calcula el determinante de $J\Phi(u,v)$.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\frac{2^2}{3}$
2) $\frac{7}{3}$
3) 3
4) $-\frac{7}{3}$
5) $\frac{1}{3}$
6) $-\frac{2^2}{3}$

$\boxed{\mathbf{23}}$.

Considera el conjunto Ω delimitado por las curvas $y = 4x^2$, $y = 1x^2$, $x = 5y^2$ y $x = 11y^2$ y exprésalo en las coordenadas (u, v) relacionadas con (x, y) mediante $(x, y) = \Phi(u, v) = \left[u^{\frac{2}{3}}\, v^{\frac{1}{3}}, u^{\frac{1}{3}}\, v^{\frac{2}{3}}\right]$.
Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\left[\frac{3}{4}, 5\right] \times \left[\frac{3}{11}, \frac{4}{5}\right]$
2) $\left[\frac{3}{4}, 5\right] \times \left[\frac{3}{11}, 1\right]$
3) $\left[\frac{3}{2}, 7\right] \times \left[\frac{6}{11}, \frac{8}{5}\right]$
4) $\left[\frac{1}{4}, 1\right] \times \left[\frac{1}{11}, \frac{1}{5}\right]$
5) $\left[\frac{1}{2}, 5\right] \times \left[\frac{2}{11}, \frac{2}{5}\right]$
6) $\left[\frac{3}{4}, 5\right] \times \left[\frac{3}{11}, \frac{3}{5}\right]$

$\boxed{\mathbf{24}}$.

Usando el cambio de variable $\Phi(u, v) = \left[u^{\frac{2}{3}}\, v^{\frac{1}{3}}, u^{\frac{1}{3}}\, v^{\frac{2}{3}}\right]$ calcula la integral

$$\iint_{\Omega} dxdy$$

.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) 0.0272727272727272727
2) 0.927272727272727272
3) 1.0272727272727272727
4) -0.57272727272727272727
5) -0.27272727272727272727
6) 0.127272727272727272

(21)

$$\phi(u,v) = \left(u^{2/3} v^{1/3},\ u^{1/3} v^{2/3}\right)$$

$$J\phi(u,v) = ?$$

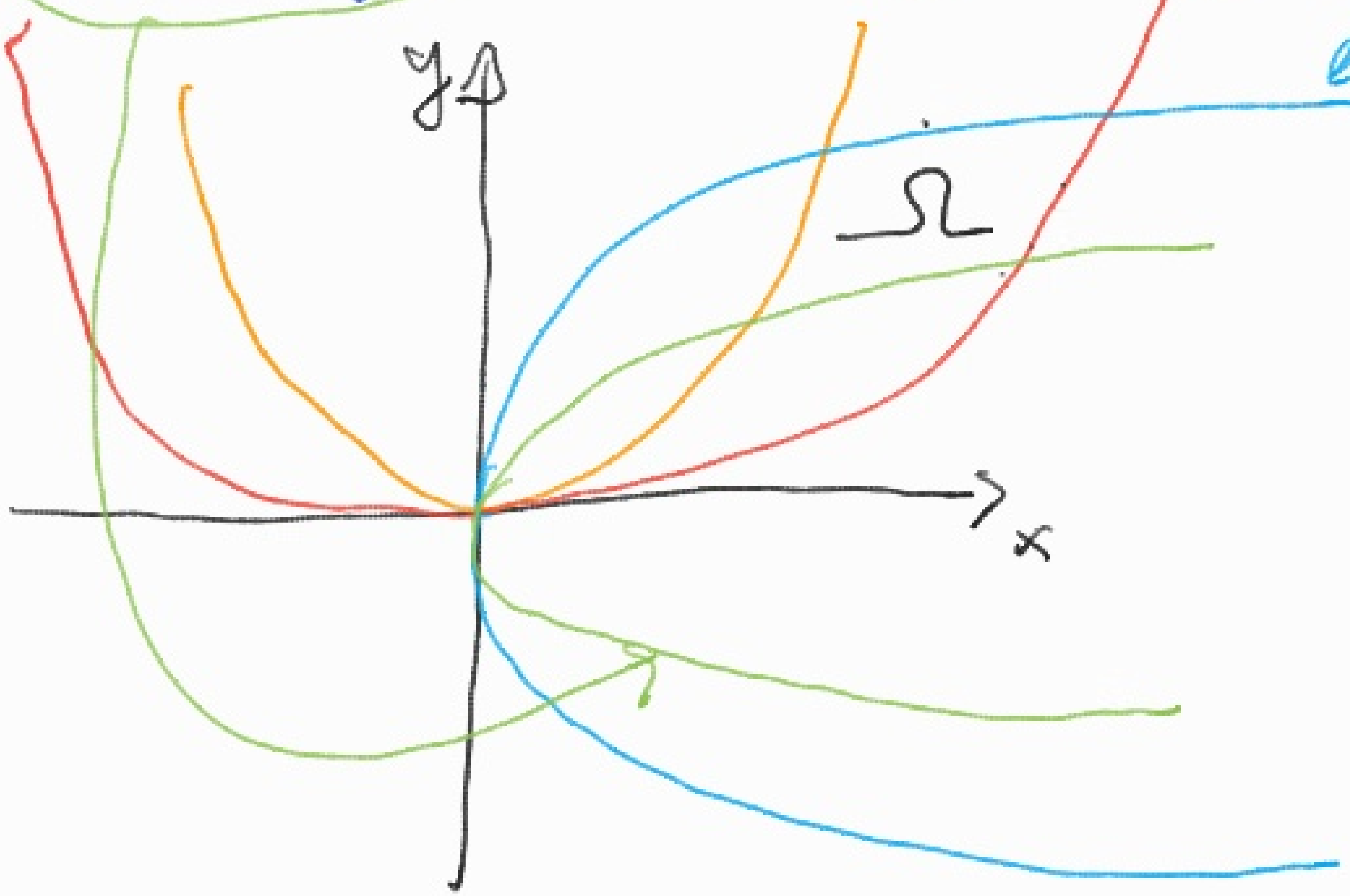
$$J\phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} u^{-1/3} v^{1/3} & \frac{1}{3} u^{2/3} v^{-2/3} \\ \frac{1}{3} u^{-2/3} v^{2/3} & \frac{2}{3} u^{1/3} v^{-1/3} \end{pmatrix}$$

(22)

$$\det J\phi(u,v) = \frac{4}{9} u^0 v^0 - \frac{1}{9} u^0 v^0 =$$

$$= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

23 Ω limitado por $y = 4x^2$, $y = x^2$, $x = 5y^2$, $x = 11y^2$



(23) Ω limitado por $y=4x^2$, $y=x^2$, $x=5y^2$, $x=11y^2$

$$(x,y)=\phi(u,v)=\left(u^{2/3}v^{1/3},\ u^{1/3}v^{2/3}\right)$$

Transformamos las curvas en las nuevas coordenadas:

$$y=4x^2 \rightsquigarrow u^{1/3}v^{2/3}=4\left(u^{2/3}v^{1/3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u^{1/3}\cancel{v^{2/3}}=4u^{4/3}\cancel{v^{2/3}} \Rightarrow 1=u^{3/3}=4u$$

$$y=x^2 \Rightarrow u^{1/3}v^{2/3}=\left(u^{2/3}v^{1/3}\right)^2 \Rightarrow u^{1/3}v^{2/3}=u^{4/3}v^{2/3}$$

$$\Rightarrow 1=u$$

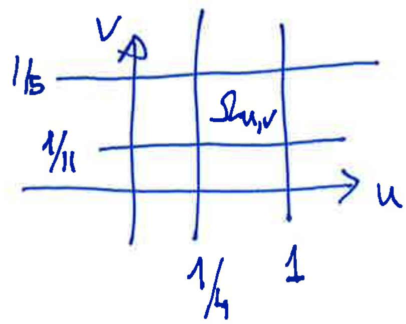
$$5y^2=x \Rightarrow \underset{\displaystyle \overset{\|}{5u^{2/3}v^{4/3}}}{5\left(u^{1/3}v^{2/3}\right)^2}=u^{2/3}v^{1/3} \Rightarrow 5v^{4/3}=v^{1/3} \Rightarrow v=\frac{1}{5}$$

$$x=11y^2 \Rightarrow 11\left(u^{1/3}v^{2/3}\right)^2=u^{2/3}v^{1/3} \Rightarrow 11u^{2/3}v^{4/3}=u^{2/3}v^{1/3}$$

$$\Rightarrow v=\frac{1}{11}$$

Así que las curvas se transforman en las rectas $u=1$, $u=\frac{1}{4}$

$v=\frac{1}{5}$ y $v=1/11$



$$\Omega_{u,v}=\left[\frac{1}{4},1\right]\times\left[\frac{1}{11},\frac{1}{5}\right]$$

24

$$I = \iint_{\Omega} 1\,dx\,dy = A(\Omega)$$

$$I = \iint_{\Omega} 1\,dx\,dy = \iint_{\Omega_{u,v}} 1 \quad \underbrace{1/3}_{} \; du\,dv$$

det de $J\Phi$ en valor absoluto

$$= \frac{1}{3} \iint_{\Omega_{u,v}} 1\,du\,dv = \frac{1}{3} A(\Omega_{u,v})$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{11}\right)$$

25

C.2.

$\boxed{\mathbf{25}}$. Calcula la integral

$$\iint_{\Omega}(x^2 - y)dxdy,$$

donde $\Omega = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 4, -x^2 - 1 \leq y \leq x^2 + 4\}$.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) 415.4333333333333
2) 415.8333333333333
3) 416.1333333333333
4) 415.0333333333333
5) 415.1333333333333
6) 415.2333333333333

25 (Ejercicio 1)

$$I = \iint_{\Omega} (x^2 - y)\, dx\, dy$$

$$\Omega = \{ (x,y) ,\ -1 \leq x \leq 4 ,\ -x^2-1 \leq y \leq x^2+4 \}$$

$$I = \int_{-1}^{4} \left(\int_{-x^2-1}^{x^2+4} (x^2 - y)\, dy \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{4} \left[x^2 y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=-x^2-1}^{y=x^2+4} dx = \int_{-1}^{4} +x^4 + x^2 + x^4 + 4x^2 + \frac{1}{2}(x^2+1)^2 - \frac{1}{2}(x^2+4)^2 dx$$

$$= \int_{-1}^{4} 2x^4 + 5x^2 + \frac{1}{2}(0x^4 - 6x^2 - 15) = \int_{-1}^{4} 2x^4 + 2x^2 - \frac{15}{2}\, dx =$$

$$= \left[2\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^3}{3} - \frac{15}{2} x \right]_{x=-1}^{x=4} = \frac{2}{5} \cdot 1025 + \frac{2}{3} 65 - \frac{15}{2} \cdot 5 \simeq 415,8333$$

26

C.2.

(26)

$$I=\iint_{\Omega} e^{\frac{4y+2x}{4y+3x}}\,dx\,dy$$

Ω limitado por los ejes de coordenadas

y $4y+3x=7$

$$\left.\begin{array}{l}4y+2x=u\\ 4y+3x=v\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Restando } 2^a - 1^a}$$

$$\boxed{x=v-u}$$

Introducimos el valor en 1^a ec.

$$4y+2v-2u=u \Rightarrow y=\frac{3u-2v}{4}$$

Vamos a usar

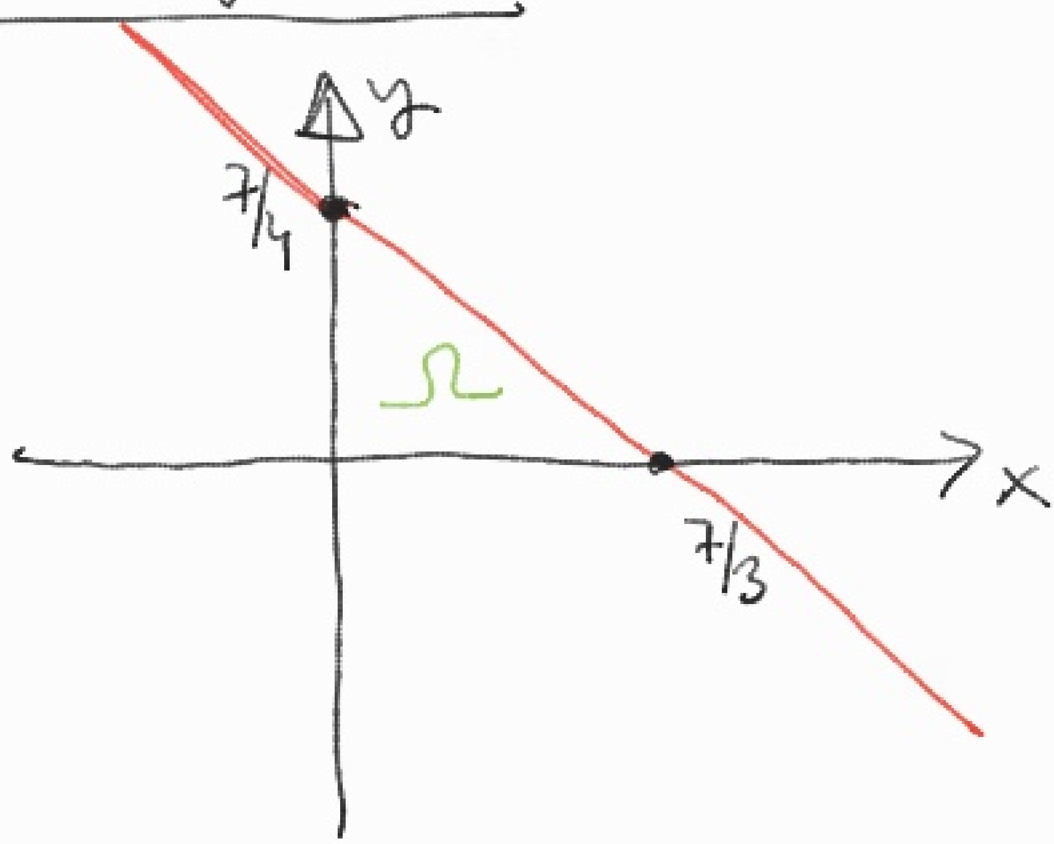
$$(x,y)=\phi(u,v)=\left(v-u,\ \frac{3u-2v}{4}\right)$$

$$J\phi(u,v) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3/4 & -2/4 \end{pmatrix}$$

$$\det J\phi(u,v) = \frac{2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{-1}{4}$$

$$|\det J\phi(u,v)| = \frac{1}{4}$$

<u>Recinto de integración</u>

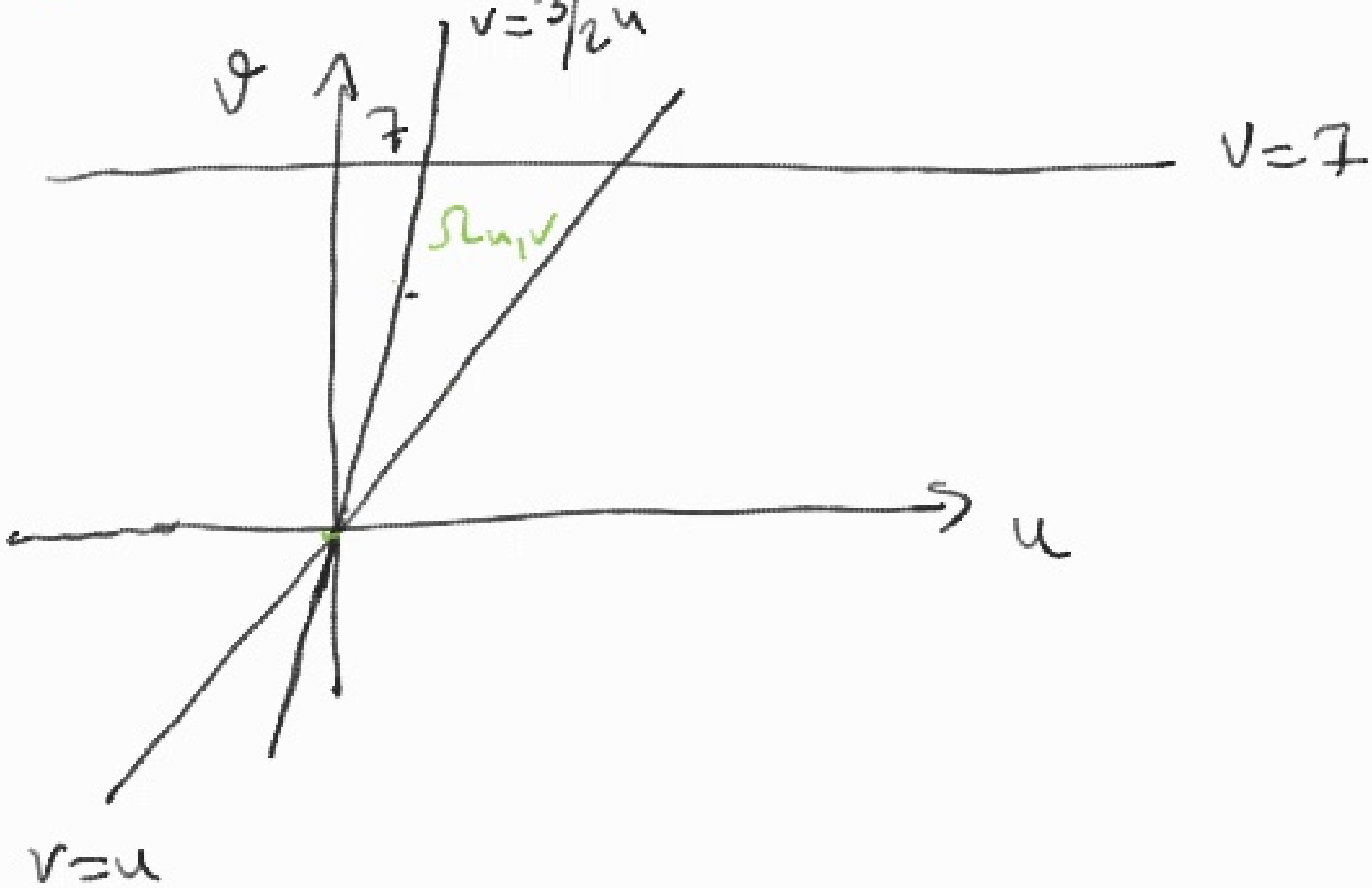


$x = 0 \longrightarrow v - u = 0 \Rightarrow v = u$

$y = 0 \longrightarrow 3u - 2v = 0 \Rightarrow 3u = 2v \Rightarrow$

$\Rightarrow v = \frac{3}{2} u$

$4y + 3x = 7 \longrightarrow v = 7$



$$\Omega_{u,v} = \left\{ (u,v) : 0 < v < 7, \quad \frac{2}{3} v < u < v \right\}$$

$$I = \iint_{\Omega_{u,v}} e^{\frac{u}{v}} \frac{1}{4} \, du\, dv =$$

$$\frac{1}{4} \int_0^7 \int_{2/3 v}^{v} e^{u/v} \, du \, dv =$$

$$\frac{1}{4} \int_0^7 \left[\frac{1}{1/v} e^{1/v \, u} \right]_{u=2/3 v}^{u=v} dv =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^7 \left(v e^{1} - v e^{2/3} \right) dv =$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx}$$

$$\frac{1}{4}\int_0^7 v\left(e-e^{2/3}\right)dv =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e-e^{2/3}\right)\int_0^7 v\,dv =$$

$$= \frac{1}{4}\left(e-e^{2/3}\right)\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v=0}^{v=7} =$$

$$= \frac{1}{8}\left(e-e^{2/3}\right)49 = \frac{49\left(e-e^{2/3}\right)}{8}$$

28

C.2.

$\boxed{\textbf{28}}$. Describe el conjunto $\Omega = \{(x, y, z) : 9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100, x \le 0, y \le 0, z \le 0\}$ en coordenadas esféricas y haz un dibujo de él .

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\Omega_e = [3, 10] \times [\pi, 2\pi] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
2) $\Omega_e = [3, 10] \times \left[\frac{3\pi}{2}, \pi\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
3) $\Omega_e = [3, 10] \times \left[\frac{3\pi}{2}, \pi\right] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
4) $\Omega_e = [3, 10] \times [0, \pi] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
5) $\Omega_e = [3, 10] \times \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
6) $\Omega_e = [3, 10] \times \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$\boxed{\textbf{29}}$. Describe el conjunto $\Omega = \{(x, y, z) : 9 \le x^2 + y^2 \le 100, x \le 0, y \le 0, -3 \le z \le 0\}$ en coordenadas cilíndricas y haz un dibujo de él .

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\Omega_c = [3, 10] \times [0, 2\pi] \times [0, 3]$
2) $\Omega_c = [3, 10] \times \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \times [0, 3]$
3) $\Omega_c = [3, 10] \times [\pi, 2\pi] \times [-3, 0]$
4) $\Omega_c = [3, 10] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [-3, 0]$
5) $\Omega_c = [3, 10] \times [0, \pi] \times [-3, 0]$
6) $\Omega_c = [3, 10] \times \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \times [-3, 0]$

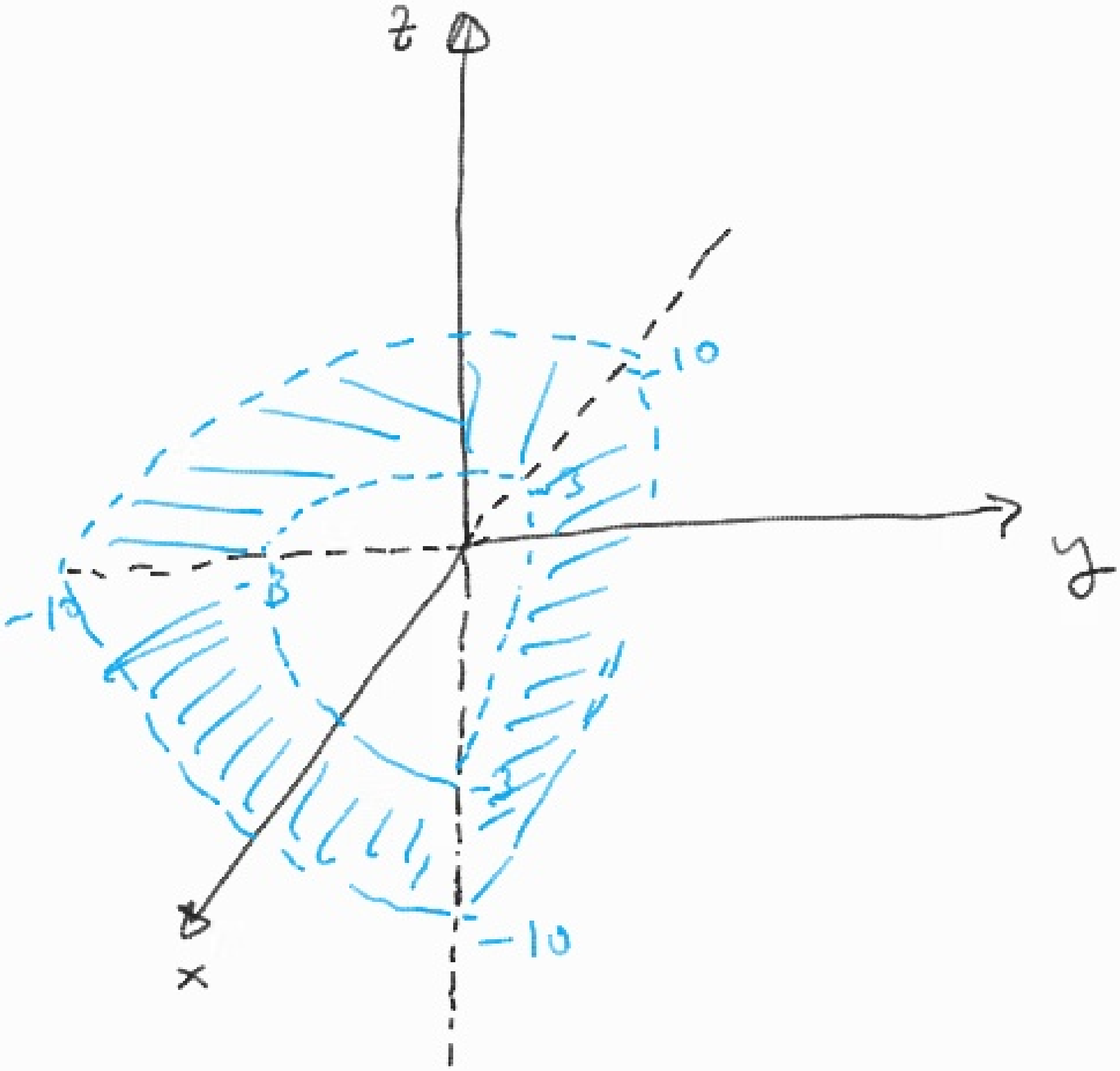
$\boxed{\textbf{30}}$. Describe el conjunto $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 100, y \ge 5\}$ en coordenadas polares y haz un dibujo de él .

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\Omega_p = \left\{(r, \theta) : \frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{5\pi}{3}, \frac{5}{\operatorname{sen}\vartheta} \le r \le 10\right\}$
2) $\Omega_p = \left\{(r, \theta) : \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{5\pi}{4}, \frac{5}{\operatorname{sen}\vartheta} \le r \le 10\right\}$
3) $\Omega_p = \left\{(r, \theta) : \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}, \frac{10}{3\operatorname{sen}\vartheta} \le r \le 10\right\}$
4) $\Omega_p = \left\{(r, \theta) : \frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{5\pi}{3}, \frac{5}{2\operatorname{sen}\vartheta} \le r \le 10\right\}$
5) $\Omega_p = \left\{(r, \theta) : \frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}, \frac{5}{3\operatorname{sen}\vartheta} \le r \le 10\right\}$
6) $\Omega_p = \left\{(r, \theta) : \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}, \frac{5}{\operatorname{sen}\vartheta} \le r \le 10\right\}$

(28)

$$\Omega = \{(x,y,z) : 9 \le x^2+y^2+z^2 \le 100, \ x \le 0, y \le 0, \ z \le 0\}$$



$$\Omega_e = \{(r,\theta,\varphi) : 3 < r < 10, \ \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi\} = [3,10] \times \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

29

C.2.

$\boxed{\mathbf{28}}$. Describe el conjunto $\Omega = \{(x,y,z) : 9 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 100, x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0\}$ en coordenadas esféricas y haz un dibujo de él .

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\Omega_e = [3,10] \times [\pi, 2\pi] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
2) $\Omega_e = [3,10] \times \left[\frac{3\pi}{2}, \pi\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
3) $\Omega_e = [3,10] \times \left[\frac{3\pi}{2}, \pi\right] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
4) $\Omega_e = [3,10] \times [0, \pi] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
5) $\Omega_e = [3,10] \times \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
6) $\Omega_e = [3,10] \times \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$\boxed{\mathbf{29}}$. Describe el conjunto $\Omega = \{(x,y,z) : 9 \leq x^2+y^2 \leq 100, x \leq 0, y \leq 0, -3 \leq z \leq 0\}$ en coordenadas cilíndricas y haz un dibujo de él .

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\Omega_c = [3,10] \times [0, 2\pi] \times [0,3]$
2) $\Omega_c = [3,10] \times \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \times [0,3]$
3) $\Omega_c = [3,10] \times [\pi, 2\pi] \times [-3,0]$
4) $\Omega_c = [3,10] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [-3,0]$
5) $\Omega_c = [3,10] \times [0, \pi] \times [-3,0]$
6) $\Omega_c = [3,10] \times \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \times [-3,0]$

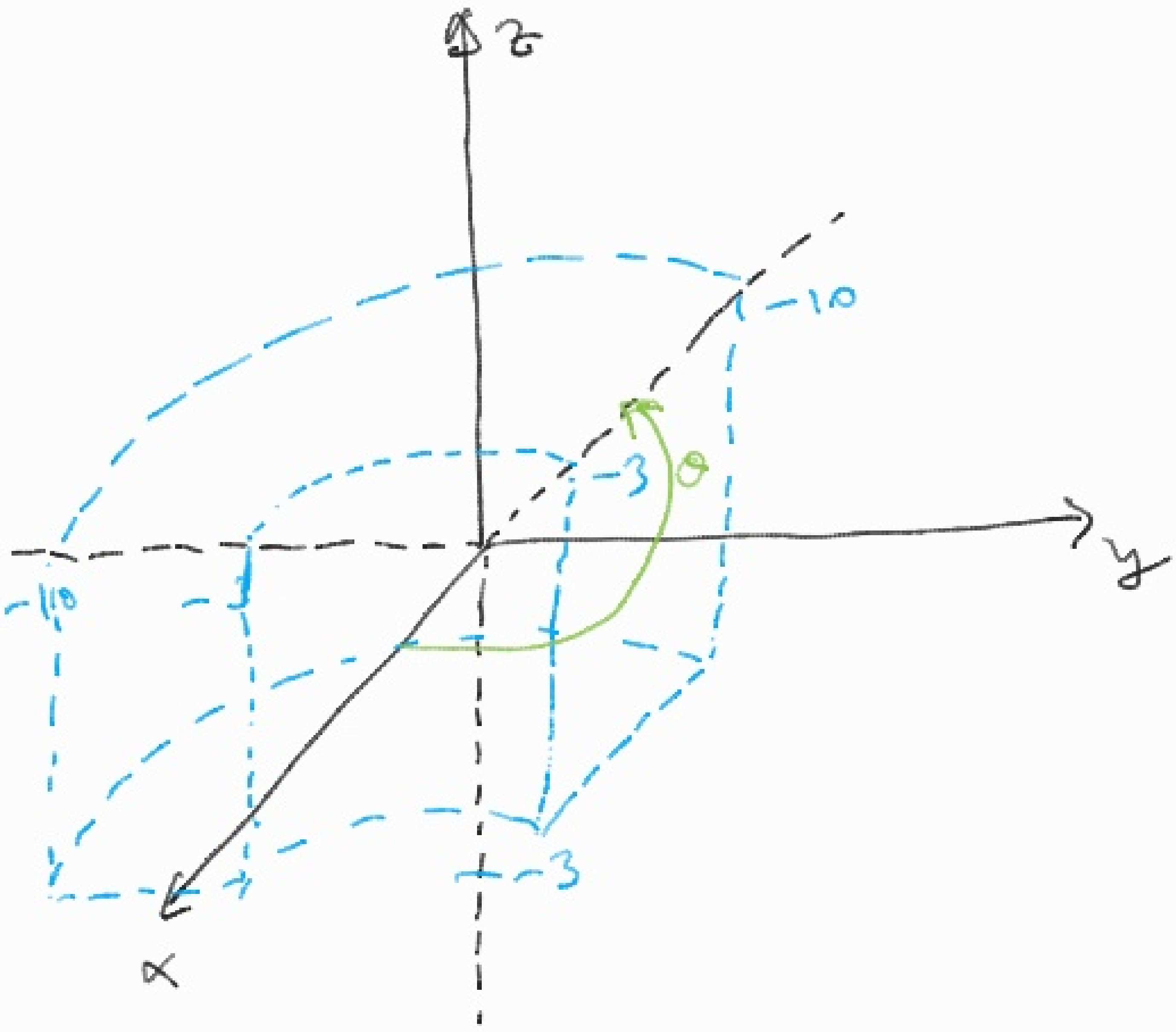
$\boxed{\mathbf{30}}$. Describe el conjunto $\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 100, y \geq 5\}$ en coordenadas polares y haz un dibujo de él .

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\Omega_p = \left\{(r,\theta) : \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3}, \frac{5}{\operatorname{sen}\vartheta} \leq r \leq 10\right\}$
2) $\Omega_p = \left\{(r,\theta) : \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}, \frac{5}{\operatorname{sen}\vartheta} \leq r \leq 10\right\}$
3) $\Omega_p = \left\{(r,\theta) : \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}, \frac{10}{3\operatorname{sen}\vartheta} \leq r \leq 10\right\}$
4) $\Omega_p = \left\{(r,\theta) : \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3}, \frac{5}{2\operatorname{sen}\vartheta} \leq r \leq 10\right\}$
5) $\Omega_p = \left\{(r,\theta) : \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}, \frac{5}{3\operatorname{sen}\vartheta} \leq r \leq 10\right\}$
6) $\Omega_p = \left\{(r,\theta) : \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}, \frac{5}{\operatorname{sen}\vartheta} \leq r \leq 10\right\}$

(29)

$$\Omega = \{(x,y,z) : 9 \le x^2+y^2 \le 100,\ x \le 0,\ y \le 0,\ -3 \le z \le 0\}$$



$$\Omega_c = \{(r,\theta,z) : 3 \le r \le 10,\ \pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2},\ -3 \le z \le 0\}$$

$$= [3,10] \times [\pi, \tfrac{3\pi}{2}] \times [-3,0]$$

30

C.2.

$\boxed{\textbf{28}}$. Describe el conjunto $\Omega = \{(x, y, z) : 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 100, x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0\}$ en coordenadas esféricas y haz un dibujo de él .

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\Omega_e = [3, 10] \times [\pi, 2\pi] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
2) $\Omega_e = [3, 10] \times \left[\frac{3\pi}{2}, \pi\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
3) $\Omega_e = [3, 10] \times \left[\frac{3\pi}{2}, \pi\right] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
4) $\Omega_e = [3, 10] \times [0, \pi] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
5) $\Omega_e = [3, 10] \times \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
6) $\Omega_e = [3, 10] \times \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$\boxed{\textbf{29}}$. Describe el conjunto $\Omega = \{(x, y, z) : 9 \leq x^2 + y^2 \leq 100, x \leq 0, y \leq 0, -3 \leq z \leq 0\}$ en coordenadas cilíndricas y haz un dibujo de él .

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

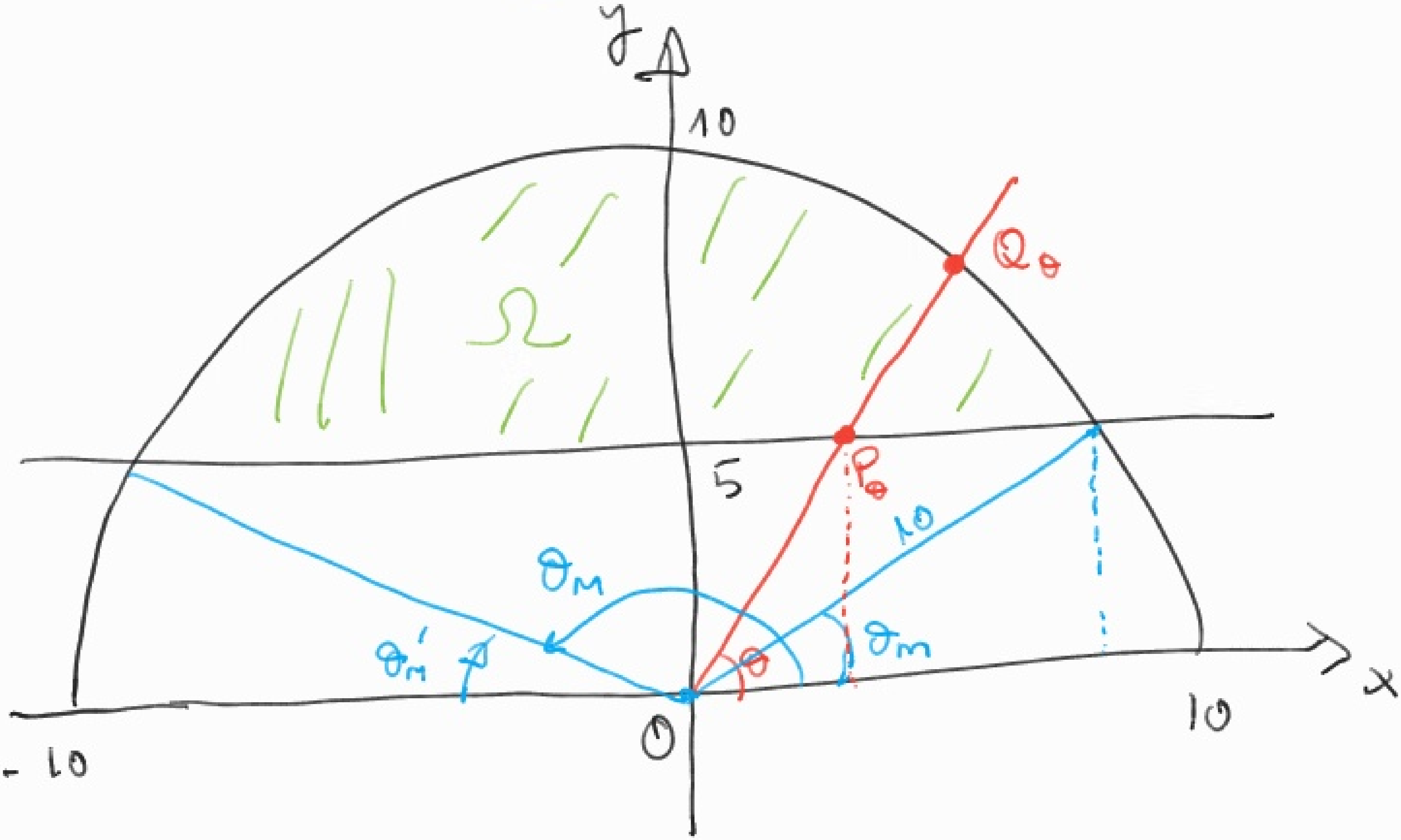
1) $\Omega_c = [3, 10] \times [0, 2\pi] \times [0, 3]$
2) $\Omega_c = [3, 10] \times \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \times [0, 3]$
3) $\Omega_c = [3, 10] \times [\pi, 2\pi] \times [-3, 0]$
4) $\Omega_c = [3, 10] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [-3, 0]$
5) $\Omega_c = [3, 10] \times [0, \pi] \times [-3, 0]$
6) $\Omega_c = [3, 10] \times \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \times [-3, 0]$

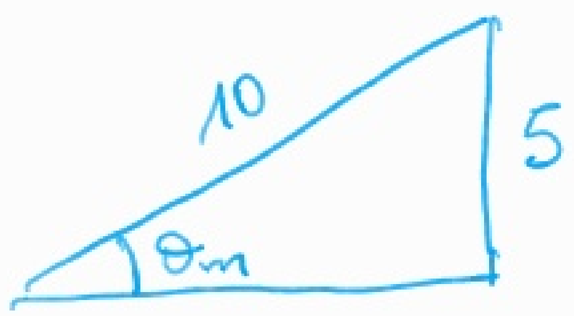
$\boxed{\textbf{30}}$. Describe el conjunto $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 100, y \geq 5\}$ en coordenadas polares y haz un dibujo de él .

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\Omega_p = \{(r, \theta) : \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3}, \frac{5}{\operatorname{sen}\vartheta} \leq r \leq 10\}$
2) $\Omega_p = \{(r, \theta) : \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}, \frac{5}{\operatorname{sen}\vartheta} \leq r \leq 10\}$
3) $\Omega_p = \{(r, \theta) : \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}, \frac{10}{3\operatorname{sen}\vartheta} \leq r \leq 10\}$
4) $\Omega_p = \{(r, \theta) : \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3}, \frac{5}{2\operatorname{sen}\vartheta} \leq r \leq 10\}$
5) $\Omega_p = \{(r, \theta) : \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}, \frac{5}{3\operatorname{sen}\vartheta} \leq r \leq 10\}$
6) $\Omega_p = \{(r, \theta) : \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}, \frac{5}{\operatorname{sen}\vartheta} \leq r \leq 10\}$

(30) $\Omega = \{(x,y) \text{ t.q. } x^2+y^2 \leq 100,\ y \geq 5\}$





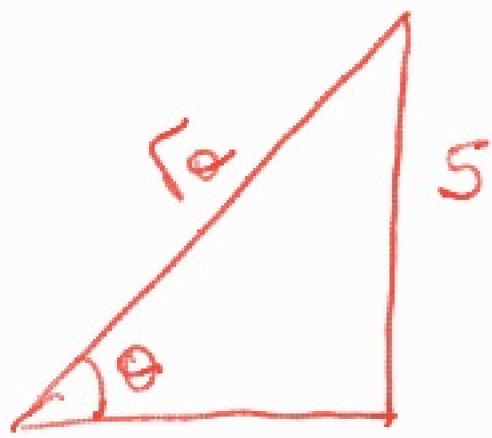
$$\operatorname{sen}\theta_m = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \qquad \theta_m = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\theta'_M = \theta_m \Rightarrow \theta_M = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Para un θ fijo hay que ver la variación de r, que será

$$d(P_\theta, 0) < r < d(Q_\theta, 0) = 10$$

?



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{r_\theta} \Rightarrow \boxed{r_\theta = \frac{5}{\operatorname{sen}\theta}}$$

$$\Omega_p = \left\{ (r,\theta) : \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6},\ \frac{5}{\operatorname{sen}\theta} < r < 10 \right\}$$

31

C.2.

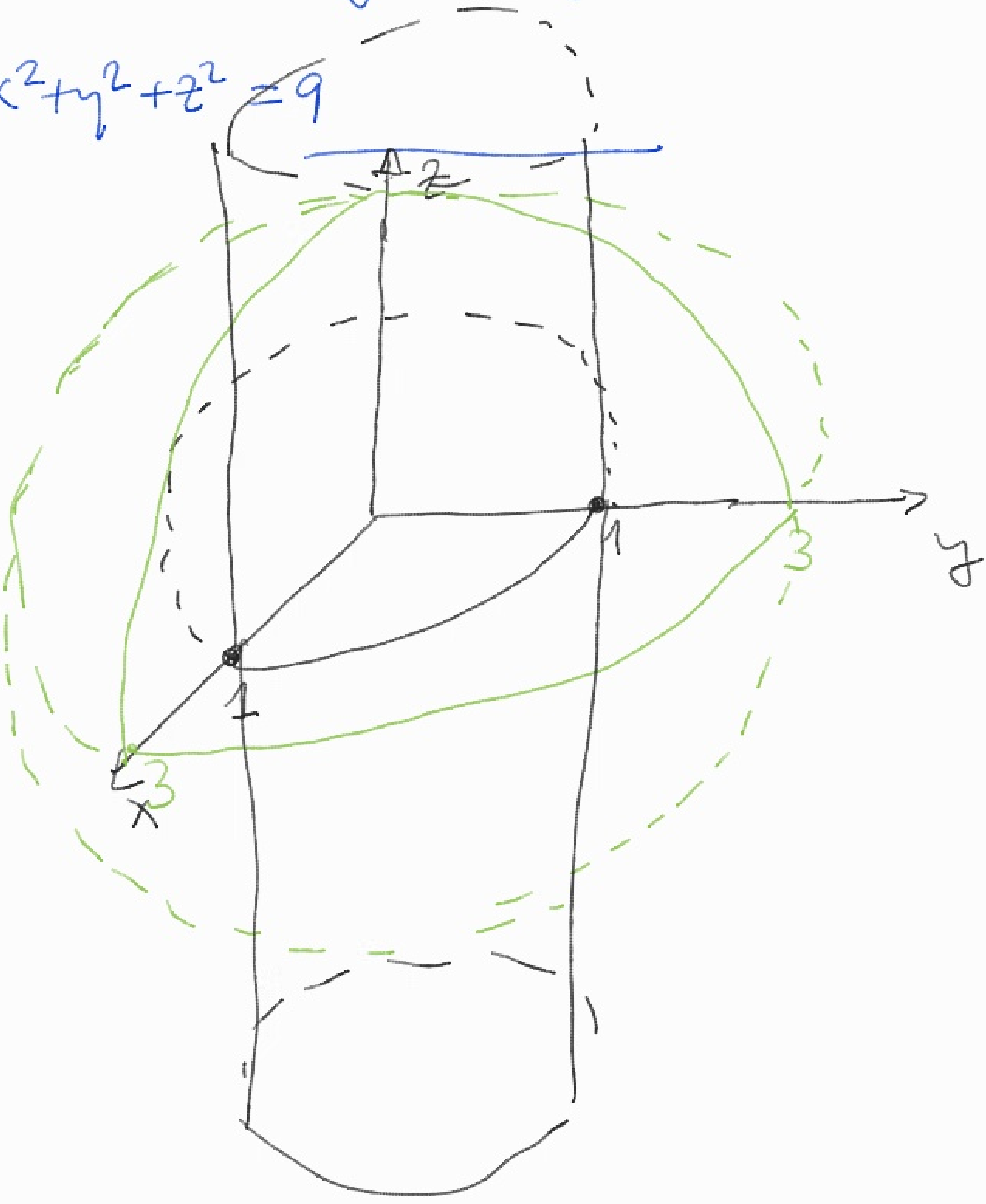
$\boxed{\mathbf{31}}$.

Calcula el volumen limitado en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y también de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) 18.3258	3) 18.3558	5) 18.2858
2) 18.3158	4) 18.2758	6) 18.3058

30 Volumen limitado en el interior del cilindro $x^2+y^2=1$ y de la esfera $x^2+y^2+z^2=9$



Como el volumen que queremos calcular está dentro del cilindro y viene limitado superior e inferiormente por la esfera integraremos sobre el plano xy, en el círculo Ω de radio 1 centrado en el origen (la sombra del recinto), la función

$$z_+ = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \quad \text{menos}$$

$$z_- = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

Hacemos un cambio a coordenadas polares: $\Omega_p = \{(r,\theta) \text{ tq } 0 < r < 1,\ 0 < \theta < 2\pi\}$

$$V = \iint_{\Omega} z_+ - z_- \quad dx\,dy =$$

$$= \iint_{\Omega_p} \sqrt{9-r^2} - \left(-\sqrt{9-r^2}\right) \, r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r \sqrt{9-r^2} \; dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 2r \sqrt{9-r^2} \, dr =$$

$$= -2\pi \left[\frac{(9-r^2)^{3/2}}{3/2} \right]_{r=0}^{r=1} =$$

$$= -2\pi \frac{2}{3} \; 8^{3/2} + 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot 27 =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \left(27 - 8^{3/2} \right) \simeq 18.3158$$

32

C.2.

32.

Calcula el volumen del tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $2x+7y+3z = 42$.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) 293.99
2) 294.02
3) 294.04
4) 293.96
5) 294.0
6) 293.98

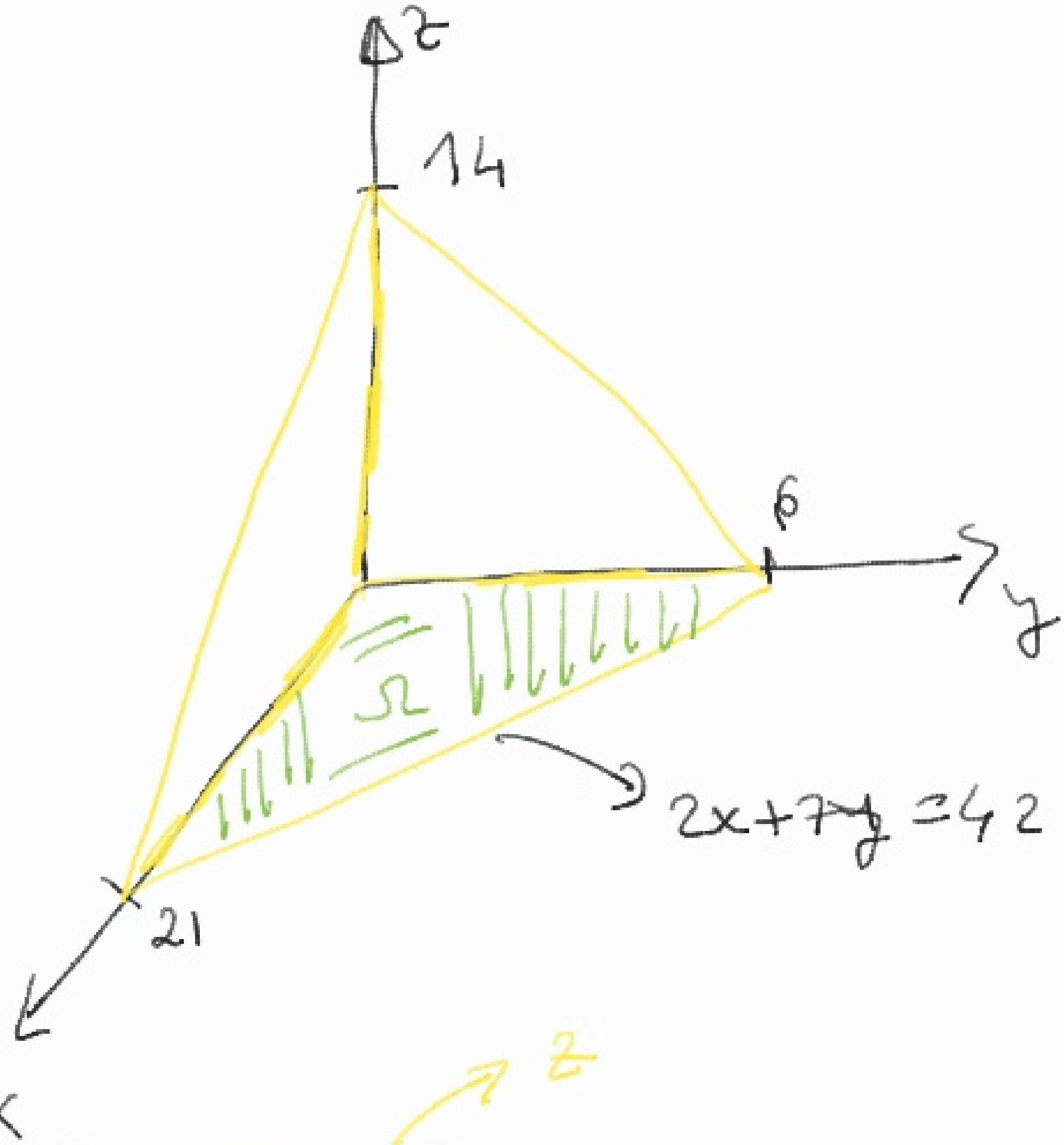
33.

Calcula la integral $\iiint_\Omega x dx dy dz$ donde Ω es el tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $2x + 7y + 3z = 42$.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) 1543.51
2) 1543.52
3) 1543.5
4) 1543.45
5) 1543.46
6) 1543.47

32) Volumen limitado por los planos coordenados y por $2x+7y+3z=42$



$$V=\iint_{\Omega} \overbrace{\frac{1}{3}(42-7y-2x)}^{z}\, dx\, dy$$

$$\Omega=\left\{(x,y): 0\leq x\leq 21,\ 0\leq y\leq \frac{42-2x}{7}\right\}$$

$$V = \int_0^{21} \int_0^{\frac{42-2x}{7}} \frac{1}{3}(42-7y-2x)\, dy\, dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{21} \left[42y - 7\frac{y^2}{2} - 2xy \right]_{y=0}^{y=\frac{42-2x}{7}} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{21} (42-2x)\left(\frac{42-2x}{7}\right) - \frac{7}{2}\left(\frac{42-2x}{7}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{21} (42-2x)^2 \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{2 \cdot 7}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{7} \frac{1}{2} \int_0^{21} (42-2x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{42} \left[\frac{(42-2x)^3}{(-2) \cdot 3} \right]_{x=0}^{x=21} = \frac{1}{42} \cdot \frac{-1}{6}\left(0 - 42^3\right)$$

$$= \frac{42^2}{6} = 7 \cdot 42 = 294$$

33

C.2.

32.

Calcula el volumen del tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $2x+7y+3z=42$.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) 293.99	3) 294.04	5) 294.0
2) 294.02	4) 293.96	6) 293.98

33.

Calcula la integral $\iiint_\Omega x dx dy dz$ donde Ω es el tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano $2x+7y+3z=42$.

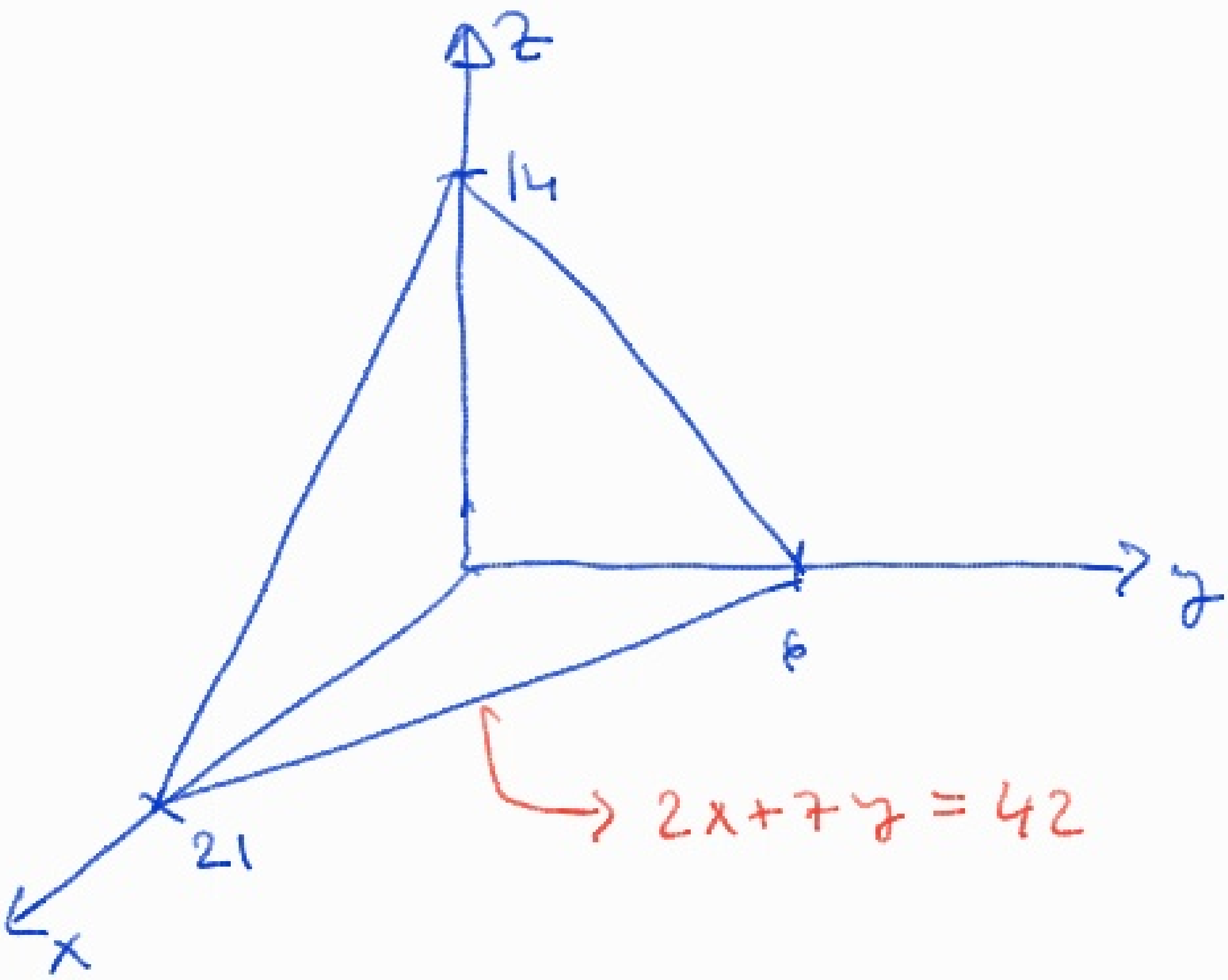
Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) 1543.51	3) 1543.5	5) 1543.46
2) 1543.52	4) 1543.45	6) 1543.47

(33) $\iiint_{\Omega} x \, dx \, dy \, dz = I$

Ω limitado por los planos coordenados y por $2x+7y+3z=42$

Describimos Ω de forma básica



$$\Omega = \left\{ (x,y,z) : 0 < y < 6, \quad 0 < x < \frac{42-7y}{2}, \quad 0 < z < \frac{42-2x-7y}{3} \right\}$$

$$I = \iiint_{\Omega} x \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \int_0^6 \int_0^{\frac{42-7y}{2}} \int_0^{\frac{42-2x-7y}{3}} x \, dz \, dx \, dy =$$

$$= \int_0^6 \int_0^{\frac{42-7y}{2}} x \, \frac{42-2x-7y}{3} \, dx \, dy =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^6 \left[42\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3} - 7y\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=\frac{42-7y}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^6 \left(21 - \frac{7}{2}y\right)\left(\frac{42-7y}{2}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{42-7y}{2}\right)^3 dy$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^6 \frac{1}{3} \left(21 - \frac{7}{2}y\right)^3 dy = \frac{1}{9}\,\frac{1}{4}\,\frac{-2}{7} \left[\left(21 - \frac{7}{2}y\right)^4 \right]_{y=0}^{y=6}$$

$$= \frac{-1}{2 \cdot 7 \cdot 9} \left(0 - 21^4\right) = \frac{3^4 \cdot 7^4}{2 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{9 \cdot 7^3}{2}$$

$$= 1543.5$$

34

C.2.

$\boxed{\mathbf{34}}$.

Calcula el volumen limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, el plano $z = 0$ y por $z = 9 - x^2$.
Elige tu solución correcta entre las siguientes:

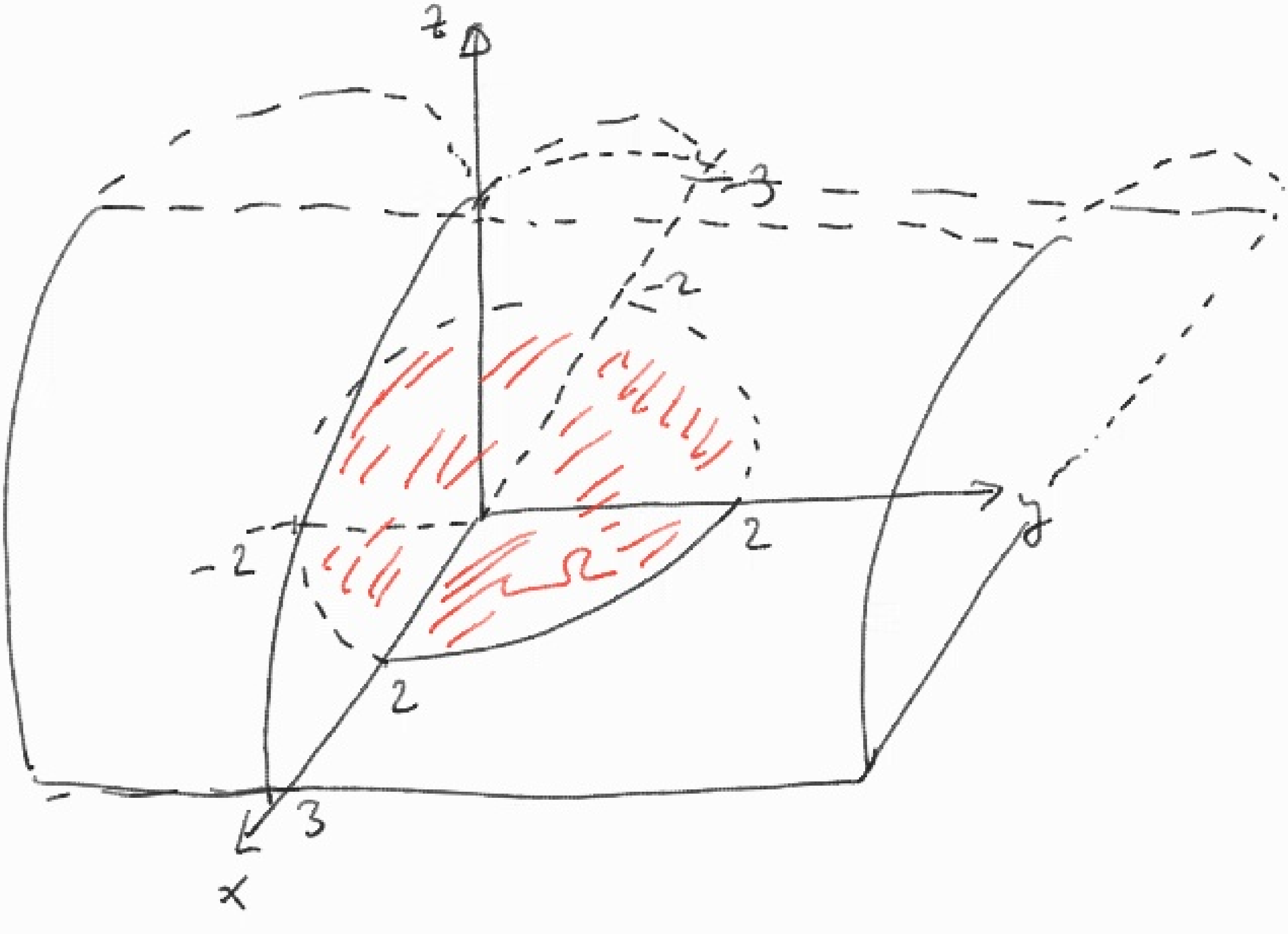
1) 100.541	3) 100.561	5) 100.531
2) 100.551	4) 100.481	6) 100.511

$\boxed{\mathbf{35}}$.

Calcula el volumen limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, el plano $z = 0$ y por $z = -y^2 - x^2 + 9$
.
Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) 87.9846	3) 88.0146	5) 87.9546
2) 87.9946	4) 87.9646	6) 87.9746

(34) Volumen limitado por $x^2+y^2=4$, $z=0$ y $z=9-x^2$



$$V=\iint_{\Omega} 9-x^2 \, dx\,dy$$

- Ω es el círculo de radio 2 centrado en el origen
- $\Omega_p = \{(r,\theta),\ 0\le r\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$

$$V = \iint_{\Omega_p} (9 - r^2 \cos^2\theta)\, r\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (9 - r^2 \cos^2\theta)\, r\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[9\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \cos^2\theta \right]_{r=0}^{r=2} d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{9}{2} 4 - \frac{16}{4} \cos^2\theta \; d\theta =$$

$$= 18 \cdot 2\pi - \frac{16}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta =$$

$$= 36\pi - 4 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\, d\theta =$$

$$= 36\pi - 2 \left[\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 36\pi - 4\pi =$$

$$= 32\pi \simeq 100{,}531$$

35

C.2.

$\boxed{\mathbf{34}}$.

Calcula el volumen limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, el plano $z = 0$ y por $z = 9 - x^2$.
Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) 100.541
2) 100.551
3) 100.561
4) 100.481
5) 100.531
6) 100.511

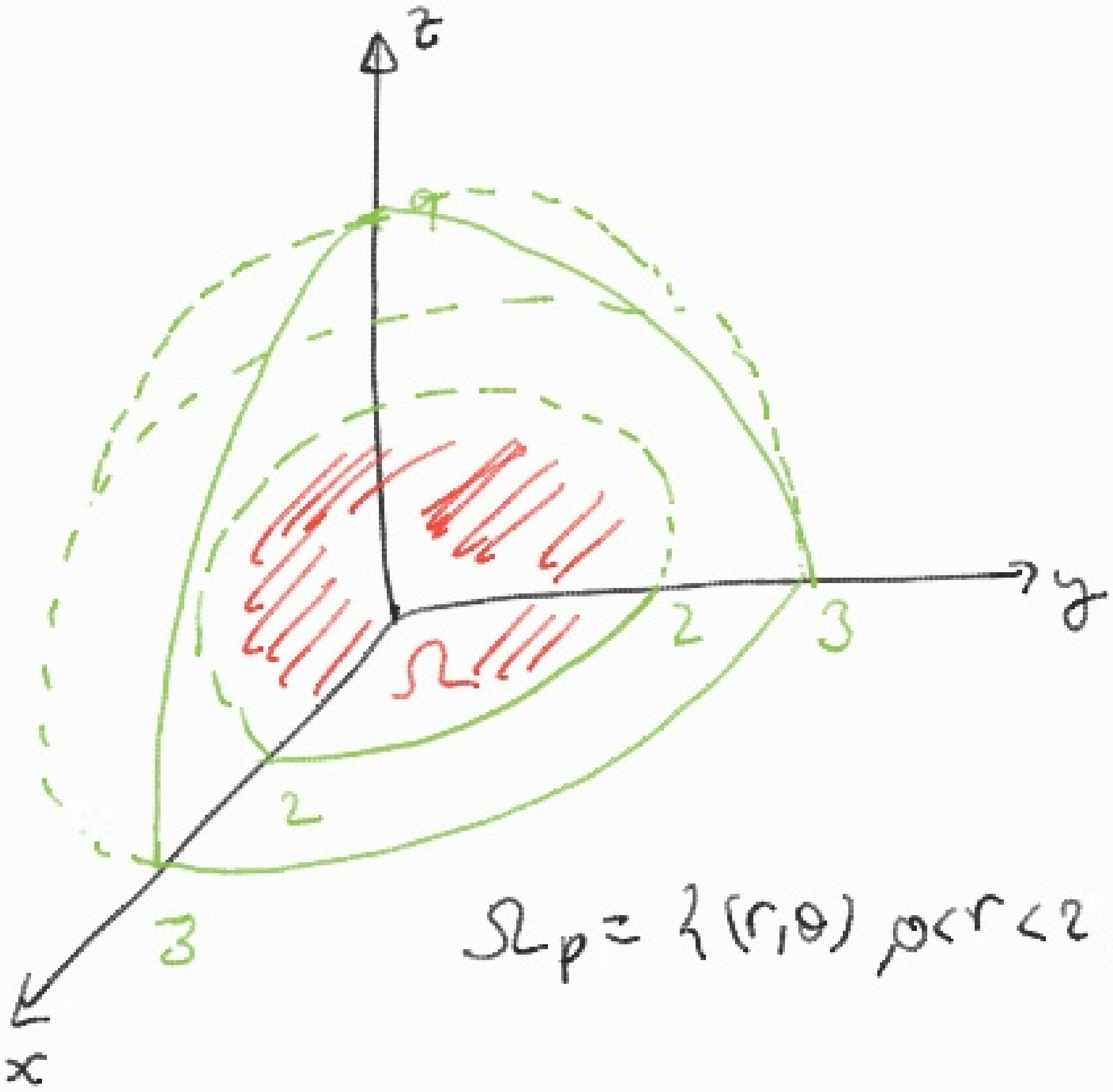
$\boxed{\mathbf{35}}$.

Calcula el volumen limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, el plano $z = 0$ y por $z = -y^2 - x^2 + 9$
.
Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) 87.9846
2) 87.9946
3) 88.0146
4) 87.9646
5) 87.9546
6) 87.9746

(35) Volumen limitado por el cilindro $x^2+y^2=4$

$z=0$ y $z=9-x^2-y^2$



$\Omega_p=\{(r,\theta),0<r<2,0<\theta<2\pi\}$

$$V=\iint_{\Omega}9-x^2-y^2\,dx\,dy=\iint_{\Omega_p}(9-r^2)r\,dr\,d\theta=$$

$$=\int_0^2\int_0^{2\pi}(9-r^2)r\,d\theta\,dr=2\pi\int_0^2 9r-r^3\,dr$$

$$=2\pi\left[9\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=2}=2\pi\,(18-4)=28\pi\simeq$$

$87,9646$

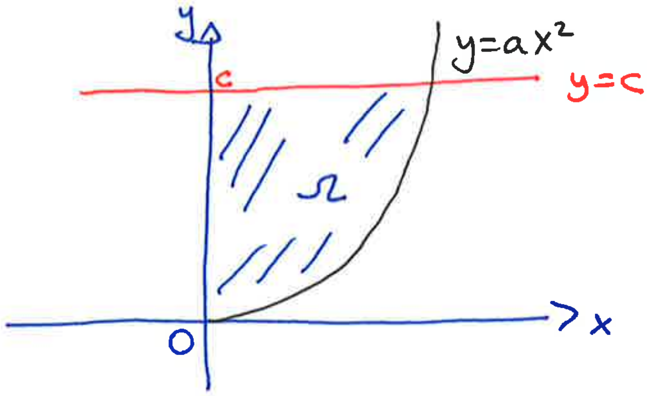
Pupurrí

C.2.

Ejercicio   Calcula $I=\iint_\Omega bxy\,dx\,dy$ donde Ω es el recinto limitado por $y=ax^2$, $y=c$ y por $x=0$.

Solución

Dibujamos el recinto para describirlo de forma básica:



$$\Omega = \left\{ (x,y) : \quad 0<y<c, \quad 0<x<\sqrt{\frac{y}{a}} \right\}$$

Así que:

$$I = \int_0^c \left(\int_0^{\sqrt{y/a}} bxy\,dx \right) dy = b\int_0^c y \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{y/a}} dy$$

$$= \frac{b}{a}\frac{1}{2}\int_0^c y^2\,dy = \frac{b}{a}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,c^3 = \frac{bc^3}{6a}$$

(1)

Ejercicio Estudia los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2+y^2$ condicionados por $x^{2k}+y^{2k}=1$ (C) $k\geq 2$, $k\in\mathbb{N}$.

Solución

Los extremos absolutos están garantizados puesto que la condición genera un conjunto de puntos que es compacta

$$L(x,y) = x^2+y^2+\lambda(x^{2k}+y^{2k}-1)$$

+(C)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x + 2k\lambda x^{2k-1} = 2x(1+k\lambda x^{2k-2}) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y + 2k\lambda y^{2k-1} = 2y(1+k\lambda x^{2k-2}) = 0 \end{aligned}\right.$$

(*) $x=0$, $y=0$ (esta solución no vale porque no satisface (C)

(*) $\left.\begin{aligned} & x=0,\ 1+k\lambda y^{2k-2}=0 \\ & x^{2k}+y^{2k}=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} & x=0,\ y=\pm 1 \\ & \lambda = \frac{-1}{k} \end{aligned}$

$P_1 = (0,1)$

$P_2 = (0,-1)$

(*) $\left.\begin{aligned} & y=0,\ 1+k\lambda x^{2k-2}=0 \\ & x^{2k}+y^{2k}=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} & y=0,\ x=\pm 1 \\ & \lambda = \frac{-1}{k} \end{aligned}$

$P_3 = (1,0)$, $P_4 = (-1,0)$

(*)

$$\left.\begin{array}{r} 1+k\lambda x^{2k-2}=0 \\ 1+k\lambda y^{2k-2}=0 \\ x^{2k}+y^{2k}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow k\lambda x^{2k-2}=k\lambda y^{2k-2}$$

$$\Rightarrow x^{2k-2}=y^{2k-2}$$

$$\Rightarrow x=\pm y$$

$$\Rightarrow 2x^{2k}=1$$

$$\Rightarrow x=\pm\sqrt[2k]{1/2}$$

$$\lambda=\frac{-1}{k\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2k-2}{2k}}}$$

$$P_5=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2k},\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2k}\right)$$

$$P_6=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2k},-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2k}\right)$$

$$P_7=\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2k},-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2k}\right)$$

$$P_8=\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2k},\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2k}\right)$$

Evaluando finalmente f en P_i obtenemos como mínimos absolutos a P_i, $i\in\{1,2,3,4\}$, y como máximos absolutos a P_j, $5\leq j\leq 8$.

Ejercicio: Estudiar los extremos relativos condicionados de la función $f(x,y)=x^2+y^2$ con la condición $x^3+y^3=1$ (c)

$L(x,y) = x^2+y^2+\lambda(x^3+y^3-1)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x+3\lambda x^2 = x(2+3\lambda x)=0 < \begin{matrix} x=0 \\ ó \\ 2+3\lambda x=0 \end{matrix}$

$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y+3\lambda y^2 = y(2+3\lambda y)=0 < \begin{matrix} y=0 \\ ó \\ 2+3\lambda y=0 \end{matrix}$

Soluciones

* $x=0,\ y=0$ (no satisface la condición)

* $\left.\begin{matrix} x=0,\ 2+3\lambda y=0 \\ x^3+y^3=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y^3=1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow \lambda=\frac{-2}{3}$

$P_1=(0,1) \quad \lambda_1=\frac{-2}{3}$

* $y=0,\ 2+3\lambda x=0 \Rightarrow \underset{\text{(como antes)}}{\ldots\ldots} \Rightarrow P_2=(1,0) \quad \lambda_2=\frac{-2}{3}$

* $\left.\begin{matrix} (1)\ 2+3\lambda y=0 \\ (2)\ 2+3\lambda x=0 \\ (3)\ x^3+y^3=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3\lambda x=3\lambda y \Rightarrow \lambda x=\lambda y$

$\lambda\neq 0$ porque se tienen que cumplir (1) y (2), luego $x=y$ (dividiendo por λ)

y $2x^3=1 \Rightarrow x^3=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=y$

$$P_3 = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \qquad \lambda_3 = \frac{-2}{3y} = \frac{-2\sqrt[3]{2}}{3}$$

* Así que tenemos ~~que~~ tres candidatos a extremos relativos condicionados. Vamos a estudiarlos con ayuda de la matriz hessiana.

$$HL(x,y) = \begin{pmatrix} 2+6\lambda x & 0 \\ 0 & 2+6\lambda y \end{pmatrix}$$

La cantidad Q que hay que determinar en cada punto si es positiva o negativa es:

$$Q(x,y) = (2+6\lambda x)\, h_1^2 + (2+6\lambda y)\, h_2^2 \qquad (E1)$$

para los vectores $(h_1, h_2) \neq (0,0)$ que verifiquen

$$\nabla g(x,y) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{siendo } g(x,y) = x^3+y^3-1.$$

Luego

$$\begin{pmatrix} 3x^2 & 3y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 3x^2 h_1 + 3y^2 h_2 = 0 \qquad (E2)$$

(*) Estudiamos el punto $P_1 = (0,1)$

Aquí $Q(0,1) = 2h_1^2 \bullet h_2^2$

y $(h_1,h_2) \neq (0,0)$ verifica (E2), es decir:

$$3h_2 = 0 \Rightarrow h_2 = 0 \Rightarrow h_1 \neq 0$$

Así que $Q(0,1) = 2h_1^2 > 0 \Rightarrow$ $\boxed{P_1 \text{ es un mínimo relativo condicionado}}$

(*) Estudiamos el punto $P_2 = (1,0)$

$Q(1,0) = -h_1^2 + 2h_2^2$

y $(h_1,h_2) \neq (0,0)$ verifica (E2): $3h_1 = 0 \Rightarrow h_1 = 0 \Rightarrow h_2 \neq 0$

Finalmente: $Q(1,0) = 2h_2^2 > 0 \Rightarrow$ $\boxed{P_2 \text{ es un mínimo relativo condicionado}}$

(*) Estudiamos por último $P_3 = \left(\sqrt[3]{1/2}, \sqrt[3]{1/2}\right)$

$$Q(P_3) \overset{x=y}{=} \underbrace{(2+6\lambda x)}_{\substack{\| \\ 2-4\sqrt[3]{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ \| \\ -2<0}} \underbrace{(h_1^2+h_2^2)}_{>0} < 0 \Rightarrow \boxed{P_3 \text{ es un máximo relativo condicionado}}$$

Ejercicio

Encuentra los puntos más cercanos y más lejanos de la curva compacta $\underset{(C)}{x^4+y^4=1}$ al origen de coordenadas.

$$L(x,y,z) = x^2+y^2 + \lambda(x^4+y^4-1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 4\lambda x^3 = 2x(1+2\lambda x^2) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ \text{ó} \\ 1+2\lambda x^2=0 \end{array}\right.$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 4\lambda y^3 = 2y(1+2\lambda y^2) = 0 \left\langle \begin{array}{l} y=0 \\ \\ 1+2\lambda y^2=0 \end{array}\right.$$

Posibilidades

* $x=0$, $y=0$ (no verifica la condición (C))

* $x=0$, $1+2\lambda y^2=0$

  Imponemos (C) $\Rightarrow$ $y^4=1$ $\Rightarrow$ $y=\pm 1$

  Tenemos dos soluciones:

$$P_1=(0,1) \qquad \lambda_1 = \frac{-1}{2}$$

$$P_2=(0,-1) \qquad \lambda_2 = \frac{-1}{2}$$

* $y=0$, $1+2\lambda x^2=0$ $\Rightarrow$ (razonando como en el caso anterior)

$$P_3=(1,0) \qquad \lambda_3 = -1/2$$

$$P_4=(-1,0) \qquad \lambda_4 = -1/2$$

$$* \quad \left.\begin{array}{l} 1+2\lambda x^2=0 \\ 1+2\lambda y^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\lambda x^2 = 2\lambda y^2$$

Distinguimos dos subcasos:

$(**)$ $\lambda \neq 0 \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y$

Imponiendo (C) tenemos

$$2x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{1/2}$$

y obtenemos:

$$P_5 = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) \qquad \lambda_5 = \frac{-1}{2x^2} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

$$P_6 = \left(\frac{-1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{-1}{\sqrt[4]{2}}\right) \qquad \lambda_6 = \frac{-1}{2x^2} = \lambda_5$$

$$P_7 = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{-1}{\sqrt[4]{2}}\right) \qquad \lambda_7 = \lambda_6$$

$$P_8 = \left(\frac{-1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{+1}{\sqrt[4]{2}}\right) \qquad \lambda_8 = \lambda_6$$

$(**)$ $\lambda = 0$ no da ninguna solución puesto que

$1+2\lambda x^2 \neq 0$, y $1+2\lambda y^2 \neq 0$.

Finalmente observamos que por ser la condición compacta tenemos que existen extremos absolutos por el teorema de Wierstrass. Es fácil ver que:

$$a = d(P_1, 0) = d(P_2, 0) = d(P_3, 0) = d(P_4, 0) = 1$$

y

$$b = d(P_j, 0) = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}}} \simeq 1.189.$$

Luego:

P_i es un mínimo absoluto $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

P_j es un máximo absoluto $j \in \{5, 6, 7, 8\}$.

Ejercicio: Estudia los extremos relativos condicionados de la función $f(x,y)=x^2+y^2$ con la condición $x^{2k+1}+y^{2k+1}=c$, $k\in\mathbb{N}$.

Solución

$$L(x,y)=x^2+y^2+\lambda(x^{2k+1}+y^{2k+1}-c)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2x+(2k+1)\lambda x^{2k} = x\left[2+(2k+1)\lambda x^{2k-1}\right]=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ \text{ó} \\ (2k+1)\lambda x^{2k-1}=-2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=2y+(2k+1)\lambda y^{2k} = y\left[2+(2k+1)\lambda y^{2k-1}\right]=0 \quad \begin{cases} y=0 \\ \text{ó} \\ (2k+1)\lambda y^{2k-1}=-2 \end{cases}$$

Posibles soluciones del sistema añadiendo la condición

(*) $x=0$ $\quad y=(c)^{1/(2k+1)}$ $\quad P_1=\left(0,\ c^{\frac{1}{2k+1}}\right)$

$\lambda=\dfrac{-2}{(2k+1)\,y^{2k-1}}$

(*) $y=0$ $\quad x=(c)^{1/(2k+1)}$ $\quad P_2=\left(c^{\frac{1}{2k+1}},\ 0\right)$

$\lambda=\dfrac{-2}{(2k+1)\,x^{2k-1}}$

(*) $\cancel{(2k+1)}\cancel{\lambda}\, x^{2k-1}=\cancel{(2k+1)}\cancel{\lambda}\, y^{2k-1} \Rightarrow x^{2k+1}=y^{2k+1}\Rightarrow x=y.$

$$2x^{2k+1}=c \Rightarrow x=\left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{1}{2k+1}}$$

$$P_3=\left(\left(\frac{c}{2}\right)^{1/2k+1},\ \left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{1}{2k+1}}\right)$$

• Ahora estudiamos los tres puntos con el criterio de la matriz Hessiana

$$HL(x,y) = \begin{pmatrix} 2+(2k+1)\lambda 2k x^{2k-1} & 0 \\ 0 & 2+(2k+1)\lambda 2k y^{2k-1} \end{pmatrix}$$

Hay que determinar el signo de

$$Q(x,y) = (h_1, h_2)\, HL(x,y) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left[2+(2k+1)\lambda 2k x^{2k-1}\right] h_1^2 + \left[2+(2k+1)\lambda 2k y^{2k-1}\right] h_2^2$$

para los vectores $(h_1, h_2) \neq (0,0)$ satisfaciendo:

$$0 = \nabla g(x,y) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \qquad \text{con } g(x,y) = x^{2k+1} + y^{2k+1} - C$$

Es decir:

$$0 = \left((2k+1)x^{2k},\ (2k+1)y^{2k}\right) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (2k+1)x^{2k} h_1 + (2k+1) y^{2k} h_2$$

Estudiamos punto por punto:

$P_1 = \left(0, C^{\frac{1}{2K+1}}\right)$

$$Q(P_1) = 2h_1^2 + \left[2+(2K+1)\lambda 2K C^{\frac{2K-1}{2K+1}}\right] h_2^2 =$$

$$= 2h_1^2 + \left[2+\cancel{(2K+1)}\frac{-2 \cdot 2K \cdot}{\cancel{(2K+1)}\, C^{\frac{1}{2K+1}}} C^{\frac{2K-1}{2K+1}}\right] h_2^2$$

$$= 2h_1^2 + 2\left(1 - 1\, 2K C^{\frac{2K-2}{2K+1}}\right) h_2^2$$

$(h_1, h_2) \neq (0,0)$ verifica $(2K+1)\, y^{2K} h_2 = 0 \Rightarrow h_2 = 0$ y $h_1 \neq 0$.

Luego $Q(P_1) = 2h_1^2 > 0$ y

P_1 es un mínimo relativo condicionado.

$P_2 = \left(C^{\frac{1}{2K+1}}, 0\right)$, razonando igual que antes se obtiene que P_2 es un mínimo relativo condicionado

$$P_3 = \left(\left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{1}{2k+1}}, \left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{1}{2k+1}} \right)$$

Aquí $x = y$

$$Q(P_3) = \left[2 + (2k+1)\lambda \left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{2k-1}{2k+1}} 2k \right] (h_1^2 + h_2^2)$$

Como $(h_1, h_2) \neq (0,0)$ el signo de $Q(P_3)$ coincide con el signo de

$$\underset{\vee\atop 0}{2} + \underbrace{(2k+1)}_{\vee\atop 0} \lambda \, 2k \left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{2k-1}{2k+1}} \overset{(*)}{=}$$

$$\lambda = \frac{-2}{(2k+1)\left(\frac{c}{2}\right)^{\frac{2k-1}{2k+1}}}$$

$$\overset{(*)}{=} 2 + (2k+1)\frac{-2}{2k+1} 2k = 2(1-2k) < 0$$

$\Rightarrow P_3$ es un máximo relativo condicionado.

$\boxed{\mathbf{1}}$. Describe el conjunto $\Omega = \{(x, y, z) : 9 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 64, x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0\}$ en coordenadas esféricas y haz un dibujo de él *(Puntuación:* 1*)*.

$\boxed{\mathbf{2}}$. Calcula el volumen, usando una integral doble, del tronco limitado superiormente por $z = 8\,y^2 + 3\,x$ e inferiormente por el triángulo limitado por los ejes de coordenadas y la recta $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$ *(Puntuación:* 2*)*.

$\boxed{\mathbf{3}}$.

Calcula los extremos de la función $f(x, y) = 6\,y^4 + 12\,y^2 + 3\,x^4 + 8\,x^2$ y determina sin son máximos o mínimos relativos *(Puntuación:* 2*)*.

$\boxed{\mathbf{4}}$.

En este ejercicio tienes que justificar cuáles son los puntos más cercanos y más lejanos al origen de la intersección (compacta) del elipsoide $\frac{z^2}{81} + \frac{y^2}{169} + \frac{x^2}{16} = 1$ con el plano $z - \frac{9}{2} = 0$ *(Puntuación:* 2.5*)*.

④ Puntos más cercanos y lejanos al origen de la intersección de

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{169}+\frac{z^2}{81}=1, \text{ con}$$

$$z-\frac{9}{2}=0$$

Hay que maximizar $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, en la que $z=9/2$

$$L(x,y,z)= x^2+y^2+\frac{81}{4}+\lambda\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{169}+\frac{81/4}{81}-1\right)$$

$$= x^2+y^2+\lambda\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{169}-\frac{3}{4}\right)+\frac{81}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial L}{\partial x}= 2x+2\lambda x/16 = 2x\left(1+\dfrac{\lambda}{16}\right)=0\\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y}=2y+2\lambda y/169=2y\left(1+\dfrac{\lambda}{169}\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

• $x = y = 0$, $z = 9/2$ × No vale porque no satisface la condición

• $x = 0$, $z = 9/2$, $1 + \frac{\lambda}{169} = 0$

$$\frac{y^2}{169} = 1 - \frac{z^2}{81} = 1 - \frac{1}{4} = 3/4$$

$$y^2 = \frac{169 \cdot 3}{4} \Rightarrow y = \pm \frac{13}{2}\sqrt{3}$$

• $y = 0$, $z = 9/2$, $1 + \frac{\lambda}{16} = 0$

$$\frac{x^2}{16} = 1 - \frac{z^2}{81} = \frac{3}{4}$$

$$x^2 = \frac{16 \cdot 3}{4} \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$$

• $1 + \frac{\lambda}{16} = 0$, $1 + \frac{\lambda}{169} = 0$, imposible.

Los candidatos son:

$$P^{\pm} = \left(0, \pm\frac{13}{2}\sqrt{3}, \frac{9}{2}\right)$$

$$Q^{\pm} = \left(\pm 2\sqrt{3}, 0, \frac{9}{2}\right)$$

$$f(P^{\pm}) = \frac{169}{4}\cdot 3 + \frac{81}{4} = \frac{588}{4}$$

$$f(Q^{\pm}) = 4\cdot 3 + \frac{81}{4} = \frac{81+48}{4} = \frac{129}{4}$$

Así que:

$Q^{\pm}$ son mínimos absolutos

$P^{\pm}$ son máximos absolutos.

③ $f(x,y) = 6y^4 + 12y^2 + 3x^4 + 8x^2$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 12x^3 + 16x = x(12x^2+16) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 24y^3 + 24y = y(24y^2+24) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

- $x=0,\ y=0$
- $x=0,\ 24y^2+24=0$ No hay solucions
- $y=0,\ 12x^2+16=0$ No hay solucions
- $12x^2+16 = 24y^2+24$ No hay solucions

El único punto por estudiar es $P=(0,0)$, calculamos la matriz hessiana en P

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 36x^2+16 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 72y^2+24$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}$$

Como la sucesión

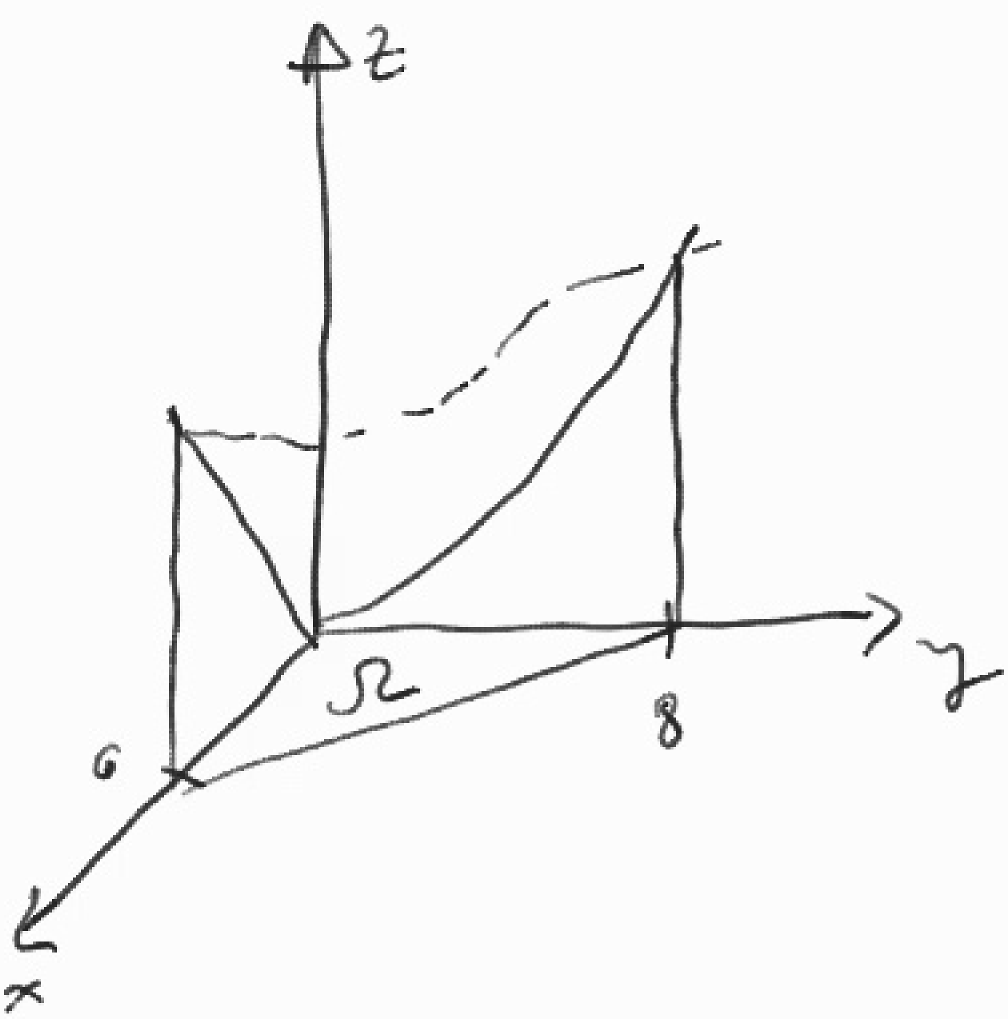
$1, \; \Delta_1 = 16, \; \Delta_2 = 16 \cdot 24$ es de

números positivos, se tiene que P es

un mínimo relativo

(2) $z = 8y^2 + 3x$

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$$



$$V = \iint_\Omega 8y^2 + 3x \; dx\,dy$$

$$\Omega = \left\{ (x,y) : 0 < x < 6, \quad 0 < y < 8\left(1 - \frac{x}{6}\right) \right\}$$

$$V = \int_0^6 \int_0^{8\left(1-\frac{x}{6}\right)} 8y^2 + 3x \; dy \; dx =$$

$$= \int_0^6 \left[\frac{8}{3} y^3 + 3xy \right]_{y=0}^{y=8\left(1-\frac{x}{6}\right)} dx$$

$$= \int_0^6 \frac{8}{3} 8^3 \cdot \left(1-\frac{x}{6}\right)^3 + 3x \cdot 8 \left(1-\frac{x}{6}\right) dx$$

$$\left[-2 \cdot 8^4 \frac{\left(1-\frac{x}{6}\right)^4}{4} + 24 \frac{x^2}{2} - 4 \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=6}$$

$$= \left(0 + 12 \cdot 36 - 4 \frac{6^3}{3}\right) - \left(-2 \, 8^4 \cdot \frac{1}{4}\right)$$

$$= 432 - 288 + 2048 = 2192$$

MATEMÁTICAS. JUNIO DE 2016

Nombre y apellidos:
Fila: **Columna:** **Firma:**

(Examen 9–102346320)

Observaciones

- Pon, además del nombre, apellidos y la firma, la fila y columna donde te encuentras sentado.
- Haz los razonamientos con claridad y no ocultes los cálculos intermedios, en caso contrario no se te puede evaluar la pregunta.
- Duración: 2horas y media

$\boxed{1}$. Describe el conjunto $\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 25, x > \frac{5}{2}, y > 0\}$ en coordenadas polares y haz un dibujo de él *(2 puntos)*.

$\boxed{2}$.

Calcula el volumen del cuerpo limitado por el cilindro $y^2+x^2-16 = 0$ y los paraboloides $z = y^2+x^2+5$ y $z = -y^2 - x^2$ *(3 puntos)*.

$\boxed{3}$.

Calcula los extremos de la función $f(x,y) = 5\,y^4 + 6\,y^2 + 4\,x^4 + 5\,x^2$ y determina sin son máximos o mínimos relativos *(2 puntos)*.

$\boxed{4}$.

En este ejercicio tienes que justificar (por supuesto con los métodos que hemos visto en clase para optimizar) cuáles son los puntos más cercanos y más lejanos al origen del elipsoide compacto (si te pone nervioso el nombre obvialo) $\frac{z^2}{36} + \frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{25} = 1$ *(3 puntos)*.

④ Puntos más cercanos y lejanos del elipsoide $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{36} = 1$ al origen.

$$L(x,y) = x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{36}-1\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2x\frac{\lambda}{25} = 2x\left(1+\frac{\lambda}{25}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 2y\frac{\lambda}{36} = 2y\left(1+\frac{\lambda}{36}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2z\left(1+\frac{\lambda}{36}\right) = 0$$

Así que:

- $x=0, y=0, z=0$, no nos vale porque no está en el elipsoide

- $x=0, y=0, \lambda=-36$

  $z=\pm 6$ por cumplirse que los puntos han de verificar la condición

- $x=z=0, \lambda=-36$

  $y=\pm 6$

- $y=z=0, \lambda=-25$,

  $x=\pm 5$

- $x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0$ no es posible porque obligaría simultáneamente

  $\lambda=-25, \lambda=-36$ IMPOSIBLE

Los puntos candidatos a extremos son pues:

$$P_z^{\pm} = (0, 0, \pm 6)$$

$$P_x^{\pm} = (\pm 5, 0, 0)$$

$$P_y^{\pm} = (0, \pm 6, 0)$$

Si $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, tenemos

$$f(P_x^{\pm}) = 25$$

$$f(P_y^{\pm}) = \pm 36 = f(P_z^{\pm})$$

Luego: $P_x^{\pm}$ son dos mínimos absolutos

$P_z^{\pm}$, $P_y^{\pm}$ son 4 máximos absolutos

Dudas de alumnos

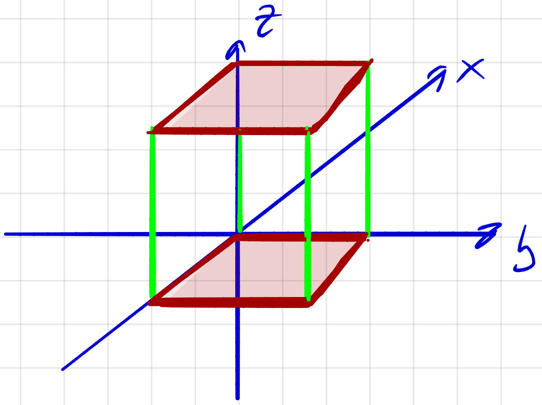
8

C.2.

$\boxed{8}$.

De los paralepípedos (entendemos que todas las aristas que intersecan en un vértice lo hacen con un ángulo de 90 grados) cuyas aristas suman la longitud 456 encuentra el que tiene mayor volumen.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:



Hay 4 aristas para cada x, y, z.

$4x+4y+4z=456 \to$ Dato

$x+y+z=114$

Función a optimizar $\to f(x,y,z)=x\cdot y\cdot z$ ~~= 114~~

$L(x,y,z;\lambda)= x\cdot y\cdot z+\lambda\left[(x+y+z)-114\right]$

$$\left.\begin{aligned} L'_x &= yz+\lambda=0\\ L'_y &= xz+\lambda=0\\ L'_z &= xy+\lambda=0\\ L'_\lambda &= x+y+z-114=0\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&\lambda=-yz=-xz=-xy\\ &\bullet\ yz-xz=0\\ &\quad z(y-x)=0 \ \begin{cases}\boxed{z=0}\\ \boxed{y=x}\end{cases}\\ &\bullet\ xz-xy=0\\ &\quad x(z-y)=0 \ \begin{cases}\boxed{x=0}\\ \boxed{z=y}\end{cases}\end{aligned}$$

$\boxed{z=0}$ $x=0$ $y=114$

$z=y$; $x=114$

$\boxed{y=x}$ $x=0$; $z=114$

$y=x=z$; $3x=114$

$x=38$

$x=38$

$y=38$

$z=38$

Solución : $\boxed{\text{Aristas de } 38}$

$\bullet\ yz-yx=0 <$ $y=0$ / $x=z$

¿Porque 3 ~~mociones~~ Soluciones?

$\bullet\ x=y=z=0$

$\bullet\ x=y=0\quad z=114$

$x=y=z$

$y=x=z=0$

$x=z=0 \Rightarrow y=0$

Dos cero $\Rightarrow$ 3ª cero

1 Cero $\Rightarrow$ 3 = Cero

9.46. Encontrar los puntos que están sobre el cilindro "macizo" de ecuación $x^2 + y^2 \leq 1$ y sobre el plano de ecuación $x + y + z = 1$ y cuya distancia al origen de coordenadas sea máxima o mínima

9.47. Calcular la distancia máxima y mínima del origen a la siguiente elipse:

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$$

9.48. Estudia los extremos relativos de la función $f(x, y, z) = xyz$.

9.49. Estudia los extremos relativos condicionados de la función $f(x, y, z) = xyz$ sujeta a la condición $x + y + z = 27$.

9.50. De entre las ternas de números positivos que suman una cantidad menor o igual a 27 ¿es cierto que su producto no excede de 729?

9.51. De entre las ternas de números cuyos valores absolutos suman una cantidad menor o igual a 27 ¿es cierto que su producto no excede de 729?

Usando el método explicado para encontrar extremos condicionados, calcula los extremos condicionados de la función $f(x, y) = 2(x^2 + y^2)$ con ligadura $y = 4x^2$. Di si son máximos o mínimos condicionados.

Solución:

Empezamos escribiendo la lagrangiana del problema $L(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + \lambda(y - 4x^2)$.

Imponemos las condiciones necesarias para que existan extremos condicionados:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y) = 4x - 8x\lambda = 0 \Rightarrow (4 - 8\lambda)x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x, y) = 4y + \lambda = 0 \Rightarrow 4y = -\lambda \\ g(x, y) = y - 4x^2 = 0 \Rightarrow y = 4x^2 \end{aligned}$$

Si metemos el valor de la última ecuación en las dos primeras obtenemos: $16x^2 = -\lambda$ y $(4 - 8\lambda)x = 0$. De estas dos se tiene $(4 + 8 \cdot 16x^2)x = 0$, que sólo tiene por resultado $x = 0$.

Como $x = 0$ e $y = 4x^2$, el único candidato a extremo es el punto $P = (0, 0)$ con $\lambda = 0$.

Calculamos ahora el Hessiano de L:

$$HL(x, y) = \begin{pmatrix} 4 - 8\lambda & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow HL(P) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ahora tomamos vectores $h = (h_1, h_2) \neq 0$ que verifiquen $dg(P)(h) = 0$ y vemos si las expresiones $h^i HL(P_i)(h^i)^t$ son positivas o negativas. Antes de calcular esos vectores computamos la expresión $hHL(P)(h)^t$ por si no intervinieran los valores de los vectores h para determinar el signo.

$$hHL(P)(h)^t = 4h_1^2 + 4h_2^2 > 0.$$

Así que en $P = (0, 0)$ tenemos un mínimo condicionado.

9.52. Calcula $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy[(Ax)^2 - (By)^2]}{C^2(x^2 + y^2)} & \text{si}(x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

9.53. Calcula los extremos de la función $f(x, y, z) = x^2 + xy - 3xz + 9$.

X. Cálculo integral: funciones reales de varias variables

9.49

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y,z) = xyz \\ x+y+z=27 \end{array}\right\}$$

$$L(x,y,z) = xyz + \lambda(x+y+z-27)$$

$$\nabla L(x,y,z) = (yz+\lambda, xz+\lambda, xy+\lambda) = (0,0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (S) \left\{ \begin{array}{l} yz+\lambda=0 \\ xz+\lambda=0 \\ xy+\lambda=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} yz = xz \begin{cases} z=0 \\ \text{ó} \\ z\neq 0 \quad x=y \end{cases} \\ yz = xy \begin{cases} y=0 \\ y\neq 0 \quad z=x \end{cases} \end{array} \right.$$

Así que las soluciones de (S) añadiendo $x+y+z=27$ son:

- $z=0,\ y=0,\ x=27$ $\quad P_1=(27,0,0) \quad \lambda=0$
- $z=0,\ y\neq 0,\ z=x=0,\ y=27$ $\quad P_2=(0,27,0) \quad \lambda=0$
- $z\neq 0,\ x=y=0$ $\quad P_3=(0,0,27) \quad \lambda=0$
- $z\neq 0,\ x=y=z,\ y\neq 0$ $\quad P_4=(9,9,9) \quad \lambda=-81$

Calculamos la matriz Hessiana

$$HL(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

Estudiamos el punto P_4. La función condición es $g(x,y,z) = x+y+z-27$, luego $\nabla g(x,y,z) = (1,1,1)$. Analizamos qué vectores cumplen $\nabla g(x,y,z)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0$ y éstos verifican $h_1+h_2+h_3=0$, es decir, $h_3=-h_1-h_2$.

Ahora analizamos el signo de la cantidad

$$Q=(h_1\ h_2\ h_3)\ HL(P_4)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}=18(h_1h_2+h_2h_3+h_1h_3)$$

para los vectores $(h_1, h_2\ h_3)\neq\vec{0}$ con $h_3=-h_1-h_2$.

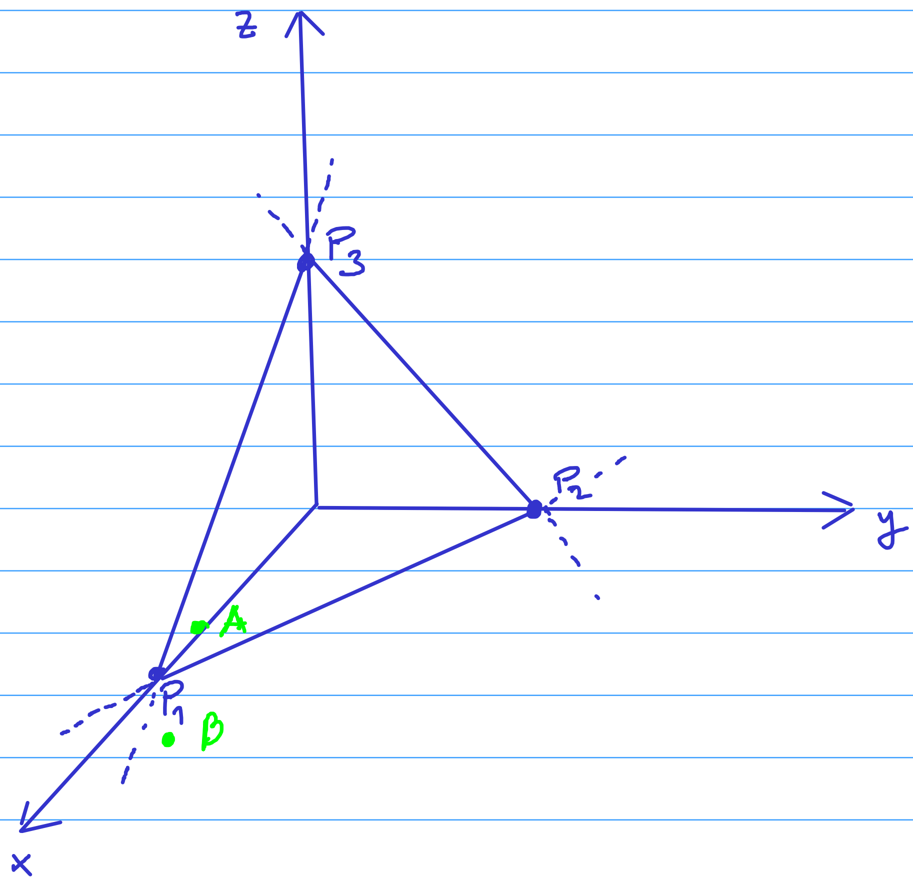
$$Q=18\left[h_1h_2+h_2(-h_1-h_2)+h_1(-h_1-h_2)\right]=-18\left[h_1^2+h_2^2-h_1h_2\right]$$

Observemos que h_1 y h_2 no pueden ser simultáneamente nulos porque $(h_1,h_2,h_3)\neq\vec{0}$ y $h_3=-h_1-h_2$. Además:

$$Q=-18\underbrace{\left[h_1^2+h_2^2-h_1h_2\right]}_{Q'}=-18\underbrace{\left[(h_1-h_2)^2+h_1h_2\right]}_{Q''}$$

Observa que si h_1 y h_2 tienen el mismo signo $Q''>0$ y si h_1 y h_2 tienen signo diferente $Q'>0$, luego $Q<0$ y P_4 es un máximo relativo condicionado.

$\boxed{\text{Estudiamos el punto } P_1=(27,0,0)}$ El camino del hessiano no conduce a ningún lado porque la cantidad Q se puede anular en este caso. Hay que analizar lo que pasa en este caso en las proximidades de P_1



Los puntos $A \doteq (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ los cogemos en el plano $x+y+z=27$ con $\underbrace{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2}_{>0}, \underbrace{b_3}_{<0} \neq 0$

Como $f(A) > 0$, $f(P_1) = 0$ y $f(B) < 0$ se tiene que P_1 no puede ser un extremo relativo condicionado.

9

C.2.

9.

De todos los tríos de números reales cuyos cuadrados suman 180 encuentra los que maximizan o minimizan la suma de sus cubos.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

$x^2+y^2+z^2=180 \to$ Dato $\qquad f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3 \equiv$ mínimo

$L(x,y,z;\lambda)=x^3+y^3+z^3+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-180\right)$

$L'_x = 3x^2+2\lambda x=0$

$L'_y = 3y^2+2\lambda y=0$

$L'_z = 3z^2+2\lambda z=0$

$L'_\lambda = x^2+y^2+z^2-180=0$

$\lambda = \dfrac{-3x^2}{2x}=\dfrac{-3y^2}{2y}=\dfrac{-3z^2}{2z}=0$

$\to$ Esto cuando $x\neq 0, y\neq 0, z\neq 0$

$x^2y=y^2x$;

$x^2y-y^2x=0$

$xy(x-y)=0 \to \boxed{x=0}$, $\boxed{y=0}$, $\boxed{x=y}$

$x^2z=xz^2$; $x^2z-xz^2=0$

$xz(x-z)=0 \to \boxed{x=0}$, $\boxed{z=0}$, $\boxed{x=z}$

$\boxed{x=0 \; ; \; z=0}$ $\quad y^2=180$; $y=\pm 6\sqrt{5}$ $\quad P_1(0,6\sqrt{5},0)$, $P_2(0,-6\sqrt{5},0)$

$\boxed{y=0 \; ; \; x=0}$ $\quad z^2=180$; $z=\pm 6\sqrt{5}$ $\quad P_3(0,0,6\sqrt{5})$, $P_4(0,0,-6\sqrt{5})$

$\boxed{y=0 \; , \; x=z}$ $\quad 2x^2=180$; $x=\pm 3\sqrt{10}$ $\quad P_5(3\sqrt{10},0,3\sqrt{10})$, $P_6(-3\sqrt{10},0,-3\sqrt{10})$

$\boxed{y=0 \; , \; z=0}$ $\quad x^2=180$; $x=\pm 6\sqrt{5}$ $\quad P_7(6\sqrt{5},0,0)$, $P_8(-6\sqrt{5},0,0)$

Máximos: $\boxed{P_1, P_3, P_7}$

Mínimos: $\boxed{P_2, P_4, P_8}$

faltan P_9, P_{10}, P_{11} y P_{12} análogo a P_5 y P_6

P_3 y P_4 $\quad x=y=z$

9

C.2.

$\boxed{\mathbf{9}}$.

De todos los tríos de números reales cuyos cuadrados suman **352** encuentra los que maximizan o minimizan la suma de sus cubos.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) Los máximos absolutos son $\begin{pmatrix}0 & 0 & \sqrt{359}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & \sqrt{359} & 0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}\sqrt{359} & 0 & 0\end{pmatrix}$ y los mínimos absolutos son $\begin{pmatrix}0 & 0 & -\sqrt{359}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & -\sqrt{359} & 0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-\sqrt{359} & 0 & 0\end{pmatrix}$.
2) Los máximos absolutos son $\begin{pmatrix}0 & 0 & \sqrt{367}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & \sqrt{367} & 0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}\sqrt{367} & 0 & 0\end{pmatrix}$ y los mínimos absolutos son $\begin{pmatrix}0 & 0 & -\sqrt{367}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & -\sqrt{367} & 0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-\sqrt{367} & 0 & 0\end{pmatrix}$.
3) Los máximos absolutos son $\begin{pmatrix}0 & 0 & \sqrt{377}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & \sqrt{377} & 0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}\sqrt{377} & 0 & 0\end{pmatrix}$ y los mínimos absolutos son $\begin{pmatrix}0 & 0 & -\sqrt{377}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & -\sqrt{377} & 0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-\sqrt{377} & 0 & 0\end{pmatrix}$.

4) Los máximos absolutos son $\begin{pmatrix}0 & 0 & 4\sqrt{22}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 4\sqrt{22} & 0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}4\sqrt{22} & 0 & 0\end{pmatrix}$ y los mínimos absolutos son $\begin{pmatrix}0 & 0 & -4\sqrt{22}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & -4\sqrt{22} & 0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-4\sqrt{22} & 0 & 0\end{pmatrix}$.
5) Los máximos absolutos son $\begin{pmatrix}0 & 0 & \sqrt{379}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & \sqrt{379} & 0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}\sqrt{379} & 0 & 0\end{pmatrix}$ y los mínimos absolutos son $\begin{pmatrix}0 & 0 & -\sqrt{379}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & -\sqrt{379} & 0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-\sqrt{379} & 0 & 0\end{pmatrix}$.
6) Los máximos absolutos son $\begin{pmatrix}0 & 0 & 8\sqrt{6}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 8\sqrt{6} & 0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}8\sqrt{6} & 0 & 0\end{pmatrix}$ y los mínimos absolutos son $\begin{pmatrix}0 & 0 & -8\sqrt{6}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & -8\sqrt{6} & 0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-8\sqrt{6} & 0 & 0\end{pmatrix}$.

9. $x, y, z \in \mathbb{R}$

$x^2+y^2+z^2 = 352 \rightarrow$ esfera

$f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3$ (optimizar)

$L(x,y,z) = x^3+y^3+z^3 + \lambda(x^2+y^2+z^2)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 3x^2+2\lambda x = 0 = x(3x+2\lambda) \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 3y^2+2\lambda y = 0 = y(3y+2\lambda) \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 3z^2+2\lambda z = 0 = z(3z+2\lambda) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

1. $x=y=z=0$ (descartado porque $x^2+y^2+z^2 \neq 352$)
2. $x=y=0$, $3z+2\lambda=0 \Rightarrow z^2=352$ $\rightarrow z = \frac{-2\lambda}{3}$

   $\Rightarrow z = \pm\sqrt{352}$
3. $x=0$, $y=\pm\sqrt{352}$, $z=0$

4. $x=0, \quad y=z=\dfrac{-2\lambda}{3}$

$$\Rightarrow \quad 2y^2 = 2z^2 = 352 \Rightarrow \underset{\substack{\shortparallel \\ y}}{z} = \pm\sqrt{176}$$

5. $x = \dfrac{-2\lambda}{3}, \quad y = z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{352}$

6. $x = \dfrac{-2\lambda}{3}, \quad y=0, \quad z = \dfrac{-2\lambda}{3} \quad \Rightarrow$

$$x = z = \pm\sqrt{176}$$

7. $x = \dfrac{-2\lambda}{3}, \quad y = \dfrac{-2\lambda}{3}, \quad z=0$

$$x = y = \pm\sqrt{176}$$

8. $x = y = z = \dfrac{-2\lambda}{3} \Rightarrow 3x^2 = 352$

$$\Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{352/3}$$

Así que tenemos 14 puntos candidatos. Para simplificar definimos:

$a = \sqrt{352}$, $b = \sqrt{176}$, $c = \sqrt{352/3}$

Los puntos son:

$$P_1^{\pm} = (0, 0, \pm a)$$

$$P_2^{\pm} = (0, \pm a, 0)$$

$$P_3^{\pm} = (\pm a, 0, 0)$$

$$P_4^{\pm} = (0, \pm b, \pm b)$$

$$P_5^{\pm} = (\pm b, 0, \pm b)$$

$$P_6^{\pm} = (\pm b, \pm b, 0)$$

$$P_7^{\pm} = (\pm c, \pm c, \pm c)$$

Como la condicion (esfera) es un compacto, tenemos garantizado (usando el teorema de Weierstrass) la existencia de máximos y mínimos absolutos entre los puntos anteriores. Así que calculamos f en dichos puntos:

$$f(P_1^+) = f(P_2^+) = f(P_3^+) = a^3$$

$$f(P_1^-) = f(P_2^-) = f(P_3^-) = -a^3$$

$$f(P_4^+) = f(P_5^+) = f(P_6^+) = 2b^3$$

$$f(P_4^-) = f(P_5^-) = f(P_6^-) = -2b^3$$

$$f(P_7^+) = 3c^3$$

$$f(P_7^-) = -3c^3$$

Ahora, como:

$$h_1 = a^3 = 352^{3/2}$$

$$h_2 = 2b^3 = 2 \cdot \left(\frac{352}{2}\right)^{3/2} = \frac{1}{2^{1/2}} \, 352^{3/2}$$

$$h_3 = 3c^3 = 3 \left(\frac{352}{3}\right)^{3/2} = \frac{1}{3^{1/2}} \, 352^{3/2}$$

Se tiene que $\quad h_1 > h_2 > h_3 \quad$ y

entonces:

- P_1^+, P_2^+, P_3^+ son máximos absolutos
- P_1^-, P_2^-, P_3^- son mínimos absolutos.

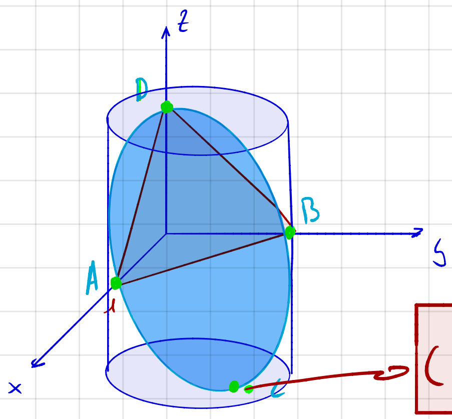
17

C.2.

En este ejercicio tratamos de investigar cuáles son los puntos más cercanos y lejanos al origen situados en la intersección (compacta) del plano $x+y+z=6$ y el cilindro $x^2+y^2=36$. La aplicación del teorema de Wierstrass nos da la existencia de máximos y mínimos absolutos, en concreto el máximo absoluto es $\left[-3\sqrt{2},-3\sqrt{2},6\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$ y los mínimos absolutos son $[6,0,0]$ y $[0,6,0]$. Sin embargo existe otro extremo relativo que se pide calcular y justificar si es máximo o mínimo.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

- Condición 1 → $x^2+y^2-36=0$
- Condición 2 → $x+y+z-6=0$



$\boxed{(3\sqrt{2},\ 3\sqrt{2},\ 6(1-\sqrt{2}))}$

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-36)+\mu(x+y+z-6)$$ ✓

$$L'_x=\cancel{2}x+\cancel{2}\lambda x+\mu \rightarrow x+\lambda x-z=0$$
$$L'_y=\cancel{2}y+\cancel{2}\lambda y+\mu \rightarrow y-\lambda y-z=0$$
$$L'_z=2z+\mu \rightarrow \mu=-2z$$

$$\lambda=\frac{z-x}{x}=\frac{z-y}{y}$$
$$zy-\cancel{xy}=zx-\cancel{xy}$$
$$zy-zx=0$$
$$z(x-y)=0 \rightarrow \boxed{z=0},\ \boxed{x=y}$$

$x^2+y^2=36$

$x+y+z=6$

$\boxed{y=x}$

$2x^2=36$, $x=\pm\sqrt{18}=\pm\boxed{3\sqrt{2}}$

$2x-6=0 \rightarrow 6\sqrt{2}-6=0$;

$=6(1\pm\sqrt{2})$

$\boxed{z=0}$

$y=6-x$

$x^2+(6-x)^2=36$

$x^2+\cancel{36}-12x+x^2-\cancel{36}=0$

$2x^2-12x=0$

$2x(x-6)=0 \rightarrow 2x=0,\ x=6$

$A(6,0,0)$

$B(0,6,0)$

- Efectivamente máximo absoluto; $D(3\sqrt{2},\ 3\sqrt{2},\ 6(1+\sqrt{2}))$
- El otro mínimo es $(3\sqrt{2},\ 3\sqrt{2},\ 6(1-\sqrt{2}))$ $=$ $\boxed{4{,}2426,\ 4{,}2426\ \ -2{,}48528}$

y C?

17

C.2.

17.

En este ejercicio tratamos de investigar cuáles son los puntos más cercanos y lejanos al origen situados en la intersección (compacta) del plano $x + y + z = 2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 4$. La aplicación del teorema de Wierstrass nos da la existencia de máximos y mínimos absolutos, en concreto el máximo absoluto es $\left[-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$ y los mínimos absolutos son $[2, 0, 0]$ y $[0, 2, 0]$. Sin embargo existe otro extremo relativo que se pide calcular y justificar si es máximo o mínimo.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $[1.4142, 1.4142, -0.8284]$
2) $[1.4342, 1.4342, -0.8084]$
3) $[1.4542, 1.4542, -0.7884]$
4) $[1.3642, 1.3642, -0.8784]$
5) $[1.3742, 1.3742, -0.8684]$
6) $[1.3942, 1.3942, -0.8484]$

9.45. Encontrar los puntos que están sobre el cilindro de ecuación $x^2+y^2=1$ y sobre el plano de ecuación $x+y+z=1$ y cuya distancia al origen de coordenadas sea máxima o mínima

9.45

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

ligadures $\begin{cases} x^2+y^2=1 \longrightarrow g_1(x,y,z) = x^2+y^2-1 \\ x+y+z=1 \longrightarrow g_2(x,y,z) = x+y+z-1 \end{cases}$

$$L(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-1)+\mu(x+y+z-1)$$

$$(S)\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x+2\lambda x+\mu = 2x(1+\lambda)+\mu=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y+2\lambda y+\mu = 2y(1+\lambda)+\mu=0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2z+\mu=0 \\ x^2+y^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

(1) $2x(1+\lambda) = 2y(1+\lambda) \overset{\text{si } \lambda\neq -1}{\Rightarrow} x=y \Rightarrow 2x^2=1 \Rightarrow y=x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = 1 \mp \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mu = -2z = -2 \pm \frac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda = \frac{-\mu}{2y} - 1 = \frac{2\mp\frac{4}{\sqrt{2}}}{2\cdot\frac{1}{\pm\sqrt{2}}} - 1 = \pm\sqrt{2} - 2 - 1 = \pm\sqrt{2}-3$

(2) si $\lambda=-1 \Rightarrow \mu=0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow x^2+(1-x)^2=1$

$\Rightarrow 2x^2-2x+1=1 \Rightarrow 2x(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=1 \\ x=1 \Rightarrow y=0 \end{cases}$

SOLUCIONES DE (S)

A. $x=0,\ y=1,\ z=0$ con $\lambda=-1$ y $\mu=0$

B. $x=1,\ y=0,\ z=0$ con $\lambda=-1$ y $\mu=0$

C. $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}},\ z=1-\sqrt{2}$ con $\lambda=\sqrt{2}-3$ y $\mu=-2+2\sqrt{2}$

D. $x=y=\frac{-1}{\sqrt{2}},\ z=1+\sqrt{2}$ con $\lambda=-\sqrt{2}-3$ y $\mu=-2-2\sqrt{2}$

Calculamos ahora $HL(x,y,z)$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2x+2\lambda x+\mu=2x(1+\lambda)+\mu$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=2y+2\lambda y+\mu=2y(1+\lambda)+\mu$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}=2z+\mu=0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=2(1+\lambda)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=2(1+\lambda)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}=2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}=0$$

$$HL(x,y,z)=\begin{pmatrix}2(1+\lambda) & 0 & 0\\ 0 & 2(1+\lambda) & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$(h_1,h_2,h_3)\ HL(x,y,z)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}=2(1+\lambda)(h_1^2+h_2^2)+2h_3^2=Q$$

(h_1,h_2,h_3) debe satisfacer:

C1. $\nabla g_1(x,y,z)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}=(2x,2y,0)\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}=2xh_1+2yh_2=0$

c.2 $\quad \nabla g_2(x,y,z)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = (1,1,1)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = h_1+h_2+h_3=0$

$\boxed{\text{PUNTO A}}$ $\quad \underline{\lambda=-1} \quad A=(0,1,0)$

$Q = 2h_3^2 \Rightarrow Q>0$

$\left.\begin{array}{l} h_1+h_2+h_3=0 \\ 2h_2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow h_1+h_3=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} h_3=-h_1 \\ (h_1,h_2,h_3)\neq 0 \\ h_2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow h_3\neq 0$

A es un mínimo relativo condicionado

$\boxed{\text{PUNTO B}}$ $\quad \underline{\lambda=-1} \quad B=(1,0,0)$

$Q = 2h_3^2 \Rightarrow Q>0$

$\left.\begin{array}{l} h_1+h_2+h_3=0 \\ 2h_1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow h_2+h_3=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} h_3=-h_2 \\ (h_1,h_2,h_3)\neq 0 \\ h_1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow h_3\neq 0$

B es un mínimo relativo condicionado

PUNTO C

$C=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1-\sqrt{2}\right)$ $\lambda=\sqrt{2}-3$ y $\mu=-2+2\sqrt{2}$

$$2(1+\lambda)(h_1^2+h_2^2)+2h_3^2 = Q$$

$$\parallel$$

$$2(\sqrt{2}-2)(h_1^2+h_2^2)+2h_3^2$$

$$2x\,h_1+2y\,h_2=0 = \frac{2}{\sqrt{2}}(h_1+h_2)=0 \Rightarrow \underline{h_1=-h_2}$$

$$h_1+h_2+h_3=0 \Rightarrow h_3=0$$

$$(h_1,h_2,h_3)\neq(0,0,0)$$

$$\Rightarrow h_1\neq 0 \neq h_2$$

$$Q = \underbrace{2(\sqrt{2}-2)}_{\wedge\atop 0}\underbrace{(h_1^2+h_2^2)}_{\vee\atop 0} < 0 \Rightarrow$$

C es un máximo relativo condicionado

PUNTO D $\quad D=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},1+\sqrt{2}\right)\quad \lambda=-\sqrt{2}-3$ y $\mu=-2+2\sqrt{2}$

$$2(1+\lambda)(h_1^2+h_2^2)+2h_3^2 = Q$$
$$\parallel$$
$$2(\sqrt{2}-4)(h_1^2+h_2^2)+2h_3^2$$

$$2x\,h_1+2y\,h_2=0 = \frac{-2}{\sqrt{2}}(h_1+h_2)=0 \Rightarrow \underline{h_1=-h_2}$$

$$h_1+h_2+h_3=0 \Rightarrow h_3=0$$

$$(h_1,h_2,h_3)\neq(0,0,0)$$

$$\Rightarrow h_1\neq 0\neq h_2$$

$$Q = \underbrace{2(\sqrt{2}-4)}_{\wedge\, 0}\underbrace{(h_1^2+h_2^2)}_{\vee\, 0} < 0 \Rightarrow$$

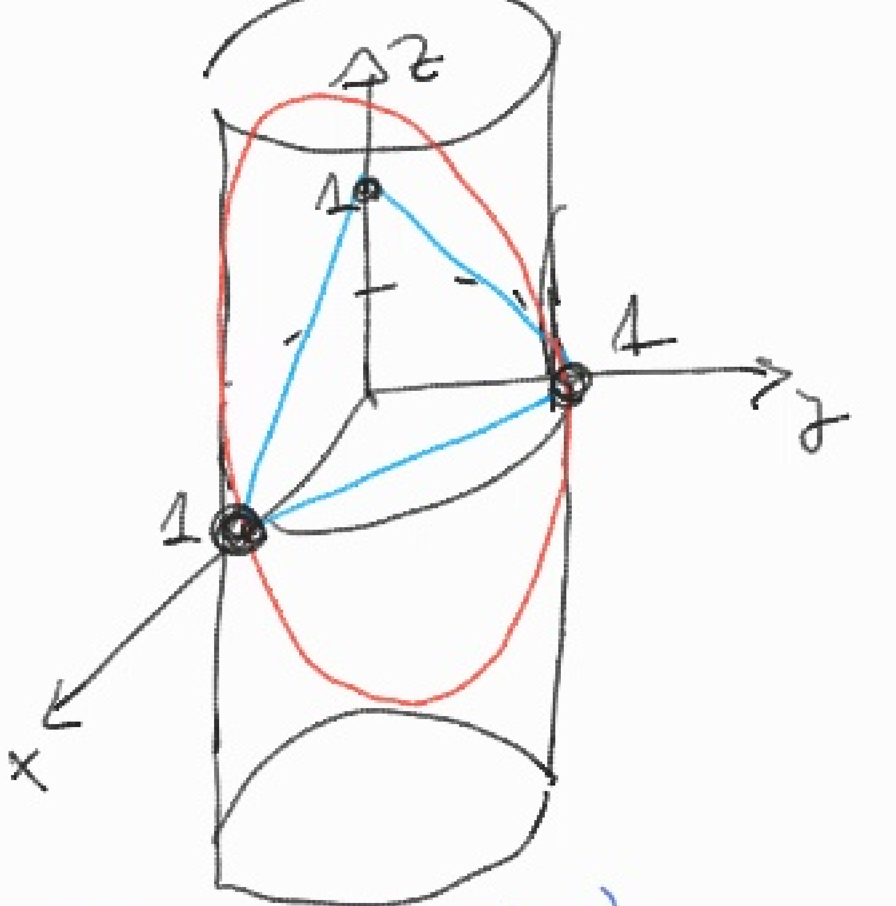
D es un máximo relativo condicionado

FINALMENTE, comparando lo que vale f en todos los puntos extremos relativos, tenemos:

A y B son mínimos absolutos
D es un máximo absoluto.

PROBLEMA DE EXTREMOS CONDICIONADOS

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y,z) = x+2y+3z \\ x+y+z=1 \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right\}$$



$g_1(x,y,z) = x+y+z-1$

$g_2(x,y,z) = x^2+y^2-1$

$$L = x+2y+3z + \lambda(x+y+z-1) + \mu(x^2+y^2-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1+\lambda+2x\mu = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2+\lambda+2y\mu = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 3+\lambda = 0 \end{array}\right\} \to \lambda = -3$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} -2+2x\mu = 0 \\ -1+2y\mu = 0 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} x\mu = 1 \Rightarrow \mu = 1/x \\ y\mu = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}x \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x^2+\frac{1}{4}x^2=1 \Rightarrow \frac{5}{4}x^2=1$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{4}{5} \Rightarrow x=\frac{\pm 2}{\sqrt{5}}$$

$z=1-x-y$. Así que los candidatos a extremos son:

$$\boxed{\begin{array}{l} P_1=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}, 1-\frac{6}{\sqrt{5}}\right), \mu=\frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda=-3 \\[2ex] P_2=\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-4}{\sqrt{5}}, 1+\frac{6}{\sqrt{5}}\right), \mu=\frac{-\sqrt{5}}{2}, \lambda=-3 \end{array}}$$

Como los puntos que verifican la condición son una elipse forman un conjunto compacto y se alcanzan mínimos y máximos absolutos.

Como $f(P_1)=\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{8}{\sqrt{5}}+3-\frac{18}{\sqrt{5}}=\frac{-8}{\sqrt{5}}+3$,

$f(P_2)=\frac{-2}{\sqrt{5}}-\frac{8}{\sqrt{5}}+3+\frac{18}{\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}+3$.

Entonces P_1 es un mínimo absoluto y

P_2 es un máximo absoluto.

Si no supiéramos que la condición es un compacto:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 1 + \lambda + 2x\mu = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 2 + \lambda + 2y\mu = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial z} &= 3 + \lambda = 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} &= 2\mu \\
\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} &= 2\mu \\
\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} &= 0
\end{aligned}
\left|
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} &= 0 \\
\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} &= 0 \\
\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} &= 0
\end{aligned}\right.$$

$$HL(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q = 2\mu h_1^2 + 2\mu h_2^2 = 2\mu(h_1^2 + h_2^2)$$

Hay que ver el signo de $Q = 2\mu(h_1^2 + h_2^2)$ para vectores $(h_1, h_2, h_3) \neq \vec{0}$ y

$$\begin{cases} \nabla g_1(x,y,z) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0 = (1\,1\,1) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = h_1 + h_2 + h_3 = 0 \\ \nabla g_2(x,y,z) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0 = 2xh_1 + 2yh_2 = 0 \end{cases}$$

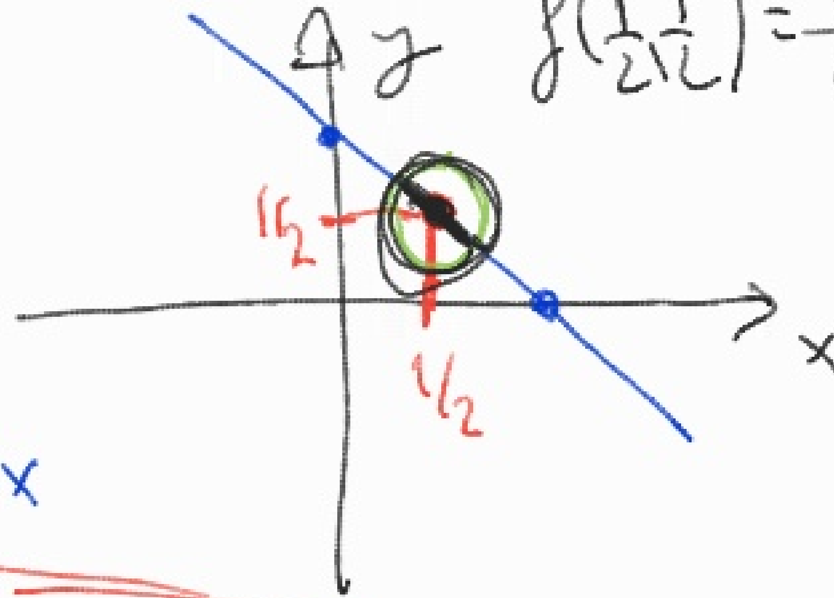
Observa que $h_1 \neq 0$ ó $h_2 \neq 0$ porque si $h_1 = h_2 = 0$ entonces $h_1 + h_2 = 0$ y $h_3 = 0$, luego $(h_1, h_2, h_3) = \vec{0}$ que no es posible.

Así que $Q = 2\mu(h_1^2 + h_2^2)$ $\begin{matrix} > 0 \text{ en } P_1 \\ < 0 \text{ en } P_2 \end{matrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} P_1 \text{ mínimo relativo condicionado} \\ P_2 \text{ máximo relativo condicionado} \end{cases}$

Multiplicadors de Lagrange

$f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$



$$\begin{cases} f(x,y) = x \cdot y \\ x+y=1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow y = 1-x$

$g_1(x,y) = x+y-1$

$$\underline{L(x,y)} = \underline{f(x,y)} + \underline{\lambda\, g_1(x,y)}$$

$$= xy + \lambda(x+y-1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y) = y + \lambda = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y) = x + \lambda = 0 \\[2ex] x+y=1 \end{cases}$$

$y = -\lambda$

$x = -\lambda$

$\lambda = -y = -\frac{1}{2}$

$$x = y \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \tfrac{1}{2} = y}$$

Candidato a extremo

$$P = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \qquad \lambda = -\tfrac{1}{2}$$

¿Cómo sabemos si el candidato a extremo lo es realmente y si es máximo o mínimo?

$$HL(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1 = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}$$

$$Q = (h_1\ h_2)\ HL(x,y) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (h_1\ h_2) \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= 0 h_1^2 + 0 h_2^2 + 2 \cdot 1\, h_1 h_2$$

$$= 2 h_1 h_2 \overset{?}{>} 0 \quad \overset{?}{<} 0$$

$$\begin{cases} (h_1, h_2) \neq (0,0) \\ \nabla g_1(x,y) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 = \underbrace{(1\ \ 1) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}}_{= h_1 + h_2} \end{cases}$$

$$g_1(x,y) = x + y - 1$$

$$Q = \underbrace{2 h_1 h_2}\ \begin{matrix} > 0 \longrightarrow \text{min relativo cond} \\ < 0 \longrightarrow \text{Max relativo cond} \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \boxed{(h_1 h_2) \neq (0,0)} \\ h_1 + h_2 = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow h_2 = -h_1$$

$$Q = 2 h_1 (-h_1) = \underbrace{-2}\ \underbrace{h_1}^{2} < 0 \longrightarrow$$

$$h_1 = 0 \Rightarrow h_2 = -h_1 = 0$$

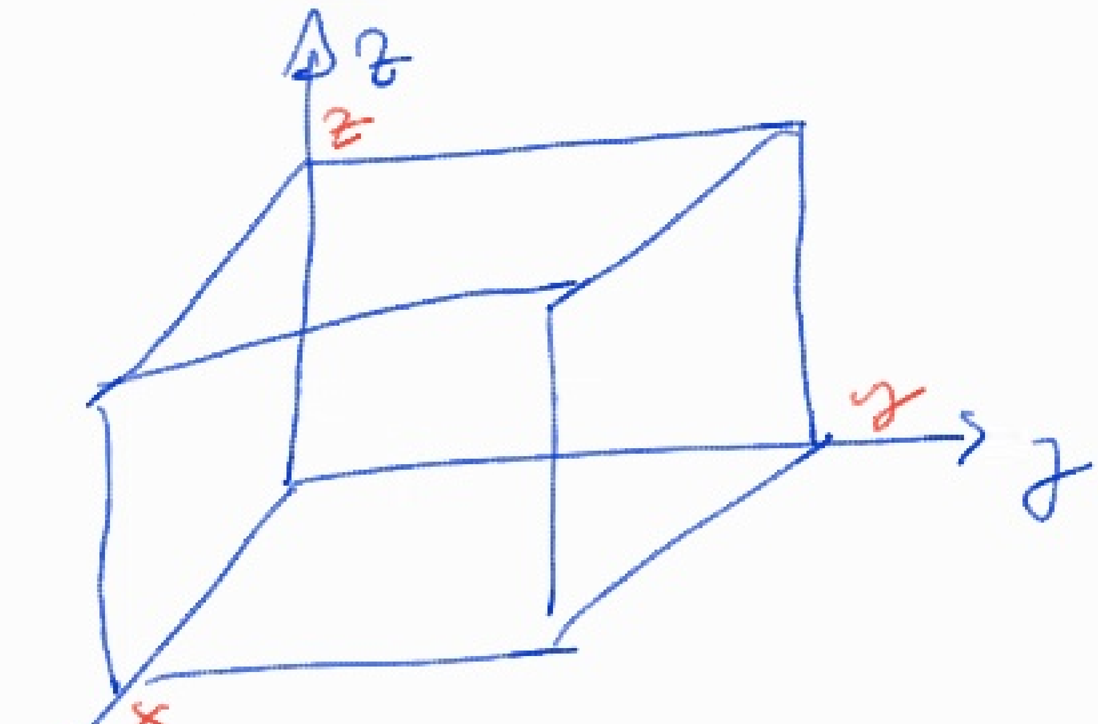
Conclusión

P es un máximo relativo condicionado

Tenemos que diseñar una nave con un volumen de 13000 metros cúbicos en forma de paralepípedo. En la construcción vamos a integrar un sistema de calefacción del cual queremos minimizar las pérdidas de calor. Las pérdidas de calor no son las mismas dependiendo de si se dan por los laterales, suelo o techo de la nave. Lo que sí se sabe es que debido a los materiales elegidos la pérdida por unidad de área en el techo es 13 veces la que se produce por unidad de área en el suelo. También se sabe que por el lateral se pierde, por unidad de área, 7 veces lo que se pierde por el suelo.

Se trata de encontrar las dimensiones de la nave *(Puntuación: 1)*.

***Indicación:** las pérdidas de calor son proporcionales al área de la superficie por la que se disipa si ésta es homogénea.*



2 caras de área xz

$$p(x,y,z) = Kxy + 13Kxy + 2\cdot 7Kxz + 2\cdot 7Kyz \Rightarrow$$

2 caras laterales de área yz

$$p(x,y,z) = 14Kxy + 14K(xz+yz) \Rightarrow$$

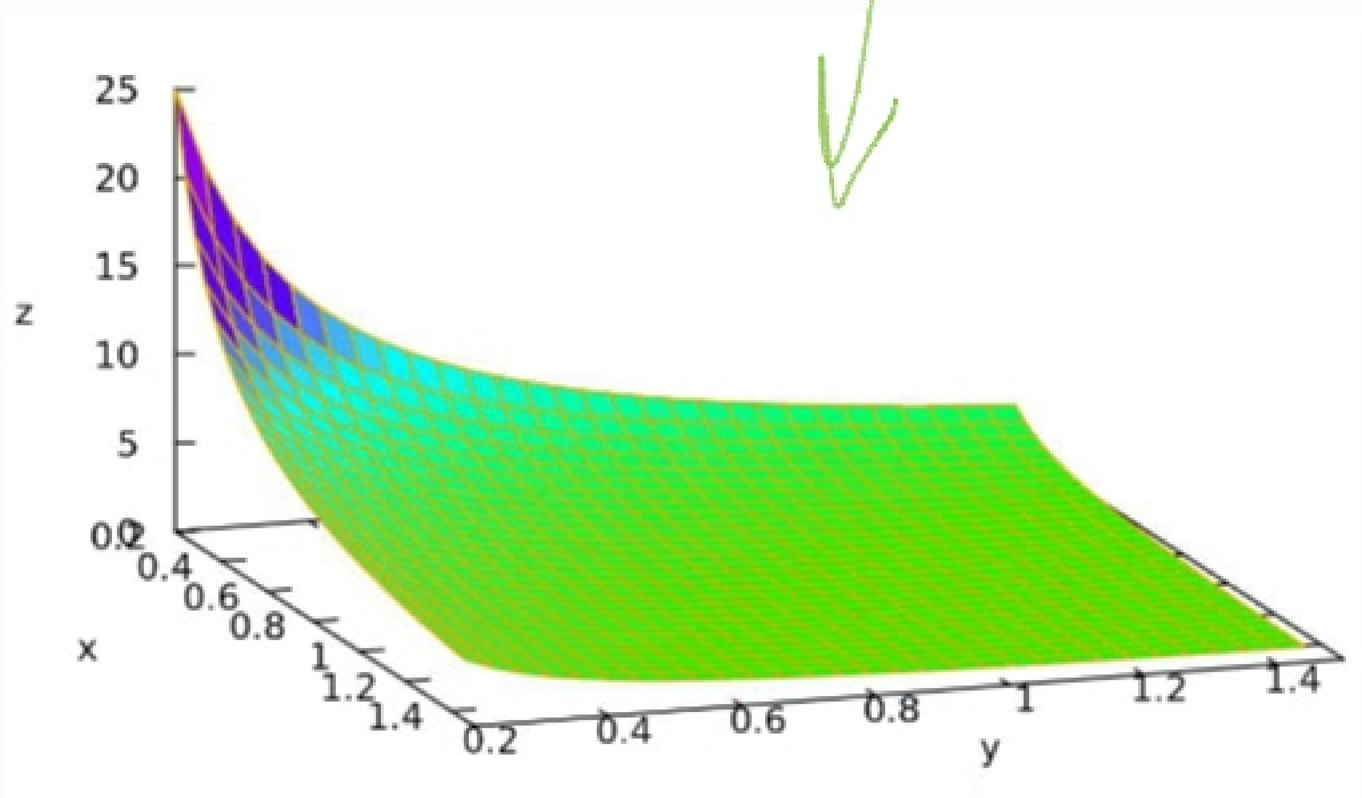
$$\boxed{p(x,y,z) = 14K(xy+yz+xz)}$$ → función a minimizar

sujeta a la condición $xyz = 13000$

$$\boxed{p(x,y,z) = 14k(xy + yz + xz)} \rightarrow \text{función a minimizar}$$

sujeto a la condición $\boxed{xyz = 13000}$

Esta condición no es un compacto:



con lo cual no se podrá aplicar el teorema de Weierstrass

Así que tenemos el siguiente problema de extremos condicionados

$$\begin{cases} p(x,y,z) = 14K(xy+xz+yz) \\ xyz = 13000 \quad (\text{condición}) \end{cases}$$

que es equivalente al problema

$$\begin{cases} q(x,y,z) = xy+xz+yz \\ xyz = 13000 \end{cases}$$

Los máximos de p y q coinciden y también los mínimos.

$$\begin{cases} g(x,y,z) = xy + xz + yz \\ xyz = 130000 \end{cases}$$

$$L(x,y,z) = xy + xz + yz + \lambda(xyz - 13000)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= y + z + \lambda yz = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= x + z + \lambda xz = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= x + y + \lambda xy = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Downarrow$

date cuenta que $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-y-z}{yz} = \frac{-x-z}{xz} = \frac{-x-y}{xy}$$

$$\lambda = \frac{-y-z}{yz} = \frac{-x-z}{xz} = \frac{-x-y}{xy}$$

$$-\cancel{xy} - xz = -\cancel{xy} - zy \Rightarrow x = y$$

$$-xy - \cancel{zy} = -xz - \cancel{yz} \Rightarrow z = y$$

$$\Rightarrow x = y = z, \quad \lambda = \frac{-2x}{x^2} = \frac{-2}{x}$$

Suponemos $xyz = 13000$ y entonces:

$$x = y = z = \sqrt[3]{13000} = \sqrt[3]{13} \cdot 10$$

Así que el punto candidato es:

$$R = \left(\sqrt[3]{13}\ 10, \sqrt[3]{13}\ 10, \sqrt[3]{13}\ 10\right), \quad \lambda = \frac{-2}{\sqrt[3]{13} \cdot 10}$$

¡No nos vale de nada ver si Q es un extremo relativo!

(Pero lo hacemos para entrenarnos)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= y+z+\lambda yz = 0\\ \frac{\partial L}{\partial y} &= x+z+\lambda xz = 0\\ \frac{\partial L}{\partial z} &= x+y+\lambda xy = 0\end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0 = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1+\lambda z \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 1+\lambda x$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = 1+\lambda y$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1 + \lambda z \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 1 + \lambda x$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = 1 + \lambda y$$

Así que la matriz Hessiana es:

$$HL(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1+\lambda z & 1+\lambda y \\ 1+\lambda z & 0 & 1+\lambda x \\ 1+\lambda y & 1+\lambda x & 0 \end{pmatrix}$$

Nos interesa el punto

$$R = \left(\sqrt[3]{13}\ 10, \sqrt[3]{13}\ 10, \sqrt[3]{13}\ 10\right), \ \lambda = \frac{-2}{\sqrt[3]{13} \cdot 10}$$

Se trata de estudiar la centridad

$$Q = (h_1, h_2, h_3)\, HL(R) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 2h_1h_2(1+\lambda z) + 2h_1h_3(1+\lambda y) +$$

$$+ 2h_2h_3(1+\lambda x) \underset{\text{Como } x=y=z \text{ en } R}{=}$$

$$= 2(1+\lambda x)(h_1h_2 + h_1h_3 + h_2h_3)$$

$$= 2(1-2)(h_1h_2 + h_1h_3 + h_2h_3)$$

$$= -2(h_1h_2 + h_1h_3 + h_2h_3) = -2T$$

Tenemos que ver si $Q > 0$ ó $Q < 0$

Estudiamos el signo de

$$T = h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_1 h_3$$

para $(h_1, h_2, h_3) \neq \vec{0}$ y que cumplen:

$$\nabla g(R) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$g(x,y,z) = xyz - 13000$$

$$\nabla g(x,y,z) = (yz, xz, xy)$$

$$\nabla g(R) = (10^2\, 13^{2/3}, 10^2\, 13^{2/3}, 10^2\, 13^{2/3})$$

$$\nabla g(R)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^2\, 13^{2/3}(h_1 + h_2 + h_3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_1 + h_2 + h_3 = 0 \text{ y } (h_1, h_2, h_3) \neq \vec{0}$$

$$\Rightarrow h_3 = -h_1 - h_2$$

$$T = \frac{Q}{-2} = h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3 =$$

$$= h_1 h_2 + (h_1 + h_2)(-1)(h_1 + h_2) =$$

$$= -(h_1 + h_2)^2 + h_1 h_2$$

$$T = -(h_1+h_2)^2 + h_1 h_2 =$$

$$= -h_1^2 - h_2^2 - h_1 h_2$$

Observa que h_1 y h_2 no pueden ser simultáneamente 0 porque $h_3 = -h_1 - h_2$.

Además estaremos en uno de los casos siguientes

* $h_1 h_2 > 0 \Rightarrow T = -h_1^2 - h_2^2 - h_1 h_2 < 0$
* $h_1 h_2 \leq 0 \Rightarrow T = -(h_1+h_2)^2 + h_1 h_2 < 0$

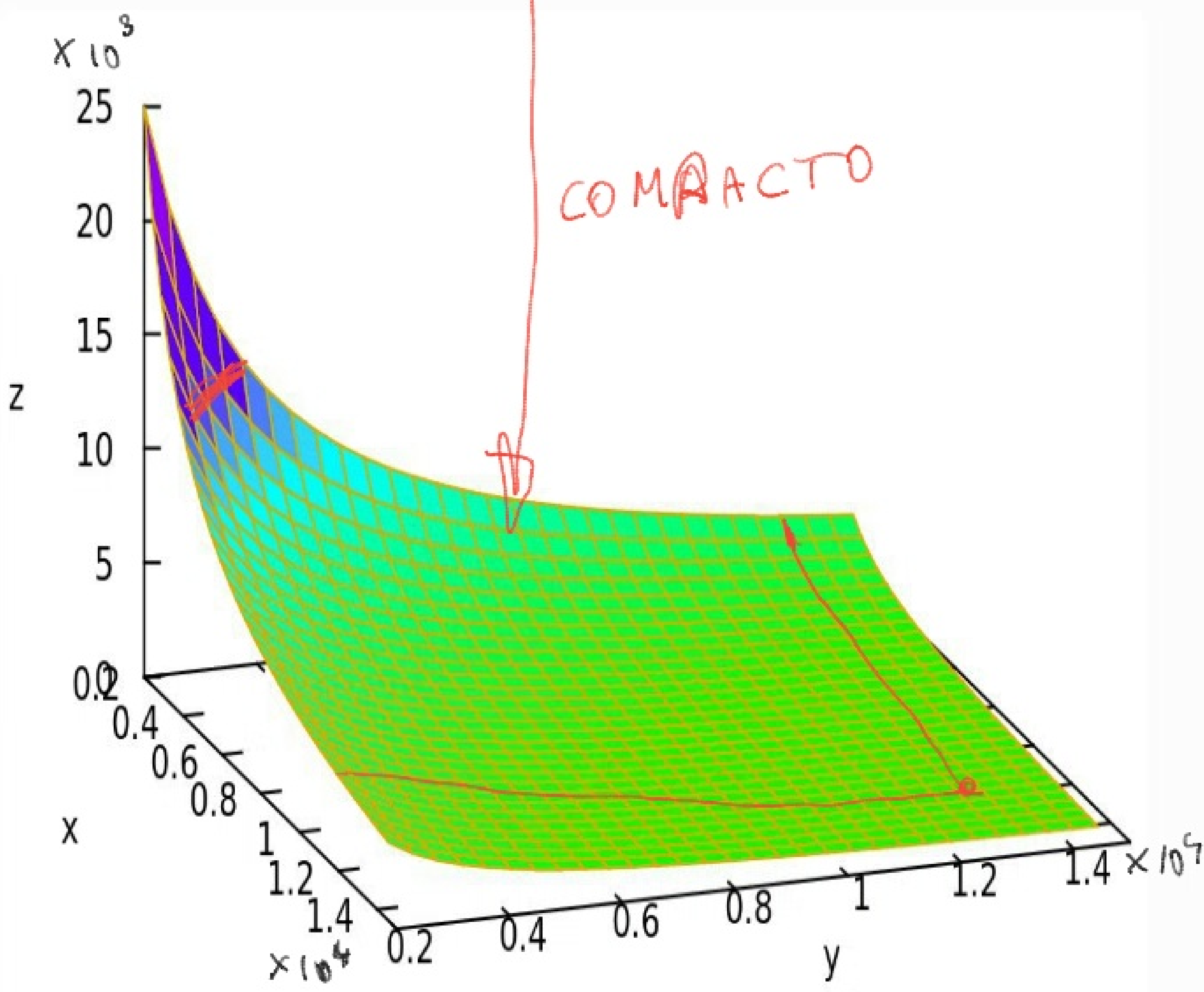
Luego $Q = -2T > 0$ y R es un $\boxed{\text{mínimo relativo condicionado}}$

¿Es también ABSOLUTO condicionado?

El procedimiento siguiente no es estándar.

<u>Consideraremos:</u>

$$C = \{(x,y,z) \text{ tq } xyz = 13000,\ x \leq 13000,\ y \leq 13000 \text{ y } z \leq 13000\}$$



Así que el problema de extremos:

$$\begin{cases} q(x,y,z) = xy + xz + yz \\ \left.\begin{array}{l} g(x,y,z) = xyz - 13000 = 0 \\ x \leq 13000,\ y \leq 13000 \text{ y } z \leq 13000 \end{array}\right\} \to \text{COMPACTO} \end{cases}$$

tiene extremos absolutos. Los buscamos como antes y nos saldrá como candidato R y añadimos los puntos donde contamos la condición

$$\partial C = \{(x,y,z) \in C \mid xyz = 13000 \text{ y } x = 13000 \text{ ó } y = 13000 \text{ ó } z = 13000\}$$

- La función en R toma el valor:

$$q(R) = 3 \, 10^2 \, 13^{2/3}$$

Sea $S \in \partial C$, $S = (x,y,z)$ entonces

$$x = 13000 \text{ ó } y = 13000 \text{ ó } z = 13000$$

Supongamos $x = 13000$, además $xyz = 13000$,

luego $yz = 1 \Rightarrow \begin{cases} y \geq 1, \\ ó \\ z \geq 1. \end{cases}$

Entonces:

$$q(S) = xy + xz + yz = 13000(y+z) + yz \geq$$

$$\geq 13000(y+z) \geq 13000 >$$

$$> q(R) = 300 \cdot 13^{2/3}$$

Si hubiéramos tomado $y = 13000$ ó $z = 13000$ se obtiene lo mismo. Luego R es un mínimo absoluto en G.

¿Y fuera de G pero manteniendo $xyz = 13000$?

En ese caso tomamos:

$T=(x,y,z)$ con $xyz=13000$ y una de las tres variables, por ejemplo x, mayor que 13000, $x>13000$. Luego

$$x=\lambda 13000 \quad \text{con } \lambda>1$$

$$yz=\frac{13000}{\lambda 13000}=\frac{1}{\lambda}<1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y \geq \frac{1}{\lambda} \\ \text{ó} \\ z \geq 1/\lambda \end{array} \right.$$

$$q(T)= xy+yz+xz = x(y+z)+yz \geq$$

$$\geq \lambda 13000 \frac{1}{\lambda} = 13000 > q(R) =$$

$$=300\ 13^{2/3}$$

Así que R es un mínimo absoluto condicionado por $xyz=13000$.

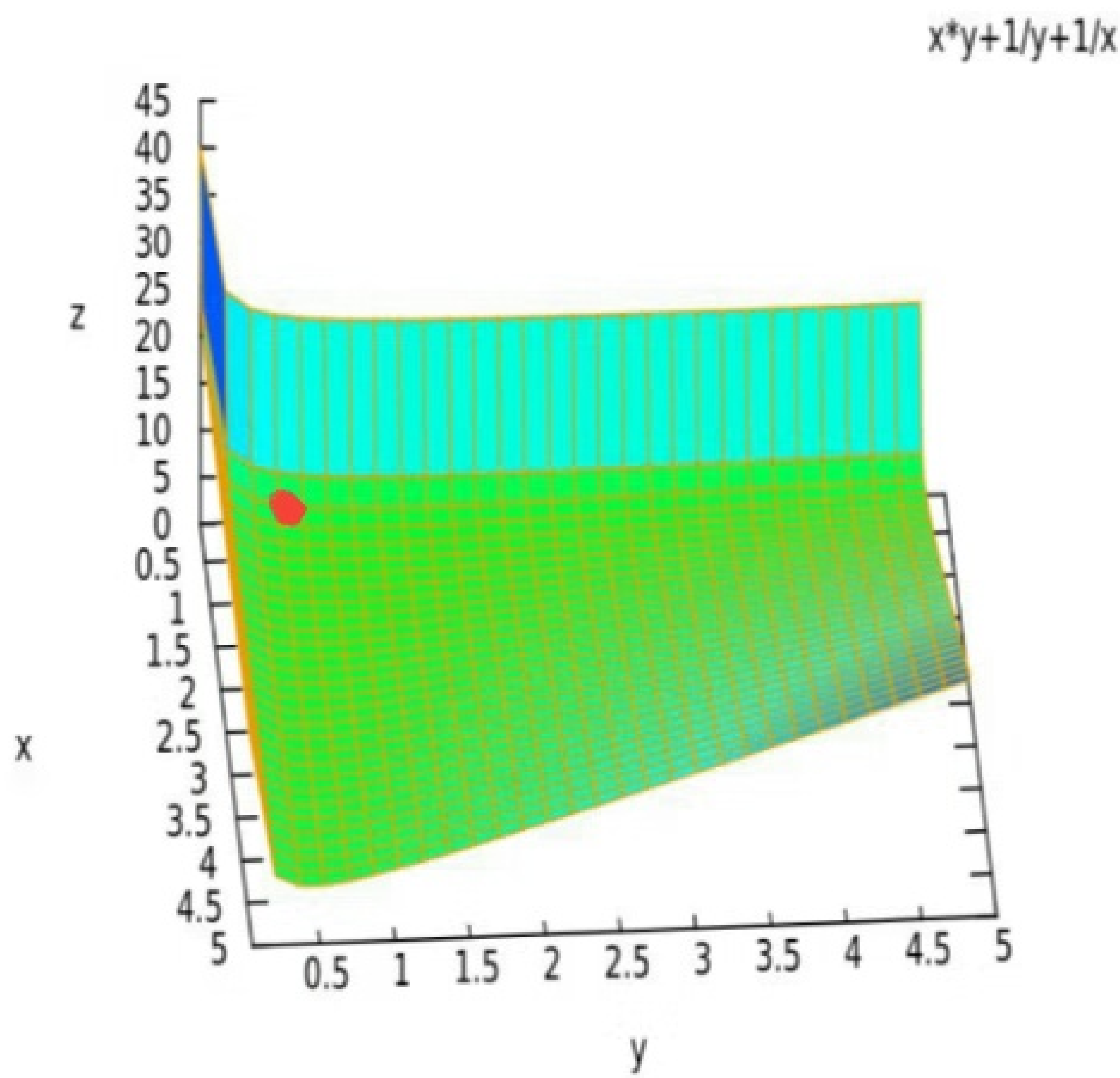
Resolvemos el problema de otra forma

$$\begin{cases} q(x,y,z) = xy + xz + yz \\ xyz = 13000; \quad x>0, y>0, z>0 \end{cases}$$

Despejamos $z = \dfrac{13000}{xy}$

$$\begin{cases} Q(x,y) = q(x,y,z) = xy + \dfrac{13000}{y} + \dfrac{13000}{x} \\ x>0, \ y>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q(x,y) = q(x,y,z) = xy + \dfrac{13000}{y} + \dfrac{13000}{x} \\ x > 0,\ y > 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} Q(x,y) = q(x,y,z) = xy + \frac{13000}{y} + \frac{13000}{x} \\ x>0,\ y>0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y - \frac{1300}{x^2} = 0 \Rightarrow y = \frac{13000}{x^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = x - \frac{13000}{y^2} = 0$$

$$xy^2 = 13000 \Rightarrow x\,\frac{13000^2}{x^4} = 13000$$

$$\Rightarrow x^3 = 13000 \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{13}\cdot 10$$

$$y = \frac{13000}{x^2} = \sqrt[3]{13}\cdot 10$$

Podemos ver si es un extremo relativo calculando la Hessiana

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{2600}{x^3}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} = 1$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = \frac{2600}{y^3}$$

$$HQ(\underbrace{\sqrt[3]{13}\ 10, \sqrt[3]{13}\ 10}_{U}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora

$$1, \Delta_1, \Delta_2 \rightarrow \begin{matrix} 1, & 2, & 3 \\ + & + & + \end{matrix}$$

$\rightarrow U$ es un mínimo relativo.

Podríamos hacer un "truco" parecido al del caso del método de los coefi-cientes indeterminados y concluir que el mínimo es absoluto.

Dejo esto para entretenimiento del alumno.

Del 15 al 24 de abril	Cada profesor/a planteará las modificaciones necesarias para el sistema de evaluación de sus asignaturas en base a las instrucciones que se detallan en este documento. Dichas modificaciones deberán tener en cuenta aquellas medidas que hubiera podido adoptar el profesor durante las semanas de suspensión de la actividad presencial. Las modificaciones serán procesadas de forma telemática a través de Campus Virtual para que estén accesibles por las direcciones de los Departamentos.
Del 27 al 30 de abril	Los Departamentos analizarán las propuestas de modificación de los sistemas de evaluación y trasladarán a los Centros los acuerdos o los informes preceptivos de los mismos para su validación/autorización por la Junta de Centro.
Hasta el 8 de mayo	Las Juntas de Centro validarán/autorizarán, si procede, las modificaciones a los sistemas de evaluación. Los Centros harán pública su decisión al respecto con la finalidad de que los profesores puedan publicar en su Aula Virtual una adenda a la guía docente de cada asignatura en la que se incluyan las modificaciones mencionadas. En los sistemas de información pública de la Universidad se mantendrán publicadas las guías docentes originales aprobadas antes del inicio del curso académico junto a las adendas aprobadas siguiendo este procedimiento, todo ello con el fin de disponer de un registro de los cambios realizados de cara a futuros procesos de seguimiento y acreditación de títulos. Asimismo, los Centros deberán aprobar y hacer público el calendario de exámenes que se derive de las modificaciones aprobadas en los sistemas de evaluación.

Mayo				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31
Junio						
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30					
Julio		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

Agosto					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31	Septiembre					
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				
Octubre			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

HITOS:

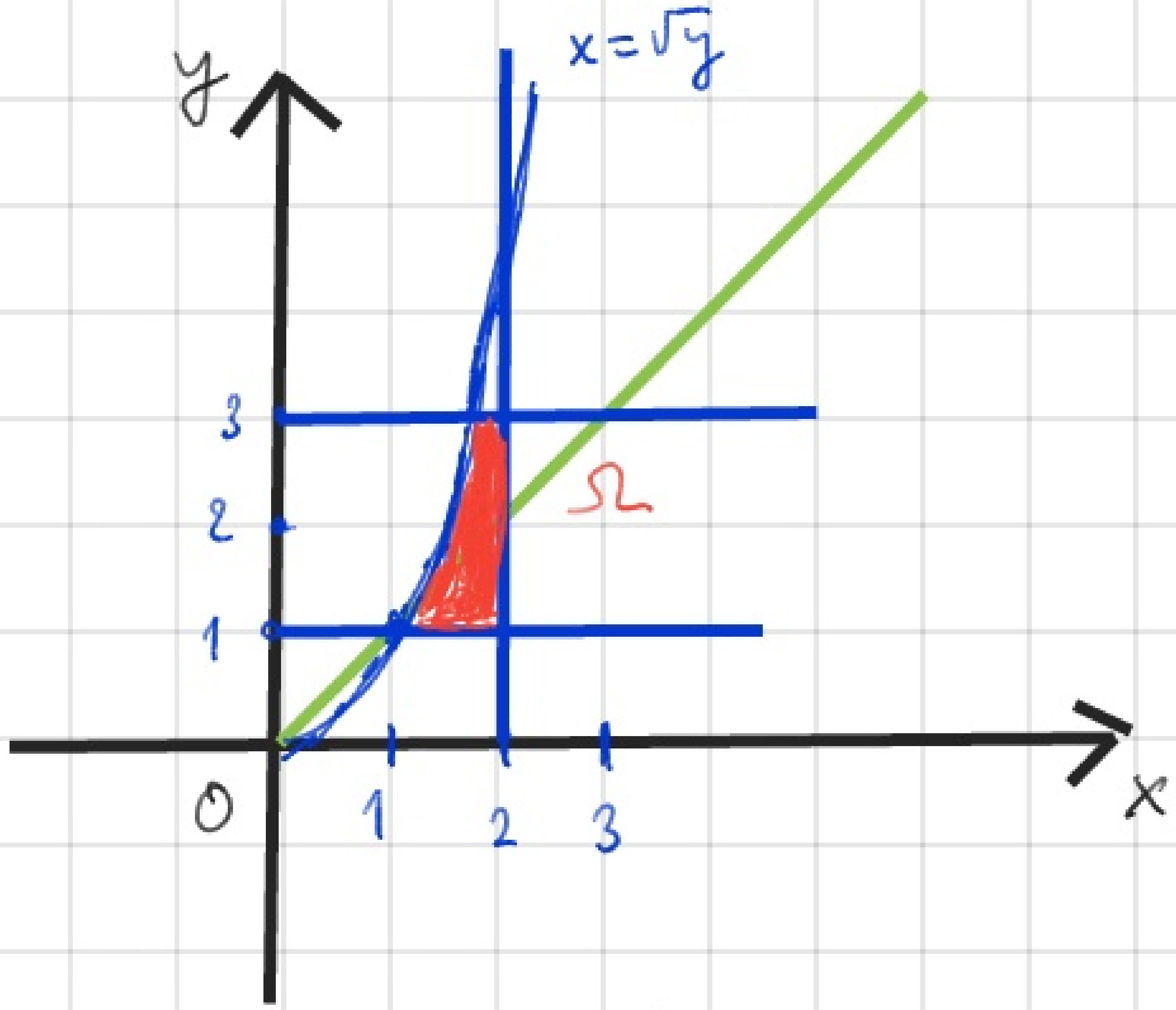
- 8 de mayo. Fecha tope de publicación modificaciones sistemas de evaluación y nuevo calendario de exámenes.
- 5 de junio. Fin periodo lectivo.

Plaza Cronista Isidoro Valverde, s/n
Edificio La Milagrosa
30202 Cartagena
Tel.: 968 35 5712
www.upct.es

- 6 junio - 31 julio. Periodo de evaluación convocatoria Julio 2020, exceptuado el periodo del 6 al 8 de julio, ambos inclusive.
- 6 - 8 de julio. EBAU
- 7 de agosto. Cierre de actas convocatoria Julio 2020.
- 1 – 19 de septiembre. Periodo de exámenes convocatoria de septiembre 2020.
- 21 de septiembre. Inicio ordinario periodo lectivo curso 2020-2021.
- 25 de septiembre. Cierre de actas convocatoria septiembre 2020
- 30 de noviembre. Fecha tope finalización prácticas externas.
- 10 de diciembre. Fecha tope depósito TFE.
- 21 de diciembre. Fecha tope cierre actas TFE.

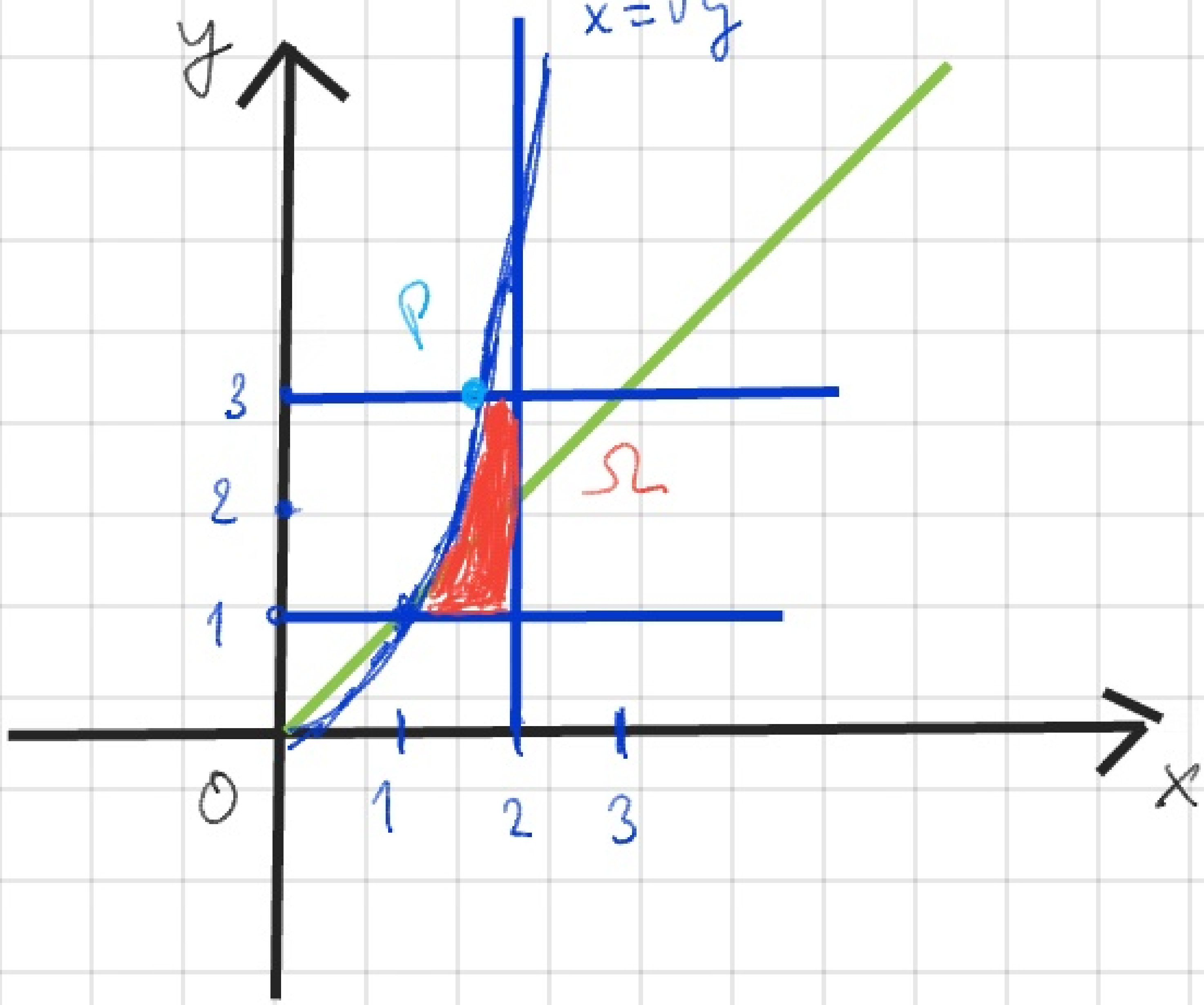
(8) Invertir el orden de integración en

$$I = \int_1^3 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\, dx \; dy$$



El recinto de integración es

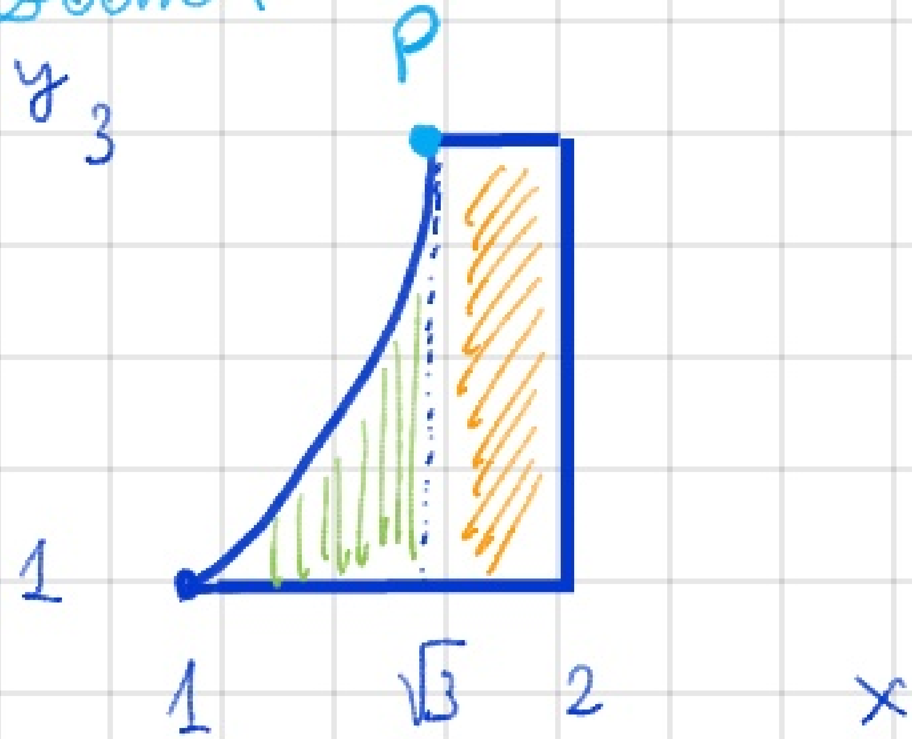
$$\Omega = \{ (x,y) \text{ tq } 1 \leq y \leq 3 , \sqrt{y} \leq x \leq 2 \}$$

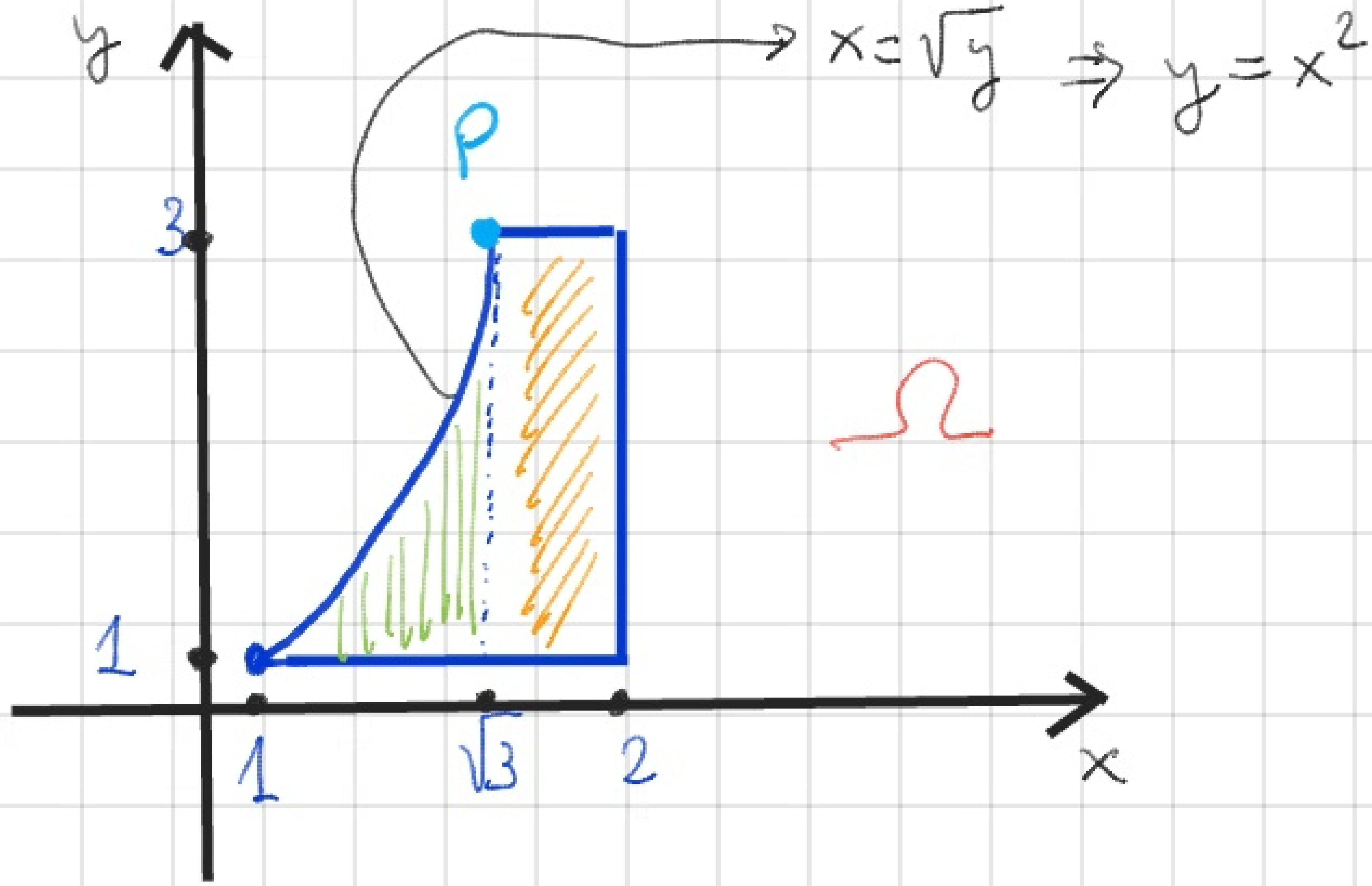


P es la intersección de $x=\sqrt{y}$ con $y=3$

así que P es $(\sqrt{3}, 3)$

Hacemos zoom:



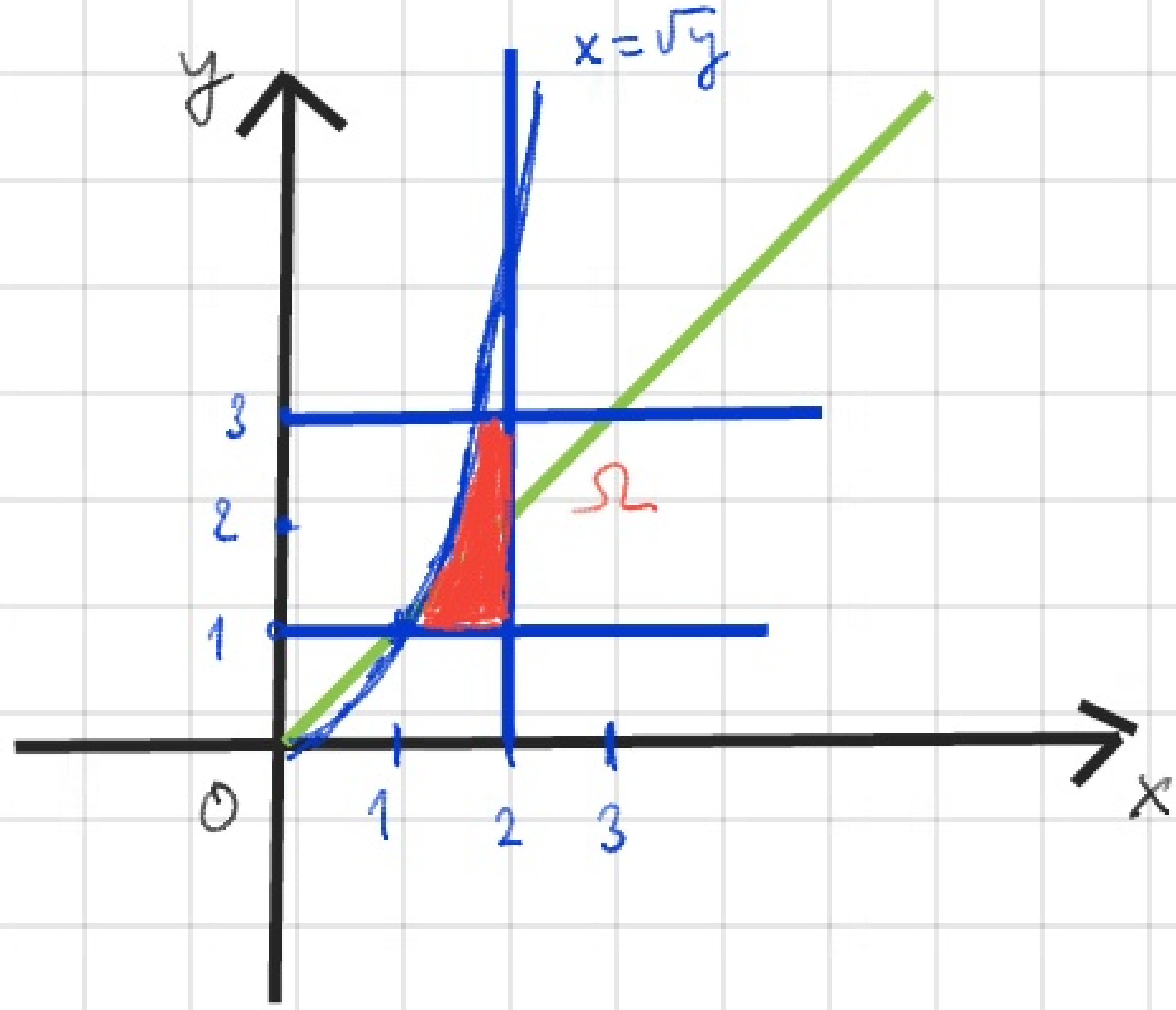


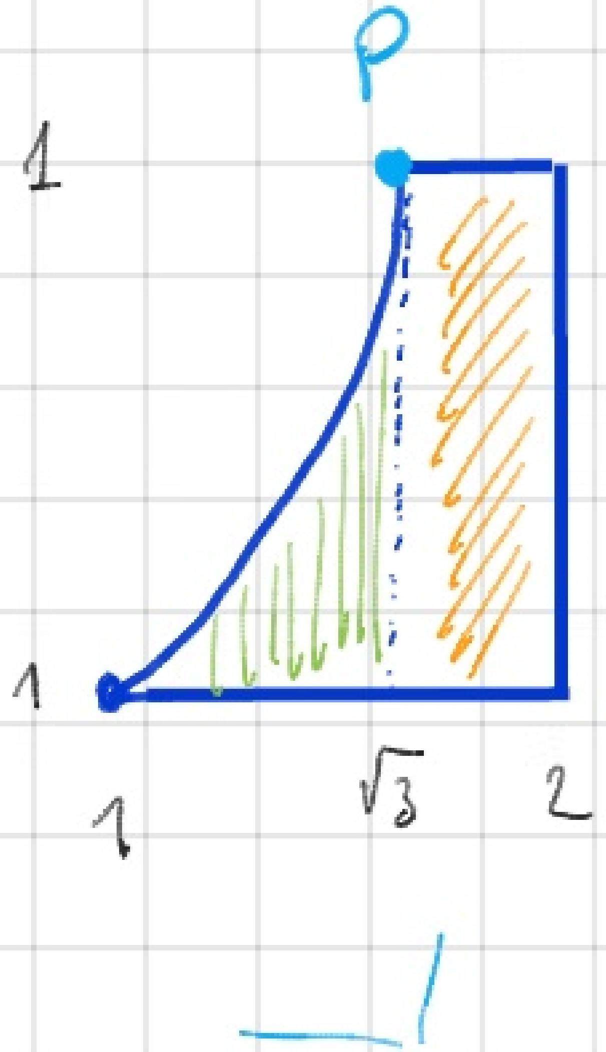
$$\Omega = \{(x,y) \text{ tq } 1 \le x \le \sqrt{3},\ 1 \le y \le x^2\}$$

$$\cup \{(x,y) \text{ tq } \sqrt{3} \le x \le 2,\ 1 \le y \le 3\}$$

$$I \int_1^3 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^{\sqrt{3}} \int_1^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx$$

$$+ \int_{\sqrt{3}}^2 \int_1^3 f(x,y)\,dy\,dx$$





Calculemos el área de Ω

$$A(\Omega)=\iint_\Omega 1\,dx\,dy=\int_1^3\int_{\sqrt{y}}^2 1\quad dx\,dy$$

$$=\int_1^3\left[x\right]_{x=\sqrt{y}}^{x=2}dy=\int_1^3 2-\sqrt{y}\,dy=$$

$$=\left[2y-\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_{y=1}^{y=3}=6-\frac{2}{3}\,3^{3/2}-2+\frac{2}{3}\cdot 1^{3/2}$$

$$=4-2\sqrt{3}+\frac{2}{3}=\frac{14}{3}-2\sqrt{3}$$

$$\int_1^3 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^{\sqrt{3}} \int_1^{x^2} f(x,y)\,dy\,dx$$

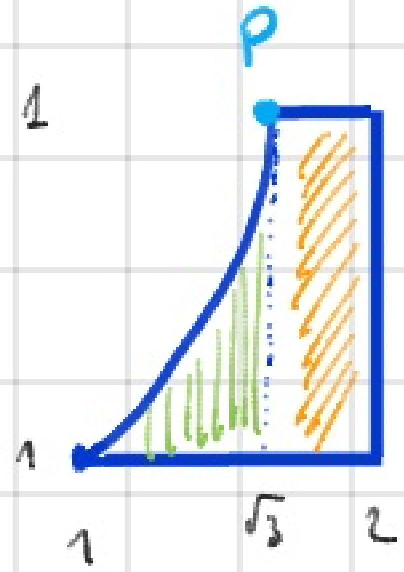
$$+ \int_{\sqrt{3}}^2 \int_1^3 f(x,y)\,dy\,dx$$

$$A(\Omega) = \int_1^{\sqrt{3}} \int_1^{x^2} 1\,dy\,dx + \boxed{\int_{\sqrt{3}}^2 \int_1^3 1\,dy\,dx} =$$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} (x^2-1)\,dx + \int_{\sqrt{3}}^2 2\,dy = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{x=1}^{x=\sqrt{3}} + \underbrace{2(2-\sqrt{3})}_{\text{A. rectángulo}}$$

$$= \frac{3^{3/2}}{3} - \sqrt{3} - \frac{1}{3} + 1 + 4 - 2\sqrt{3} =$$

$$= \cancel{3^{1/2}} - \cancel{\sqrt{3}} + \frac{14}{3} - 2\sqrt{3} = \frac{14}{3} - 2\sqrt{3}$$



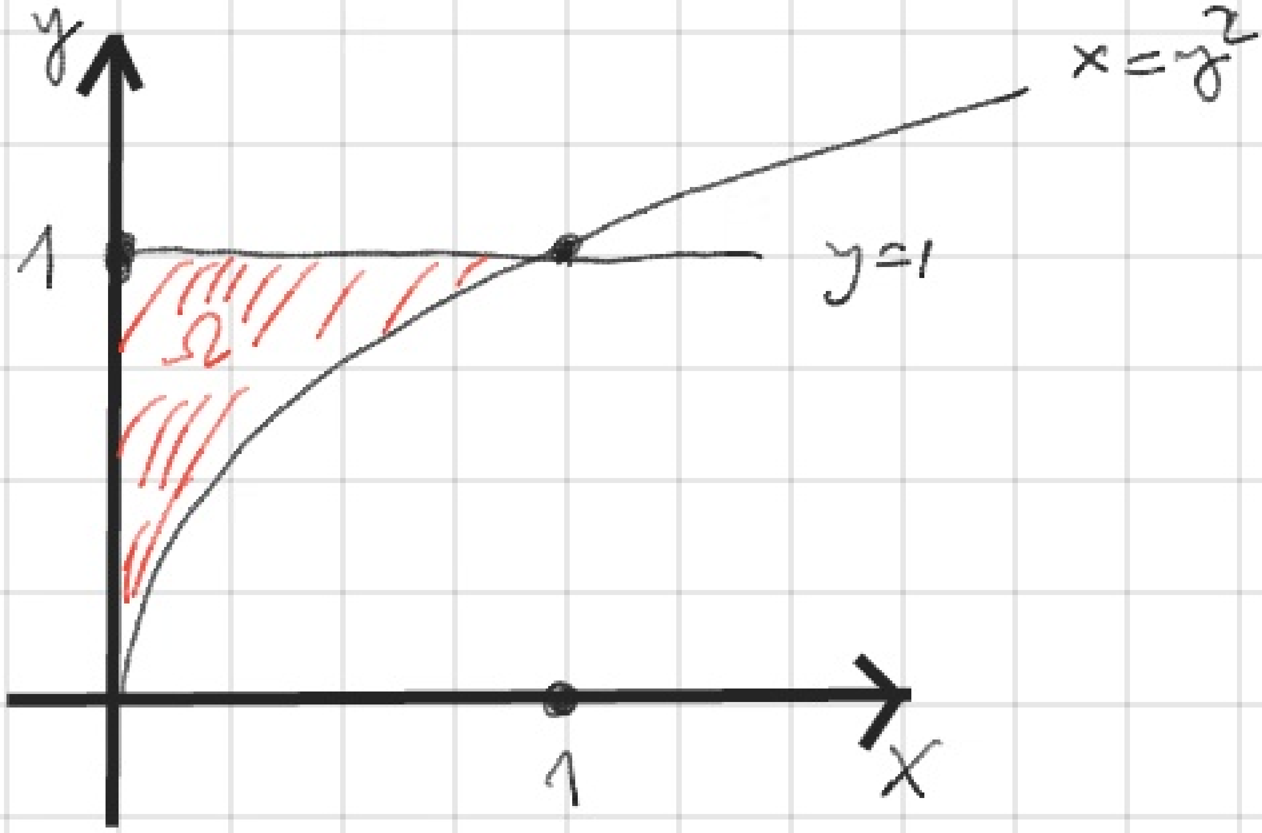
10, 2

d) $\Omega = \{(x,y):\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y^2\}$

$$\iint_\Omega y e^x \,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} y e^x \,dx \right) dy = \int_0^1 y \left[e^x \right]_{x=0}^{x=y^2} dy$$

$$= \int_0^1 y \left(e^{y^2} - e^0 \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 2y\, e^{y^2} dy - \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{2} \left[e^{y^2} \right]_{y=0}^{y=1} - \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1}$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^1 - 1 \right) - \frac{1}{2} = \frac{e}{2} - 1$$



10.2

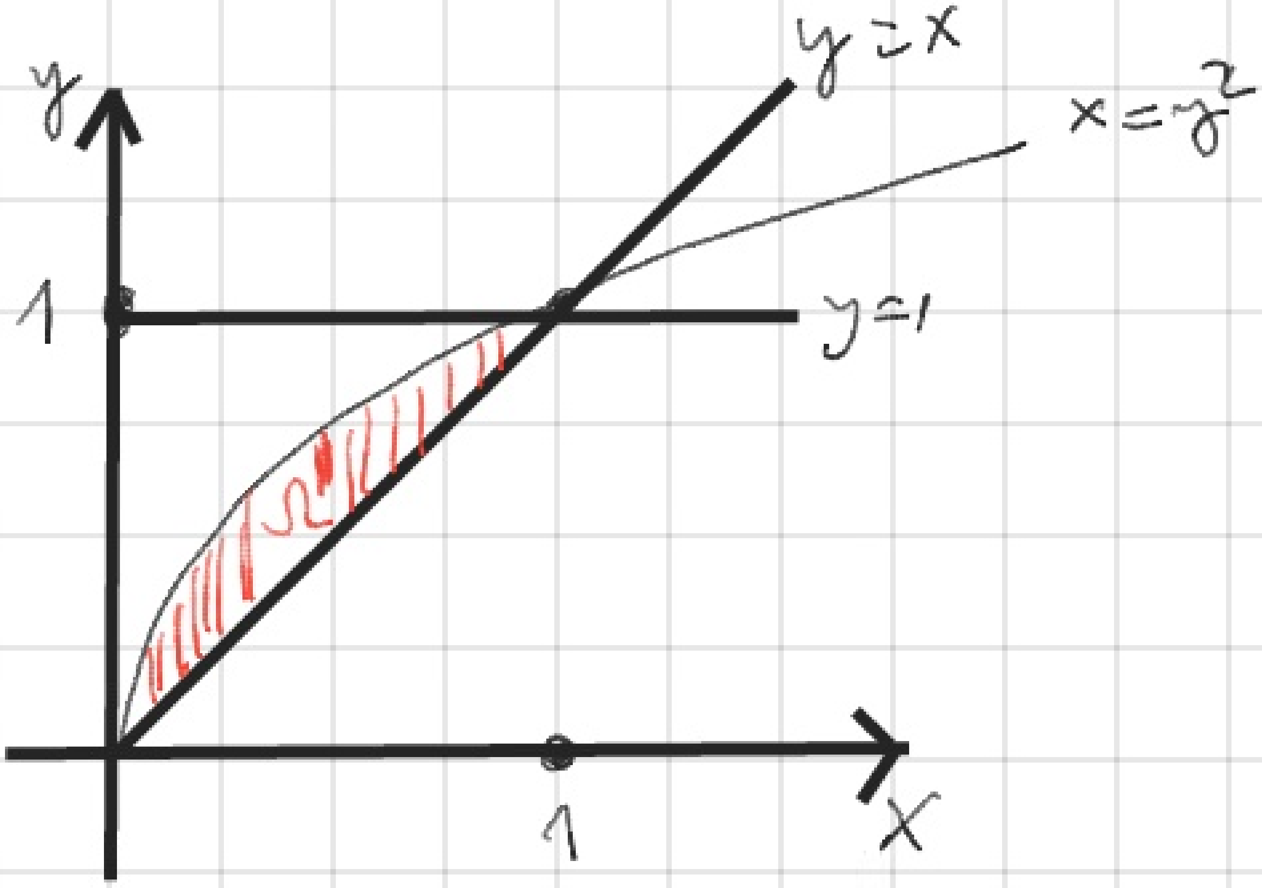
c) $\iint_\Omega \sqrt{xy}\,dx\,dy \qquad \Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 0\le y\le 1,\ y^2\le x\le y\}$

$\parallel$

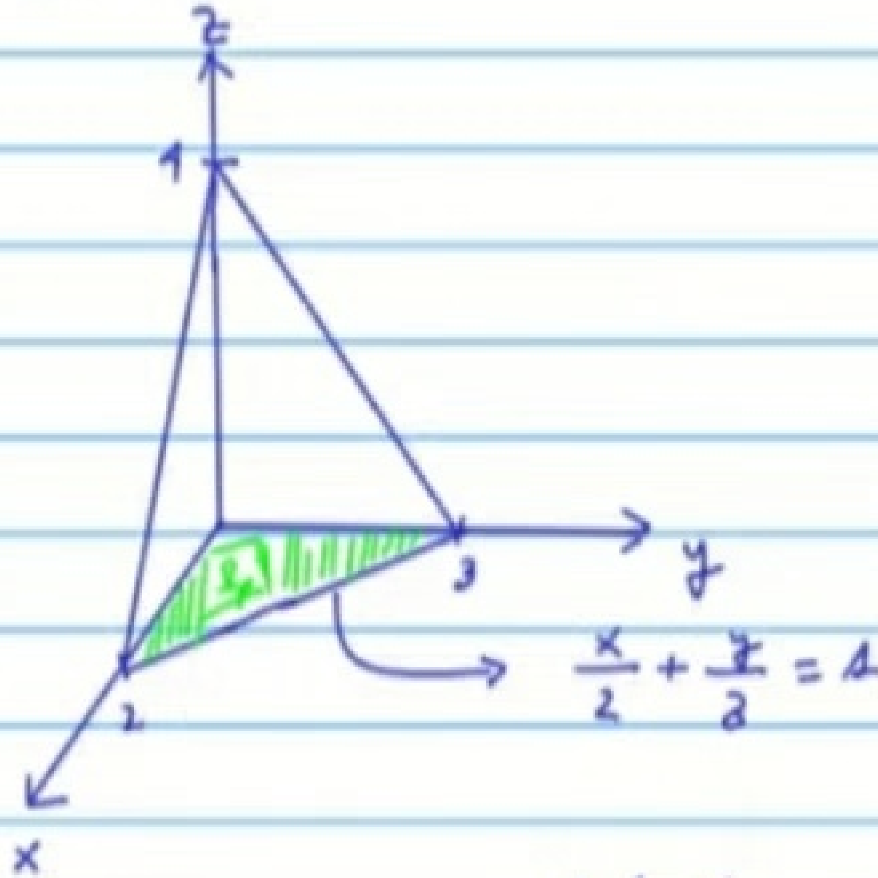
$\int_0^1\left(\int_{y^2}^{y}\sqrt{xy}\,dx\right)dy = \int_0^1\sqrt{y}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_{x=y^2}^{x=y}dy =$

$= \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{y}\quad\left(y^{3/2}-y^3\right)dy = \frac{2}{3}\int_0^1\left(y^2-y^{7/2}\right)dy = \frac{2}{3}\left[\frac{y^3}{3}-\frac{y^{9/2}}{9/2}\right]_{y=0}^{y=1}$

$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{9}\right) = \frac{2}{3}\ \frac{1}{9} = \frac{2}{27}$



10.5.a Ω: volumen limitado por $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ y planos coordenados



$$V=\iint_{R_p} 4\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)dx\,dy = 4\int_0^2\left(\int_0^{3\left(1-\frac{x}{2}\right)}\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)dy\right)dx$$

ok

$$=4\int_0^2\left[\left(1-\frac{x}{2}\right)3\left(1-\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{6}\,9\left(1-\frac{x}{2}\right)^2\right]dx$$

$$=4\left[\cancel{+3}\,\frac{(1-x/2)^{\cancel{2}\,3}}{\cancel{3}\,\cancel{2}\,\frac{-1}{2}}+\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\,\frac{(1-x/2)^3}{\frac{-1}{2}\,\cancel{3}}\right]_{x=0}^{x=2}=$$

$$=4\left[0-\left(\frac{-3}{2}+\frac{1}{2}\right)\right]=4$$

$$4\,(-1)\left[\left(1-\frac{x}{2}\right)^3\right]_{x=0}^{x=2}$$

CORREGIDO.

CORREGIDO

$$V = \iint_{\Omega_p} 4\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)dx\,dy = 4\int_0^2\int_0^{3\left(1-\frac{x}{2}\right)}\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)dy\,dx$$

$$= 4\int_0^2 \left(1-\frac{x}{2}\right)3\left(1-\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{3}\frac{1}{2}\,9\left(1-\frac{x}{2}\right)^2 dx$$

$$= 4\int_0^2 3\left(1-\frac{x}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= 4\int_0^2 \frac{3}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^2 dx = 4\left[\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\,\frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)^3}{\frac{-1}{\cancel{2}}\,\cancel{3}}\right]_{x=0}^{x=2}$$

$$= -4\left[\left(1-\frac{x}{2}\right)^3\right]_{x=0}^{x=2} = -4\left(0-(-1)\right)$$

$= 4$ unidades de volumen

5. Cálculo de integrales dobles mediante cambio de variables

Teorema 2.17. *Sea Ω un subconjunto abierto y básico de $\mathbb{R}^2$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función integrable. Sea Δ un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbf{\Phi} : \Delta \to \mathbb{R}^2$ una función tal que:*

1. $\mathbf{\Phi}(\Delta) = \Omega$,

2. $\mathbf{\Phi}$ *es diferenciable en* Δ *y*

3. $\det(J(\mathbf{\Phi}(u,v))) \neq 0$ *para todo* $(u,v) \in \Delta$.

Entonces, se verifica que Δ *es un abierto básico y:*

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Delta} f(\mathbf{\Phi}(u,v))\,\det(J(\mathbf{\Phi}(u,v)))\,du\,dv.$$

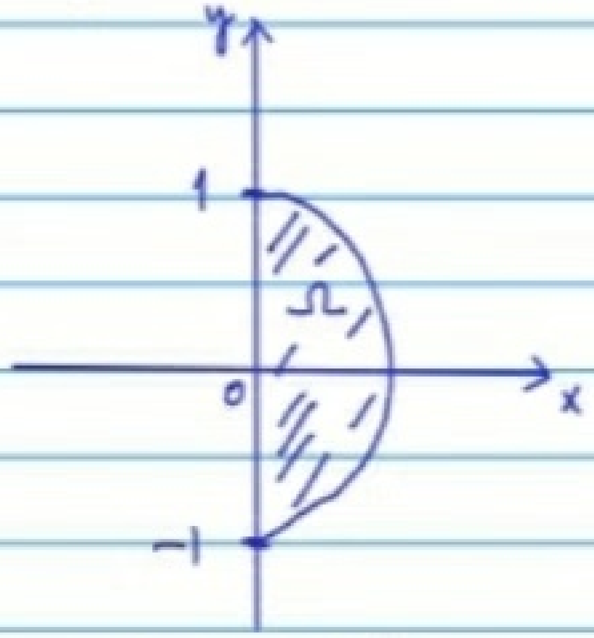
El cambio de variable que más emplearemos en $\mathbb{R}^2$ es el cambio a coordenadas polares, dado por:

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{\Phi}: & (0,+\infty)\times(0,2\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \to & (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta). \end{array}$$

Además $|J\mathbf{\Phi}(r,\theta)| = r$.

10.6.a $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = I$

Recinto en el que estamos integrando:

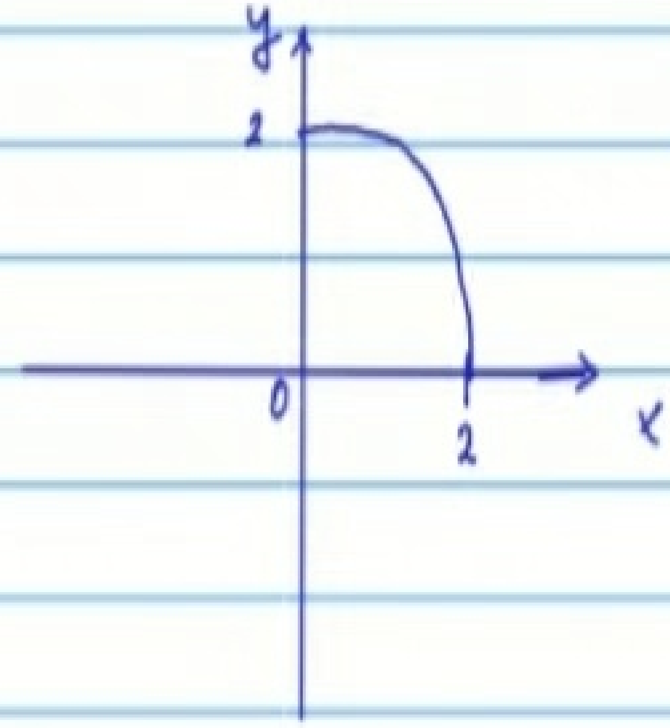


El recinto en coordenadas polares:

$$\Omega_p = \left\{ (r,\theta) ,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} ,\ 0 < r < 1 \right\}$$

$$I = \int_0^1 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\, r \right) d\theta\, dr = \int_0^1 r^2 \pi\, dr = \frac{\pi}{3}$$

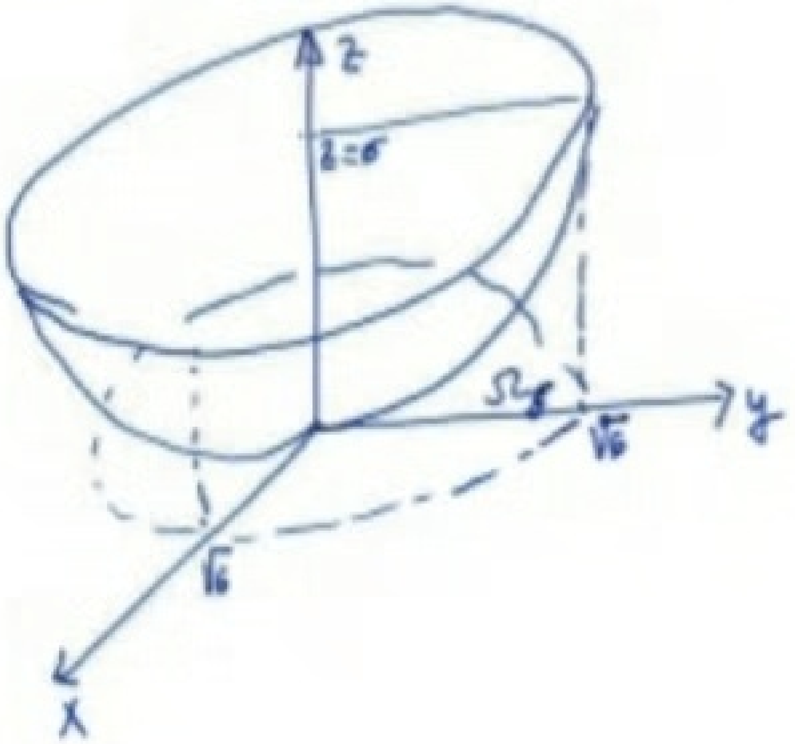
10.6.b $I = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx$



$\Omega_p = \{(r,\theta) : 0<\theta<\frac{\pi}{2}, 0<r<2\}$

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^2\, dr\, d\theta = \frac{8}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{4}{3}\pi$$

(19) Volumen limitado por $z=6$ y $z=x^2+y^2$



$$\Omega_{S,P} = \{(r,\theta),\ 0 \le r \le \sqrt{6},\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

$$V = \iint_{\Omega_S} 6 - x^2 - y^2 \, dx\,dy = \int_0^{\sqrt{6}} \int_0^{2\pi} (6-r^2) r \, d\theta \, dr =$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{6}} 6r - r^3 \, dr = 2\pi \left[3r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{6}} = 2\pi \cdot \left(18 - \frac{36}{4} \right) \approx 56{,}5487$$

- Tamaño mayor de 20 Mb
  We transfer

- Transformer jpg en pdf

  * Adobe Scan
  * Clear Scaner.