1

C.1.

Ejercicios de números complejos

Dados los números complejos $z = 6\,i + 6$ y $w = 2\,3^{\frac{3}{2}}\,i + 6$, responde a las siguientes
números complejos.

$\boxed{1}$.

Calcula el valor de $\dfrac{i\left(64\,3^{\frac{9}{2}} + w^2 z^2\right)}{4}$

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) 1297
2) 1298
3) 1293
4) 1296
5) 1291
6) 1290

$\boxed{2}$.

Calcula el número complejo $(-w + z)\,(w + z)$.

Entregable nº 1, 1er cuatrimestre

$$z = 6+6i \qquad w = z\cdot 3^{3/2} i + 6$$

Calcular $$\frac{i\,(64\cdot 3^{9/2} + w^2 z^2)}{4}$$

SOLUCIÓN

$$z^2 w^2 = (z\,w)^2 = \left[36 - 12\cdot 3^{3/2} + i\left(12\cdot 3^{3/2} + 36\right)\right]^2$$

$$= \left[36 - 36\sqrt{3} + i\,(36\sqrt{3} + 36)\right]^2 =$$

$$= 36^2\left[1 - \sqrt{3} + i\,(1+\sqrt{3})\right]^2 =$$

$$= 36^2\left[(1-\sqrt{3})^2 - (1+\sqrt{3})^2 + 2i(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})\right]$$

$$= 36^2\left[1+3 - 2\sqrt{3} - 1 - 3 - 2\sqrt{3} + 2i\,(1-3)\right]$$

$$= 36^2\left[-4\sqrt{3} - 4i\right] = -36^2\cdot 4\left[\sqrt{3}+i\right]$$

$$= -72^2\left(\sqrt{3}+i\right)$$

Ahora:

$$\frac{i}{4}\left(64\, 3^{9/2} + w^2 z^2\right) =$$

$$= \frac{i}{4}\left(64\cdot 3^{9/2} - 72^2\left(\sqrt{3}+i\right)\right) =$$

$$= \frac{i}{4}\cdot 4\left(16\cdot 3^{9/2} - 36^2\sqrt{3} - 36^2 i\right)$$

$$= i\left(\underbrace{16\cdot 3^4}\cdot 3^{1/2} - 36^2\sqrt{3} - 36^2 i\right)$$

$$= i\left(36^2\cdot 3^{1/2} - 36^2\sqrt{3} - 36^2 i\right)$$

$$= 36^2 i\left(\cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{3}} - i\right)$$

$$= 36^2 = 1296$$

4

C.1.

$\boxed{4}$.

Calcula $z_1 = \dfrac{(7-i)\,(3+7\,i)}{7\,i\,(3+2\,i)}$

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\frac{173}{91} - \frac{176\,i}{91}$
2) $\frac{264}{91} - \frac{176\,i}{91}$
3) $\frac{355}{91} - \frac{176\,i}{91}$
4) $\frac{446}{91} - \frac{176\,i}{91}$
5) $-\frac{373}{91} - \frac{176\,i}{91}$
6) $\frac{82}{91} - \frac{176\,i}{91}$

$\boxed{5}$. Calcula $z_2 = \dfrac{10\,(-i)^{259} + 7\,i^{39} + 2i - 11}{7+7\,i}$

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\frac{4}{7} + \frac{8\,i}{7}$
2) $\frac{11}{7} + \frac{8\,i}{7}$
3) $-\frac{24}{7} + \frac{8\,i}{7}$
4) $\frac{25}{7} + \frac{8\,i}{7}$
5) $-\frac{3}{7} + \frac{8\,i}{7}$
6) $\frac{39}{7} + \frac{8\,i}{7}$

Ejercicio nº 4

$$z_1 = \frac{(7-i)\,(3+7i)}{7i\,(3+2i)}$$

$$z_1 = \frac{21+7+i(49-3)}{21i-14} = \frac{28+46i}{-14+21i} =$$

$$= \frac{2}{7}\;\frac{14+23i}{-2+3i} = \frac{2}{7}\;\frac{(14+23i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)}$$

$$= \frac{2}{7}\;\frac{(-28+69)+i(-46-42)}{(4+9)+i(-6+6)} =$$

$$= \frac{2}{7\cdot 13}\,(41-88i) = \frac{82}{91} - \frac{176}{91}\,i$$

5

C.1.

$\boxed{4}$.

Calcula $z_1 = \dfrac{(7-i)\ (3+7\,i)}{7\,i\ (3+2\,i)}$

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\frac{173}{91} - \frac{176\,i}{91}$
2) $\frac{264}{91} - \frac{176\,i}{91}$
3) $\frac{355}{91} - \frac{176\,i}{91}$
4) $\frac{446}{91} - \frac{176\,i}{91}$
5) $-\frac{373}{91} - \frac{176\,i}{91}$
6) $\frac{82}{91} - \frac{176\,i}{91}$

$\boxed{5}$. Calcula $z_2 = \dfrac{10\,(-i)^{259} + 7\,i^{39} + 2i - 11}{7+7\,i}$

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\frac{4}{7} + \frac{8\,i}{7}$
2) $\frac{11}{7} + \frac{8\,i}{7}$
3) $-\frac{24}{7} + \frac{8\,i}{7}$
4) $\frac{25}{7} + \frac{8\,i}{7}$
5) $-\frac{3}{7} + \frac{8\,i}{7}$
6) $\frac{39}{7} + \frac{8\,i}{7}$

5

$$\frac{10(-i)^{259}+7i^{39}+2i-11}{7+7i} = z_2$$

$$259 \,\lfloor\, 4 \qquad 19 \qquad 64 \qquad 3$$

$$39 \,\lfloor\, 4 \qquad 3 \qquad 9$$

$$z_2 = \frac{10(-i)^{64\cdot 4+3}+7i^{4\cdot 9+3}+2i-11}{7(1+i)} =$$

$$= \frac{10(-i)^3+7i^3+2i-11}{7(1+i)} = \frac{+10i-7i+2i-11}{7(1+i)} =$$

$$= \frac{(-11+5i)(1-i)}{7(1+i)(1-i)} = \frac{(-11+5)+i(+11+5)}{7(1+1)}$$

$$= \frac{-6+16i}{7\cdot 2} = \underline{\frac{-3}{7}+\frac{8}{7}i}$$

6

C.1.

$\boxed{\mathbf{6}}$.

Usa el binomio de Newton para calcular el complejo $z_3 = (7 + 3\,i)^3$

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $155 + 414\,i$	3) $151 + 414\,i$	5) $159 + 414\,i$
2) $154 + 414\,i$	4) $150 + 414\,i$	6) $160 + 414\,i$

⑥ Calcula $(7+3i)^3$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^0 b^3 + \binom{3}{1} a^1 b^2 + \binom{3}{2} a^2 b +$$

$$+ \binom{3}{3} a^3 b^0 = b^3 + 3ab^2 + 3a^2 b +$$

$$+ a^3$$

Así que:

$$(7+3i)^3 = (3i)^3 + 3 \cdot 7 \cdot (3i)^2 + 3 \cdot 7^2 \, 3i +$$

$$+ 7^3 = -27i - 189 + 441i + 343$$

$$= 154 + 414i$$

8

C.1.

$\boxed{8}$.

Calcula $z_5 = \sqrt[9]{14\sqrt{3} - 14\,i}$.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $2^{\frac{10}{9}}\, 14^{\frac{1}{9}}\, e^{\frac{4\,i\,\pi}{27}}$

2) $2^{\frac{19}{9}}\, 14^{\frac{1}{9}}\, e^{\frac{17\,i\,\pi}{54}}$

3) $2^{\frac{28}{9}}\, 14^{\frac{1}{9}}\, e^{\frac{13\,i\,\pi}{27}}$

4) $2^{\frac{1}{9}}\, 14^{\frac{1}{9}}\, e^{-\frac{i\,\pi}{54}}$

5) $2^{\frac{46}{9}}\, 14^{\frac{1}{9}}\, e^{\frac{22\,i\,\pi}{27}}$

6) $2^{\frac{55}{9}}\, 14^{\frac{1}{9}}\, e^{\frac{53\,i\,\pi}{54}}$

Ejercicios de factorización de polinomios

Factoriza (dejando claros todos los cálculos que hagas) los polinomios:

$\boxed{9}$.

$$p(x) = x^4 + 2401$$

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\left(64 - 7\sqrt{2}\,x + x^2\right)\left(64 + 7\sqrt{2}\,x + x^2\right)$

2) $\left(49 - 7\sqrt{2}\,x + x^2\right)\left(49 + 7\sqrt{2}\,x + x^2\right)$

3) $\left(100 - 7\sqrt{2}\,x + x^2\right)\left(100 + 7\sqrt{2}\,x + x^2\right)$

4) $\left(121 - 7\sqrt{2}\,x + x^2\right)\left(121 + 7\sqrt{2}\,x + x^2\right)$

5) $\left(144 - 7\sqrt{2}\,x + x^2\right)\left(144 + 7\sqrt{2}\,x + x^2\right)$

6) $\left(169 - 7\sqrt{2}\,x + x^2\right)\left(169 + 7\sqrt{2}\,x + x^2\right)$

8

$$z_5 = \sqrt[9]{\underbrace{14\sqrt{3} - 14i}_{u}}$$

$$|u| = \sqrt{14^2 \cdot 3 + 14^2} = \sqrt{14^2 \cdot 4} = 2 \cdot 14$$

$$\theta_u = \operatorname{arctg}\left(\frac{-14}{14\sqrt{3}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{cases} -\pi/6 \\ -\pi/6 + \pi = \cancel{\frac{5\pi}{6}} \end{cases}$$

$$z_5 = \left[2 \cdot 14\, e^{i\left(\frac{-\pi}{6} + 2k\pi\right)}\right]^{1/9} \overset{*}{=}$$

$$\overset{*}{=} 2^{1/9}\, 14^{1/9} + e^{i\left(-\frac{\pi}{54} + \frac{2}{9}\pi k\right)}$$

Dando valores de k entre 0 y 8 obtenemos las 9 raíces aunque tenemos que detectar una de ellas que coincida con las soluciones propuestas.

Tomamos $k=0$ y:

$$z_5 = 2^{1/9} 14^{1/9} e^{-i\frac{\pi}{54}}$$, que coincide con la solución nº 4

9

C.1.

$\boxed{8}$.

Calcula $z_5 = \sqrt[9]{14\sqrt{3} - 14\,i}$.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $2^{\frac{10}{9}}\, 14^{\frac{1}{9}}\, e^{\frac{4\,i\,\pi}{27}}$
2) $2^{\frac{19}{9}}\, 14^{\frac{1}{9}}\, e^{\frac{17\,i\,\pi}{54}}$
3) $2^{\frac{28}{9}}\, 14^{\frac{1}{9}}\, e^{\frac{13\,i\,\pi}{27}}$
4) $2^{\frac{1}{9}}\, 14^{\frac{1}{9}}\, e^{-\frac{i\,\pi}{54}}$
5) $2^{\frac{46}{9}}\, 14^{\frac{1}{9}}\, e^{\frac{22\,i\,\pi}{27}}$
6) $2^{\frac{55}{9}}\, 14^{\frac{1}{9}}\, e^{\frac{53\,i\,\pi}{54}}$

Ejercicios de factorización de polinomios

Factoriza (dejando claros todos los cálculos que hagas) los polinomios:

$\boxed{9}$.

$$p(x) = x^4 + 2401$$

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\left(64 - 7\sqrt{2}\,x + x^2\right)\left(64 + 7\sqrt{2}\,x + x^2\right)$
2) $\left(49 - 7\sqrt{2}\,x + x^2\right)\left(49 + 7\sqrt{2}\,x + x^2\right)$
3) $\left(100 - 7\sqrt{2}\,x + x^2\right)\left(100 + 7\sqrt{2}\,x + x^2\right)$
4) $\left(121 - 7\sqrt{2}\,x + x^2\right)\left(121 + 7\sqrt{2}\,x + x^2\right)$
5) $\left(144 - 7\sqrt{2}\,x + x^2\right)\left(144 + 7\sqrt{2}\,x + x^2\right)$
6) $\left(169 - 7\sqrt{2}\,x + x^2\right)\left(169 + 7\sqrt{2}\,x + x^2\right)$

9) Factorizar $p(x) = x^4 + 2401$

Para factorizar el polinomio tenemos que calcular sus raíces:

$$x^4 + 2401 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 = -2401 = -7^4$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[4]{-7^4} = \sqrt[4]{-1}\,\sqrt[4]{7^4} =$$

$$= 7\sqrt[4]{-1}$$

Buscamos las raíces cuartas de $-1 = e^{i(\pi + 2k\pi)}$

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{e^{i(\pi+2k\pi)}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\frac{\pi}{4}\right)}$$

Tomamos valores $K = 0, 1, 2, 3$ y obtenemos como raíces de -1:

$$x_0 = e^{i\pi/4}$$

$$x_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$x_2 = e^{i5\pi/4} = \overline{x_1} = e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

$$x_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \overline{x_0} = e^{-i\pi/4}$$

Así que las raíces del polinomio del principio son:

$$u_0 = 7e^{i\pi/4}, \quad \overline{u}_0$$
$$u_1 = 7e^{i3\pi/4}, \quad \overline{u}_1$$

y entonces:

$$p(x) = (x-u_0)(x-\overline{u}_0)(x-u_1)(x-\overline{u}_1)$$

$$= \left[x^2 - 2\,\mathrm{Real}(u_0)\,x + |u_0|^2\right] \cdot$$
$$\cdot \left[x^2 - 2\,\mathrm{Real}(u_1)\,x + |u_1|^2\right]$$
$$= \left(x^2 - 2\cdot 7\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)x + 7^2\right) \cdot$$
$$\left(x^2 - 2\cdot 7\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)x + 7^2\right)$$
$$= \left(x^2 - 7\sqrt{2}\,x + 49\right)\left(x^2 + 7\sqrt{2}\,x + 49\right)$$

14

C.1.

$\boxed{\mathbf{14}}$. Calcula la primitiva que sigue

$$\int e^x \operatorname{sen}(5\,x)\,dx$$

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\frac{e^x \operatorname{sen}(5\,x)}{104} - \frac{5\,e^x\,\cos(5\,x)}{104}$

2) $\frac{e^x \operatorname{sen}(5\,x)}{130} - \frac{e^x\,\cos(5\,x)}{26}$

3) $\frac{e^x \operatorname{sen}(5\,x)}{156} - \frac{5\,e^x\,\cos(5\,x)}{156}$

4) $\frac{e^x \operatorname{sen}(5\,x)}{182} - \frac{5\,e^x\,\cos(5\,x)}{182}$

5) $\frac{5\,e^x\,\cos(5\,x)}{208} - \frac{e^x \operatorname{sen}(5\,x)}{208}$

6) $\frac{e^x \operatorname{sen}(5\,x)}{26} - \frac{5\,e^x\,\cos(5\,x)}{26}$

14 $I = \int e^x \operatorname{sen}(5x)\, dx$

$u = e^x \rightarrow du = e^x\, dx$

$\operatorname{sen}(5x)\, dx = dv \rightarrow \frac{-1}{5} \cos(5x) = v$

$I = \frac{-1}{5} e^x \cos(5x) + \frac{1}{5} \int e^x \cos(5x)\, dx$

$u = e^x \rightarrow du = e^x\, dx$

$\cos(5x)\, dx = dv \rightarrow v = \frac{1}{5} \operatorname{sen}(5x)$

$I = \frac{-1}{5} e^x \cos(5x) + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} e^x \operatorname{sen}(5x) - \frac{1}{5} \int \operatorname{sen}(5x)\, e^x\, dx \right) \Rightarrow$

$I = \frac{-1}{5} e^x \cos(5x) + \frac{1}{25} e^x \operatorname{sen}(5x) + - \frac{1}{25} I \Rightarrow$

$$\frac{26}{25} I = \frac{-1}{5} e^x \cos(5x) + \frac{1}{25} e^x \operatorname{sen}(5x)$$

$$\Rightarrow I = \frac{-5}{26} e^x \cos(5x) + \frac{1}{26} e^x \operatorname{sen}(5x)$$

15

C.1.

$\boxed{\mathbf{14}}$. Calcula la primitiva que sigue

$$\int e^{7\,x}\,\mathrm{sen}\,(3\,x)\;dx$$

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\dfrac{7\,e^{7\,x}\,\mathrm{sen}(3\,x)}{232} - \dfrac{3\,e^{7\,x}\,\cos(3\,x)}{232}$
2) $\dfrac{3\,e^{7\,x}\,\cos(3\,x)}{290} - \dfrac{7\,e^{7\,x}\,\mathrm{sen}(3\,x)}{290}$
3) $\dfrac{7\,e^{7\,x}\,\mathrm{sen}(3\,x)}{348} - \dfrac{e^{7\,x}\,\cos(3\,x)}{116}$
4) $\dfrac{3\,e^{7\,x}\,\cos(3\,x)}{406} - \dfrac{e^{7\,x}\,\mathrm{sen}(3\,x)}{58}$
5) $\dfrac{7\,e^{7\,x}\,\mathrm{sen}(3\,x)}{58} - \dfrac{3\,e^{7\,x}\,\cos(3\,x)}{58}$
6) $\dfrac{7\,e^{7\,x}\,\mathrm{sen}(3\,x)}{522} - \dfrac{e^{7\,x}\,\cos(3\,x)}{174}$

$\boxed{\mathbf{15}}$. Calcula el área limitada por la función $f(x) = -\,(x-7)^{-1}\,(x-3)^{-1}$, $y = 0$, $x = 6$ y $x = 4$.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) -1.098612288668109
2) -0.82395921650108
3) -0.7324081924454
4) -0.41197960825054
5) -0.6591673732086
6) -0.54930614433405

$\boxed{\mathbf{16}}$. Calcula el área limitada por la funciones $f(x) = (x-19)\,(x-10)\,(x-7)$ y $g(x) = (x-10)\,(x-7)$.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) 1385.083333333333
2) 1384.883333333333
3) 1384.783333333333
4) 1384.683333333333
5) 1385.583333333333
6) 1384.483333333333

15) Área limitada por $x=6, x=4, y=0$ y $f(x) = -(x-7)^{-1}(x-3)^{-1}$

$$A = \int_4^6 \frac{-1}{(x-7)(x-3)}\,dx$$

$$\frac{-1}{(x-7)(x-3)} = \frac{A}{x-7} + \frac{B}{x-3} =$$

$$= \frac{A(x-3)+B(x-7)}{(x-7)(x-3)}$$

$\Rightarrow A(x-3)+B(x-7) = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (A+B)x - 3A - 7B = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A+B=0 \\ 3A+7B=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A=-B \Rightarrow$

$\Rightarrow 4B=1 \Rightarrow B=\frac{1}{4},\ A=\frac{-1}{4}$

$$A = \frac{-1}{4}\int_4^6 \frac{1}{x-7}\,dx + \frac{1}{4}\int_4^6 \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$= \frac{-1}{4}\left(\log|6-7| - \log|4-7|\right)$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\log|6-3| - \log|4-3|\right) =$$

$$= \frac{-1}{4}\left(\cancel{\log(1)}^{0} - \log(3) - \log(3) + \cancel{\log(1)}^{0}\right)$$

$$= \frac{+1}{4}\, 2\log(3) = \frac{+1}{2}\log(3) \simeq$$

$$0{,}5493061 \ldots\ldots$$

16

C.1.

$\boxed{\mathbf{14}}$. Calcula la primitiva que sigue

$$\int e^{7\,x}\,\mathrm{sen}\,(3\,x)\;dx$$

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\frac{7\,e^{7\,x}\,\mathrm{sen}(3\,x)}{232} - \frac{3\,e^{7\,x}\,\cos(3\,x)}{232}$

2) $\frac{3\,e^{7\,x}\,\cos(3\,x)}{290} - \frac{7\,e^{7\,x}\,\mathrm{sen}(3\,x)}{290}$

3) $\frac{7\,e^{7\,x}\,\mathrm{sen}(3\,x)}{348} - \frac{e^{7\,x}\,\cos(3\,x)}{116}$

4) $\frac{3\,e^{7\,x}\,\cos(3\,x)}{406} - \frac{e^{7\,x}\,\mathrm{sen}(3\,x)}{58}$

5) $\frac{7\,e^{7\,x}\,\mathrm{sen}(3\,x)}{58} - \frac{3\,e^{7\,x}\,\cos(3\,x)}{58}$

6) $\frac{7\,e^{7\,x}\,\mathrm{sen}(3\,x)}{522} - \frac{e^{7\,x}\,\cos(3\,x)}{174}$

$\boxed{\mathbf{15}}$. Calcula el área limitada por la función $f(x) = -\,(x-7)^{-1}\,(x-3)^{-1}$, $y=0$, $x=6$ y $x=4$.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $-1.09861228866810\,9$

2) -0.82395921650108

3) -0.7324081924454

4) -0.41197960825054

5) $-0.6591673732008\,6$

6) -0.54930614433405

$\boxed{\mathbf{16}}$. Calcula el área limitada por la funciones $f(x) = (x-19)\,(x-10)\,(x-7)$ y $g(x) = (x-10)\,(x-7)$.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) 1385.08333333333

2) 1384.88333333333

3) 1384.78333333333

4) 1384.68333333333

5) 1385.58333333333

6) 1384.48333333333

16) Área limitada por $f(x)=(x-19)(x-10)(x-7)$ y $g(x)=(x-10)(x-7)$.

1º) Estudiamos los puntos de corte de f y g para ver quién va por encima en cada momento

$$f(x)=g(x) \Rightarrow (x-19)(x-10)(x-7)=(x-10)(x-7)$$

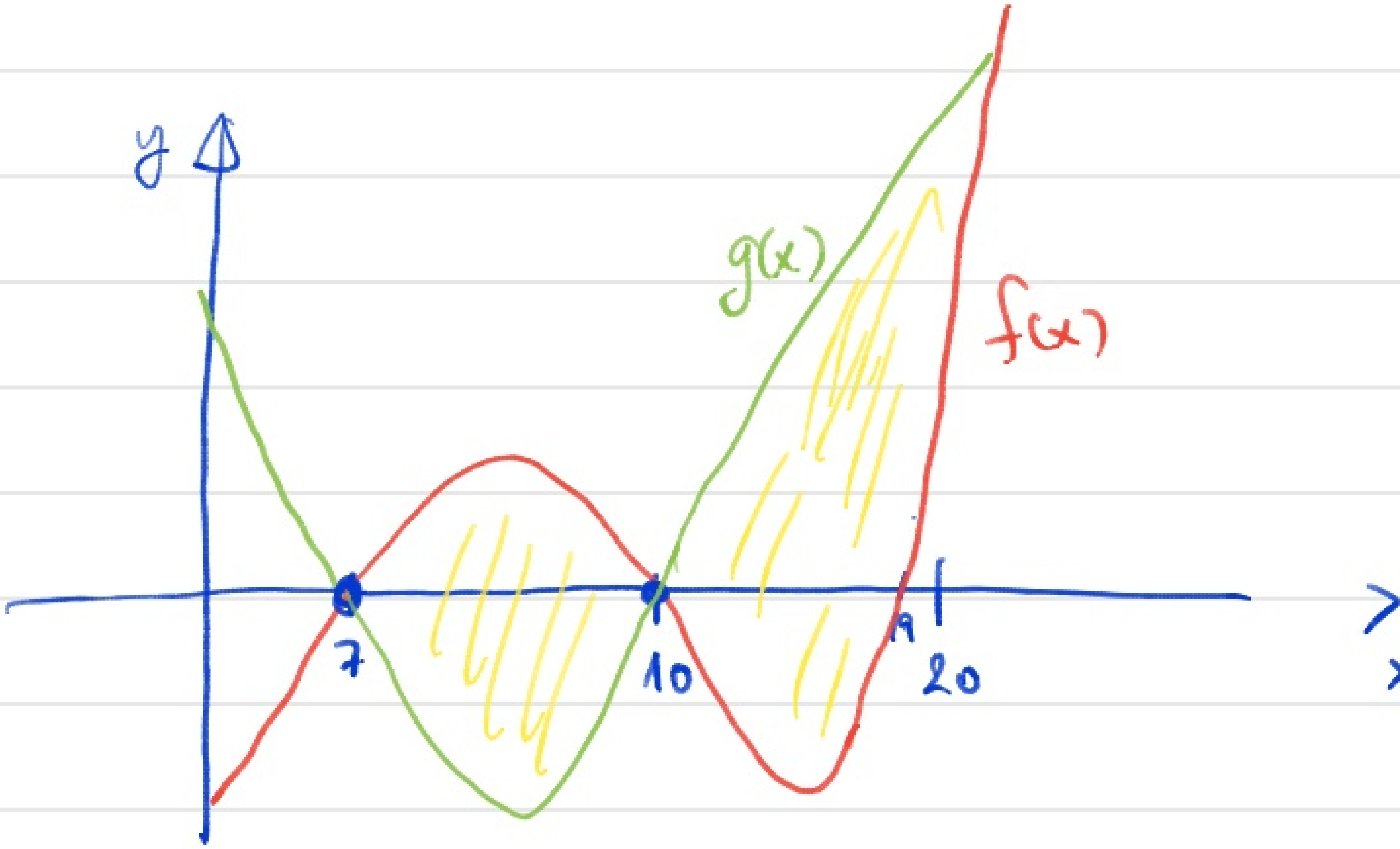
$$\Rightarrow (x-19)\underbrace{(x-10)(x-7)} - \underbrace{(x-10)(x-7)} = 0$$

$$\Rightarrow (x-19-1)(x-10)(x-7)=0$$

$$\Rightarrow (x-20)(x-10)(x-7)=0$$

$$\Rightarrow x=20, \quad x=10 \quad ó \quad x=7$$

Así que las funciones f y g se cortan en los tres puntos anteriores: 20, 10 y 7 y estamos en la siguiente situación:



El área que se quiere calcular está dibujada en amarillo.

$$A = \int_7^{10} \left(f(x) - g(x)\right) dx + \int_{10}^{20} \left(g(x) - f(x)\right) dx$$

$$= \int_7^{10} (x-10)(x-7)(x-20)\, dx - \int_{10}^{20} (x-10)(x-7)(x-20)\, dx$$

$$= \int_7^{10} x^3 - 37x^2 + 410x - 1400 \, dx$$

$$- \int_{10}^{20} x^3 - 37x^2 + 410x - 1400 \, dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{37}{3} x^3 + \frac{410}{2} x^2 - 1400x \right]_{x=7}^{x=10}$$

$$- \left[\frac{x^4}{4} - \frac{37}{3} x^3 + \frac{410}{2} x^2 - 1400x \right]_{x=10}^{x=20}$$

= Evaluación(10) − Evaluación(7) − Evaluación(20) − Evaluación(20)

= 2 Evaluación(10) − Evaluación(7) − Evaluación(20) $= -2 \cdot \frac{20000}{3} + \frac{40621}{12} + \frac{14000}{3} = \frac{16621}{12} = 1385.0833.$

17

C.1.

17. Calcula el área encerrada por la elipse de semiejes 7 y 10.

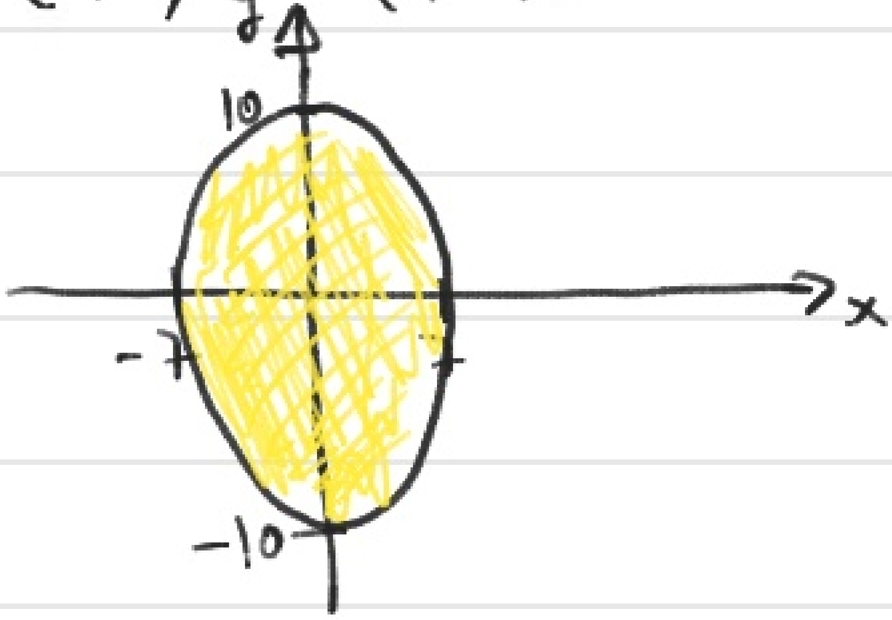
Elige tu solución correcta entre las siguientes:

Ejercicio número 14 de primer cuatrimestre. Curso 2017-18

1) 221.0114857512855
2) 219.9114857512855
3) 216.6114857512855
4) 224.3114857512855
5) 225.4114857512855
6) 226.5114857512855

17) Área encerrada por la elipse

$$\left(\frac{x}{7}\right)^2+\left(\frac{y}{10}\right)^2=1$$



La elipse viene dada por:

$$y=\pm 10\sqrt{1-\frac{x^2}{49}}=\pm 10\sqrt{1-\left(\frac{x}{7}\right)^2}.$$

El área encerrada es:

$$A=2\int_{-7}^{7}10\sqrt{1-\left(\frac{x}{7}\right)^2}\,dx=20\int_{-7}^{+7}\sqrt{1-\left(\frac{x}{7}\right)^2}\,dx$$

Hacemos el cambio de variable $x=7\,\mathrm{sen}\,t$

tenemos: $dx=7\cos t\,dt$ y

$$A = 20 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\; 7 \cos t \, dt =$$

$$= 140 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) \, dt =$$

$$= 140 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2} \, dt =$$

$$= 140 \left[\frac{1}{2} t + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4} \right]_{t=-\pi/2}^{t=\pi/2}$$

$$= 140 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{4} \left(\operatorname{sen}(\pi) - \operatorname{sen}(-\pi) \right) \right]$$

$$= 70\pi \simeq 219.9114857512855$$

40 a 46

C.1.

39.

$$\begin{cases} x + 8\alpha y + z = 32 \\ x + \alpha y + z = 38 \\ 3x + \alpha y = 27 \end{cases}$$

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) Si $\alpha = 0$ el sistema es incompatible. En caso contrario es compatible determinado.
2) Si $\alpha = 5$ el sistema es incompatible. En caso contrario es compatible determinado.
3) Si $\alpha = -6$ el sistema es incompatible. En caso contrario es compatible determinado.
4) Si $\alpha = 7$ el sistema es incompatible. En caso contrario es compatible determinado.
5) Si $\alpha = -8$ el sistema es incompatible. En caso contrario es compatible determinado.
6) Si $\alpha = 9$ el sistema es incompatible. En caso contrario es compatible determinado.

▪

Espacios vectoriales

Dados los espacios vectoriales $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 7x + 7y + 3z = 7y + 7z = 7z = 0\}$ y $V =< (0, 1, 3, 0), (0, 0, 1, 0) >$ se pide calcular:

40. Una base de U.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\beta_U = \{\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\}$
2) $\beta_U = \{\begin{pmatrix}2 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\}$
3) $\beta_U = \{\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\}$
4) $\beta_U = \{\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 5\end{pmatrix}\}$
5) $\beta_U = \{\begin{pmatrix}0 & 5 & 5 & 0\end{pmatrix}\}$
6) $\beta_U = \{\begin{pmatrix}6 & 6 & 0 & 0\end{pmatrix}\}$

41. Las ecuaciones cartesianas de V respecto de la base $\beta = \{(7, 3, 7, 1), (3, 7, 1, 0), (7, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\begin{cases} 3\,z + 21\,y + 9\,x + 21\,t = 0 \\ 3\,y = 0 \end{cases}$
2) $\begin{cases} 28\,z + 28\,y + 4\,x + 12\,t = 0 \\ 4\,z = 0 \end{cases}$
3) $\begin{cases} 15\,z + 5\,y + 35\,x + 35\,t = 0 \\ 5\,t = 0 \end{cases}$
4) $\begin{cases} 42\,z + 18\,y + 42\,x + 6\,t = 0 \\ 6\,x = 0 \end{cases}$
5) $\begin{cases} 49\,z + 49\,y + 7\,x + 21\,t = 0 \\ 7\,z = 0 \end{cases}$
6) $\begin{cases} 24\,z + 8\,y + 56\,x + 56\,t = 0 \\ 8\,t = 0 \end{cases}$

42. Una base de $U + V$.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:
1) $\beta_{U+V} = \{[0, 0, 0, 9], [0, 0, 6, 6], [0, 3, 3, 3]\}$
2) $\beta_{U+V} = \{[12, 0, 0, 0], [8, 8, 0, 0], [4, 4, 0, 4]\}$
3) $\beta_{U+V} = \{[0, 15, 0, 0], [10, 10, 0, 0], [5, 5, 5, 0]\}$
4) $\beta_{U+V} = \{[0, 0, 18, 0], [0, 0, 12, 12], [6, 0, 6, 6]\}$
5) $\beta_{U+V} = \{[21, 0, 0, 0], [14, 14, 0, 0], [7, 7, 0, 7]\}$
6) $\beta_{U+V} = \{[0, 24, 0, 0], [16, 16, 0, 0], [8, 8, 8, 0]\}$

43. Las ecuaciones de $U + V$ respecto de la base canónica.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $-z-4\,y=0$ 3) $-3\,z-6\,t=0$ 5) $-13\,z=0$
2) $-3\,z=0$ 4) $9\,x=0$ 6) $6\,z-9\,t=0$

- Considera las bases de $\mathbb{R}^4$ que siguen:

$$\beta_1=\{[1,7,3,7]\,,[0,1,3,7]\,,[0,0,1,7]\,,[0,0,0,1]\}$$
$$\beta_2=\{[1,8,4,8]\,,[0,1,4,8]\,,[0,0,1,8]\,,[0,0,0,1]\}$$
$$\beta_3=\{[1,10,6,10]\,,[0,1,6,10]\,,[0,0,1,10]\,,[0,0,0,1]\}$$

y haz los siguientes cálculos.

$\boxed{\mathbf{44}}$.

$$M_{\beta_1\beta_3}$$

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $M_{\beta_1\beta_3}(x)=\begin{pmatrix}0&-2&0&0\\0&-6&-2&0\\0&12&-6&-2\\-2&-48&36&-6\end{pmatrix}$ 4) $M_{\beta_1\beta_3}(x)=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\6&2&0&0\\-12&6&2&0\\48&-36&6&2\end{pmatrix}$

2) $M_{\beta_1\beta_3}(x)=\begin{pmatrix}0&0&3&0\\0&0&9&3\\3&0&-18&9\\9&3&72&-54\end{pmatrix}$ 5) $M_{\beta_1\beta_3}(x)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&1&0&0\\-6&3&1&0\\24&-18&3&1\end{pmatrix}$

3) $M_{\beta_1\beta_3}(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\-1&0&0&-3\\-3&-1&0&6\\18&-3&-1&-24\end{pmatrix}$ 6) $M_{\beta_1\beta_3}(x)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&3&1\\1&0&-6&3\\3&1&24&-18\end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{45}}$.

$$M_{\beta_2\beta_3}$$

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $M_{\beta_2\beta_3}(x)=\begin{pmatrix}-4&-2&0&0\\12&-4&-2&0\\-68&28&-4&-2\\-2&0&0&0\end{pmatrix}$ 4) $M_{\beta_2\beta_3}(x)=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\4&2&0&0\\-12&4&2&0\\68&-28&4&2\end{pmatrix}$

2) $M_{\beta_2\beta_3}(x)=\begin{pmatrix}-18&6&3&0\\102&-42&6&3\\3&0&0&0\\6&3&0&0\end{pmatrix}$ 5) $M_{\beta_2\beta_3}(x)=\begin{pmatrix}-6&-3&0&0\\18&-6&-3&0\\-102&42&-6&-3\\-3&0&0&0\end{pmatrix}$

3) $M_{\beta_2\beta_3}(x)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\-6&2&1&0\\34&-14&2&1\end{pmatrix}$ 6) $M_{\beta_2\beta_3}(x)=\begin{pmatrix}-6&2&1&0\\34&-14&2&1\\1&0&0&0\\2&1&0&0\end{pmatrix}$

46. Calcula las coordenadas del vector $v = (1,1,1,1)_{\beta_2}$ en las bases β_1 y β_3

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $v = \begin{pmatrix}-4 & 0 & -8 & -2\end{pmatrix}_{\beta_1} = \begin{pmatrix}2 & -18 & 130 & -2\end{pmatrix}_{\beta_3}$
2) $v = \begin{pmatrix}0 & 12 & 3 & 6\end{pmatrix}_{\beta_1} = \begin{pmatrix}27 & -195 & 3 & -3\end{pmatrix}_{\beta_3}$
3) $v = \begin{pmatrix}-16 & -4 & -8 & 0\end{pmatrix}_{\beta_1} = \begin{pmatrix}260 & -4 & 4 & -36\end{pmatrix}_{\beta_3}$
4) $v = \begin{pmatrix}5 & 10 & 0 & 20\end{pmatrix}_{\beta_1} = \begin{pmatrix}5 & -5 & 45 & -325\end{pmatrix}_{\beta_3}$
5) $v = \begin{pmatrix}-12 & 0 & -24 & -6\end{pmatrix}_{\beta_1} = \begin{pmatrix}6 & -54 & 390 & -6\end{pmatrix}_{\beta_3}$
6) $v = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 4\end{pmatrix}_{\beta_1} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 9 & -65\end{pmatrix}_{\beta_3}$

47.

Sean β y β' bases de $\mathbb{R}^3$, $\beta = \{[1,1,1],[1,0,1],[0,0,1]\}$, $M_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix}1 & 7 & 3\\ 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ (esta es la matriz que contiene en las columnas las coordenadas de los vectores de β' expresadas en la base β).
Se calcular las coordenadas de los vectores de β' expresadas en la base canónica .
Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\beta' = \{[1,1,1],[8,5,8],[8,3,11]\}$
2) $\beta' = \{[1,1,1],[8,6,8],[9,3,11]\}$
3) $\beta' = \{[1,1,1],[8,16,8],[19,3,11]\}$
4) $\beta' = \{[1,1,1],[8,7,8],[10,3,11]\}$
5) $\beta' = \{[1,1,1],[8,0,8],[3,3,11]\}$
6) $\beta' = \{[1,1,1],[8,4,8],[7,3,11]\}$

48.

Considera la base β de $\mathbb{R}^4$, $\beta = \{[1,8,0,0],[11,0,0,0],[1,1,1,0],[0,0,0,8]\}$ y el subespacio vectorial, V, de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$V = \{(x,y,z,t) : z + y + 8\,x + t = 0, \quad 11\,z + 8\,y + t = 0\}$$

.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $V = \{(x,y,z,t)_\beta : 16\,z + 88\,y + 22\,x + 8\,t = 0, 25\,z + 64\,x + 8\,t = 0\}$
2) $V = \{(x,y,z,t)_\beta : 10\,z + 88\,y + 16\,x + 8\,t = 0, 19\,z + 64\,x + 8\,t = 0\}$
3) $V = \{(x,y,z,t)_\beta : 19\,z + 88\,y + 25\,x + 8\,t = 0, 28\,z + 64\,x + 8\,t = 0\}$
4) $V = \{(x,y,z,t)_\beta : z + 88\,y + 7\,x + 8\,t = 0, 10\,z + 64\,x + 8\,t = 0\}$
5) $V = \{(x,y,z,t)_\beta : 6\,z + 88\,y + 12\,x + 8\,t = 0, 15\,z + 64\,x + 8\,t = 0\}$
6) $V = \{(x,y,z,t)_\beta : 14\,z + 88\,y + 20\,x + 8\,t = 0, 23\,z + 64\,x + 8\,t = 0\}$

▪

Aplicaciones lineales

Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ la aplicación lineal definida por

$$M_{\beta_c^4\beta_c^5}(f) = \begin{pmatrix}1 & 7 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 7 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Responde a las siguientes cuestiones:

40) $U = \{(x,y,z,t) : 7x + 7y + 3z = 7y + 7z = 7z = 0\}$

$V = \langle (0,1,3,0), (0,0,1,0) \rangle$

La matriz asociada al sistema que define U es:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \text{ que tiene rango } 3.$$

Luego: $\dim U = 4 - rg\, A = 4 - 3 = 1$.

Así que una base estará compuesta por un vector que verifique las ecuaciones:

$$\beta_U = \{(0,0,0,1)\}$$

47

$$\beta = \{(7,3,7,1),(3,7,1,0),(7,1,0,0),(1,0,0,0)\}$$

$$(x,y,z,t)_\beta \in V \iff (x,y,z,t)_\beta = A(0\ 1\ 3\ 0) + B(0,0,1,0)$$

$$x(7\,3\,7\,1) + y(3,7,1,0) + z(7\,1\,0\,0) + t(1,0,0,0) = (0,A,3A+B,0)$$

$$= (7x+3y+7z+t,\ 3x+7y+z,\ 7x+y,\ x)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 7x+3y+7z+t=0 \\ 3x+7y+z=A \\ 7x+y=3A+B \\ x=0 \end{array}\right.$$

Como el núm. de ecuaciones es 4 − dim V =
= 4 − 2 = 2 tenemos que

$$V = \{(x,y,z,t)_\beta : 7x+3y+7z+t = x = 0\}$$

42 Base de $U+V$

$$U+V = \langle \beta_U \cup \beta_V \rangle = \langle (0,0,0,1),(0,1,3,0),(0,0,1,0) \rangle$$

Como los tres vectores son linealmente independientes (y generadores) son una base

$$\beta_{U+V} = \{ (0,0,0,1),(0,1,3,0),(0,0,1,0) \}$$

43 Ecuaciones de $U+V$

$$\text{nº de ecuaciones} = \dim \mathbb{R}^4 - \dim U+V = 4-3=1$$

$(x,y,z,t) \in U+V \Leftrightarrow$

$$(x,y,z,t) = \alpha(0,0,0,1) + \beta(0,1,3,0) + \gamma(0,0,1,0)$$

$\Rightarrow x=0$

$U+V = \{ (x,y,z,t) \text{ tq } x=0 \}$

44

$$M_{\beta_1\beta_3} = M_{\beta_1\beta_c} M_{\beta_c\beta_3} = \left(M_{\beta_c\beta_1}\right)^{-1} M_{\beta_c\beta_3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 7 & 7 & 7 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 1 & 0 \\ 10 & 10 & 10 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & 1 & 0 \\ 24 & -18 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

45

$$M_{\beta_2\beta_3} = M_{\beta_2\beta_c} \quad M_{\beta_c\beta_3} =$$

$$= \left(M_{\beta_c\beta_2}\right)^{-1} M_{\beta_c\beta_3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 1 & 0 \\ 34 & -14 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(46) $v = (1,1,1,1)_{B_2}$

Empezamos pasando el vector a la base B_3

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_{B_3} = M_{B_3 B_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2} = \left(M_{B_2 B_3}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 9 \\ -65 \end{pmatrix}_{B_3}$$

Y ahora la pasamos a B_1:

$$M_{B_1 B_3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 9 \\ -65 \end{pmatrix}_{B_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_1}$$

48

C.1.

$\boxed{\mathbf{48}}$.

Considera la base β de $\mathbb{R}^4$, $\beta = \{[1,5,0,0], [11,0,0,0], [1,1,1,0], [0,0,0,5]\}$ y el subespacio vectorial, V, de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$V = \{(x,y,z,t) : z + y + 5x + t = 0, \quad 11\,z + 5\,y + t = 0\}$$

.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $V = \{(x,y,z,t)_\beta : 10\,z + 55\,y + 13\,x + 5\,t = 0, 19\,z + 25\,x + 5\,t = 0\}$
2) $V = \{(x,y,z,t)_\beta : 16\,z + 55\,y + 19\,x + 5\,t = 0, 25\,z + 25\,x + 5\,t = 0\}$
3) $V = \{(x,y,z,t)_\beta : 17\,z + 55\,y + 20\,x + 5\,t = 0, 26\,z + 25\,x + 5\,t = 0\}$
4) $V = \{(x,y,z,t)_\beta : -2\,z + 55\,y + x + 5\,t = 0, 7\,z + 25\,x + 5\,t = 0\}$
5) $V = \{(x,y,z,t)_\beta : 7\,z + 55\,y + 10\,x + 5\,t = 0, 16\,z + 25\,x + 5\,t = 0\}$
6) $V = \{(x,y,z,t)_\beta : 5\,z + 55\,y + 8\,x + 5\,t = 0, 14\,z + 25\,x + 5\,t = 0\}$

48

$$\beta = \{(1,5,0,0),(11,0,0,0),(1,1,1,0),(0,0,0,5)\}$$

$$V = \{(x,y,z,t) \text{ tq } z+y+5x+t=0,\ 11z+5y+t=0\}$$

Sea $(x,y,z,t)_\beta \in V$

$$(x,y,z,t)_\beta = x(1,5,0,0)+y(11,0,0,0)+z(1,1,1,0)+ t(0,0,0,5) = (x+11y+z,\ 5x+z,\ z,\ 5t)$$

Así que:

$$\left.\begin{array}{l} z + \underline{5x+z} + 5(\underline{x+11y+z}) + 5t = 0 \\ 11z + 5(5x+z) + 5t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 10x+55y+7z+5t=0 \\ 25x+16z+5t=0 \end{cases} \qquad y$$

$$V = \{(x,y,z,t)_\beta : 10x+55y+7z+5t = 25x+16z+5t=0\}$$

49 a C.1.

46. Calcula las coordenadas del vector $v = (1,1,1,1)_{\beta_2}$ en las bases β_1 y β_3

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $v = \begin{pmatrix}-4 & -2 & 6 & -2\end{pmatrix}_{\beta_1} = \begin{pmatrix}2 & -14 & 90 & -2\end{pmatrix}_{\beta_3}$
2) $v = \begin{pmatrix}3 & -9 & 3 & 6\end{pmatrix}_{\beta_1} = \begin{pmatrix}21 & -135 & 3 & -3\end{pmatrix}_{\beta_3}$
3) $v = \begin{pmatrix}12 & -4 & -8 & -4\end{pmatrix}_{\beta_1} = \begin{pmatrix}180 & -4 & 4 & -28\end{pmatrix}_{\beta_3}$
4) $v = \begin{pmatrix}5 & 10 & 5 & -15\end{pmatrix}_{\beta_1} = \begin{pmatrix}5 & -5 & 35 & -225\end{pmatrix}_{\beta_3}$
5) $v = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -3\end{pmatrix}_{\beta_1} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 7 & -45\end{pmatrix}_{\beta_3}$
6) $v = \begin{pmatrix}7 & -21 & 7 & 14\end{pmatrix}_{\beta_1} = \begin{pmatrix}49 & -315 & 7 & -7\end{pmatrix}_{\beta_3}$

47.

Sean β y β' bases de $\mathbb{R}^3$, $\beta = \{[1,1,1],[1,0,1],[0,0,1]\}$, $M_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ (esta es la matriz que contiene en las columnas las coordenadas de los vectores de β' expresadas en la base β). Se calcular las coordenadas de los vectores de β' expresadas en la base canónica .
Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\beta' = \{[1,1,1],[2,8,2],[16,2,10]\}$
2) $\beta' = \{[1,1,1],[2,10,2],[18,2,10]\}$
3) $\beta' = \{[1,1,1],[2,11,2],[19,2,10]\}$
4) $\beta' = \{[1,1,1],[2,-8,2],[0,2,10]\}$
5) $\beta' = \{[1,1,1],[2,-7,2],[1,2,10]\}$
6) $\beta' = \{[1,1,1],[2,1,2],[9,2,10]\}$

48.

Considera la base β de $\mathbb{R}^4$, $\beta = \{[1,2,0,0],[4,0,0,0],[1,1,1,0],[0,0,0,2]\}$ y el subespacio vectorial, V, de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$V = \{(x,y,z,t) : z + y + 2\,x + t = 0, \quad 4\,z + 2\,y + t = 0\}$$

.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $V = \{(x,y,z,t)_\beta : 2\,z + 8\,y + 2\,x + 2\,t = 0, 4\,z + 4\,x + 2\,t = 0\}$
2) $V = \{(x,y,z,t)_\beta : 4\,z + 8\,y + 4\,x + 2\,t = 0, 6\,z + 4\,x + 2\,t = 0\}$
3) $V = \{(x,y,z,t)_\beta : 9\,z + 8\,y + 9\,x + 2\,t = 0, 11\,z + 4\,x + 2\,t = 0\}$
4) $V = \{(x,y,z,t)_\beta : -3\,z + 8\,y - 3\,x + 2\,t = 0, -z + 4\,x + 2\,t = 0\}$
5) $V = \{(x,y,z,t)_\beta : -2\,z + 8\,y - 2\,x + 2\,t = 0, 4\,x + 2\,t = 0\}$
6) $V = \{(x,y,z,t)_\beta : -z + 8\,y - x + 2\,t = 0, z + 4\,x + 2\,t = 0\}$

▪

Aplicaciones lineales

Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ la aplicación lineal definida por

$$M_{\beta_c^4\beta_c^5}(f) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 7 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Responde a las siguientes cuestiones:

49. Encuentra bases β y β' tales que $M_{\beta\beta'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\beta = \{[2,0,0,0], [0,2,0,0], [0,1,1,0], [-13,19,-6,2]\}$ y
$\beta' = \{[1,0,0,0,0], [1,1,0,0,0], [2,7,1,0,0], [0,0,0,1,0], [0,0,0,0,1]\}$
2) $\beta = \{[-1,0,0,0], [0,-1,0,0], [0,-2,1,0], [-16,19,3,-1]\}$ y
$\beta' = \{[1,0,0,0,0], [1,1,0,0,0], [2,7,1,0,0], [0,0,0,1,0], [0,0,0,0,1]\}$
3) $\beta = \{[1,0,0,0], [0,1,0,0], [0,0,1,0], [-14,19,-3,1]\}$ y
$\beta' = \{[1,0,0,0,0], [1,1,0,0,0], [2,7,1,0,0], [0,0,0,1,0], [0,0,0,0,1]\}$
4) $\beta = \{[5,0,0,0], [0,5,0,0], [0,4,1,0], [-10,19,-15,5]\}$ y
$\beta' = \{[1,0,0,0,0], [1,1,0,0,0], [2,7,1,0,0], [0,0,0,1,0], [0,0,0,0,1]\}$
5) $\beta = \{[6,0,0,0], [0,6,0,0], [0,5,1,0], [-9,19,-18,6]\}$ y
$\beta' = \{[1,0,0,0,0], [1,1,0,0,0], [2,7,1,0,0], [0,0,0,1,0], [0,0,0,0,1]\}$
6) $\beta = \{[7,0,0,0], [0,7,0,0], [0,6,1,0], [-8,19,-21,7]\}$ y
$\beta' = \{[1,0,0,0,0], [1,1,0,0,0], [2,7,1,0,0], [0,0,0,1,0], [0,0,0,0,1]\}$

50.

Considera las bases

$$\beta_4 = \{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (2,1,0,0), (1,0,0,0)\},$$

$$\beta_5 = \{(1,1,1,1,1), (1,1,2,1,0), (7,1,1,0,0), (0,1,0,0,0), (1,0,0,0,0)\}$$

y calcula $M_{\beta_4\beta_5}(f)$

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 & 0 \\ -23 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 23 & 3 & 1 \\ 25 & -29 & 5 & 1 \\ -91 & -10 & 13 & 4 \end{pmatrix}$
5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 25 & 3 & 1 \\ 37 & -43 & 7 & 1 \\ -137 & -16 & 19 & 6 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 22 & 3 & 1 \\ 19 & -22 & 4 & 1 \\ -68 & -7 & 10 & 3 \end{pmatrix}$
4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 24 & 3 & 1 \\ 31 & -36 & 6 & 1 \\ -114 & -13 & 16 & 5 \end{pmatrix}$
6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 26 & 3 & 1 \\ 43 & -50 & 8 & 1 \\ -160 & -19 & 22 & 7 \end{pmatrix}$

51. Calcula la matriz $M_{\beta_4\beta_c^4}$.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Entregables (Aplicaciones lineales)

49 $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$

$$M_{\beta_c^4 \beta_c^5}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\beta = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$\beta' = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$

$$M_{\beta\beta'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) & f(v_4) \end{array}$$

$f(v_1) = (1,0,0,0,0)_{\beta'} = 1w_1 + 0w_2 + 0w_3 + 0w_4 + 0w_5 = w_1$

$f(v_2) = (0,1,0,0,0)_{\beta'} = w_2$

$f(v_3) = (0,0,1,0,0)_{\beta'} = w_3$

$f(v_4) = (0,0,0,0,0)_{\beta'} \iff \underline{v_4 \in \operatorname{Ker} f}$

$v_4 = (x,y,z,t)$ tq $f(x,y,z,t) = \vec{0}$

$$M_{\beta_c^4 \beta_c^5}(f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{sistema lineal homogéneo.}}$$

$\dim \operatorname{Ker} f = 4 - \operatorname{rg} M_{\beta_c^4 \beta_c^5}(f) = 4 - 3 = 1$

$(x,y,z,t) \in \operatorname{Ker} f \iff \left.\begin{array}{r} x + y + 2z + t = 0 \\ y + 7z + 2t = 0 \\ z + 3t = 0 \end{array}\right\} \to \underset{\text{elegimos}}{t = 1} \to z = -3 \to$

$\to y = -2t - 7z = 21 - 2 = 19$

$\to x = -t - 2z - y = -1 + 6 - 19 = -14$

$v_4 = (x, y, z, t) = (-14, 19, -3, 1)$

$\left.\begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}\right\}$ elegimos los que queramos que junto con v_4 formen una base de $\mathbb{R}^4$

Así: $v_1 = (1,0,0,0)$

$v_2 = (0,1,0,0)$

$v_3 = (0,0,1,0)$

Éstos valen porque $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ son una base.

Ahora ya tenemos que:

$$w_1 = f(v_1) = M_{B_c^4 B_c^4}(f) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = f(v_2) = \cdots\cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = f(v_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La única condición para w_4 y w_5 es que formen una base con w_1 w_2 y w_3

$w_1 \Rightarrow (1,0,0,0,0)$

$w_2 = (1,1,0,0,0)$

$w_3 = (2,7,1,0,0)$

$w_4 = (0,0,0,1,0)$

$w_5 = (0,0,0,0,1)$

Ya tenemos las bases $\mathcal{B}$ y β' calculadas.

PROBLEMA La solución del ejercicio no es única y entonces, ~~en este caso~~ puede que no coincida con ninguna de las propuestas.

CÓMO ELEGIR

- La base β tiene como cuarto vector a uno de Ker(f), eso elimina a todas las respuestas menos a la tercera.

(50) $\beta_4 = \{ \underset{t_1}{(1\ 1\ 1\ 1)}, \underset{t_2}{(1\ 1\ 1\ 0)}, \underset{t_3}{(2\ 1\ 0\ 0)}, \underset{t_4}{(1\ 0\ 0\ 0)} \}$

$\beta_5 = \{ \underset{s_1}{(1,1,1,1,1)}, \underset{s_2}{(1,1,2,1,0)}, \underset{s_3}{(7,1,1,0,0)}, \underset{s_4}{(0,1,0,0,0)}, \underset{s_5}{(1,0,0,0,0)} \}$

$$M_{\beta_4\beta_5}(f)$$

$\boxed{\text{1ª forma} \quad \text{Fórmula.}}$

$$M_{\beta_4\beta_5}(f) = M_{\beta_5\beta_c^5}\, M_{\beta_c^4\beta_c^5}(f)\, M_{\beta_c^4\beta_4}$$

$$M_{\beta_c\beta_4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{\beta_5\beta_c^5} = \left(M_{\beta_c^5\beta_5} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

4

Finalmente (con el uso de wxmaxima o a mano) :

$\hookrightarrow$ ver órdenes en el folio siguiente

$$M_{\beta_4\beta_5}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 & 0 \\ -23 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{2ª forma: DEFINICIÓN}}$

$$M_{\beta_4\beta_5}(f) = \begin{array}{cccc} f(t_1) & f(t_2) & f(t_3) & f(t_4) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 & 0 \\ -23 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(t_1) = f(\underline{1,1,1,1}) = M_{\beta_c^4\beta_c^5}(f)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\10\\4\\0\\0\end{pmatrix} = (\qquad\qquad)_{\beta_5}$$

$$f(t_2) = f(1,1,1,0) = M_{\beta_c^4\beta_c^5}(f)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\8\\1\\0\\0\end{pmatrix} = (\qquad\qquad)_{\beta_5}$$

$\vdots$

Expresamos los vectores en β_5 :

$$(5,10,4,0,0) = \alpha s_1 + \beta s_2 + \gamma s_3 + \delta s_4 + \varepsilon s_5 =$$

$$= (\alpha+\beta+7\gamma+\varepsilon,\ \alpha+\beta+\gamma+\delta,\ \alpha+2\beta+\gamma,\ \alpha+\beta,\ \alpha)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \alpha = 0 & \\ \alpha+\beta = 0 & \\ \alpha+2\beta+\gamma = 4 & \\ \alpha+\beta+\gamma+\delta = 10 & \alpha+\beta+7\gamma+\varepsilon = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 0 = \beta,\ \gamma = 4 \\ \delta = 6 \\ \varepsilon = -23 \end{array}$$

5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{52}}$. Calcula la matriz $M_{\beta_5\beta_c^5}$

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -7 & 13 & -6 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ -3 & 0 & -7 & 13 & -11 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -7 & 13 & -9 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -7 & 13 & -7 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -7 & 13 & -10 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 \\ -5 & 0 & -7 & 13 & -13 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{53}}$. Da una base de Ker f expresando sus coordenadas en β_4.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\beta_{\text{Ker } f} = \{[1, -4, 20, -57]_{\beta_4}\}$ 4) $\beta_{\text{Ker } f} = \{[1, -4, 27, -50]_{\beta_4}\}$
2) $\beta_{\text{Ker } f} = \{[1, -4, 25, -52]_{\beta_4}\}$ 5) $\beta_{\text{Ker } f} = \{[1, -4, 22, -55]_{\beta_4}\}$
3) $\beta_{\text{Ker } f} = \{[1, -4, 18, -59]_{\beta_4}\}$ 6) $\beta_{\text{Ker } f} = \{[1, -4, 29, -48]_{\beta_4}\}$

$\boxed{\mathbf{54}}$. Da una base de Im f expresando sus coordenadas en β_5.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\beta_{\text{Im } f} = \{[-2, 0, 1, 0, 0]_{\beta_5}, [0, -2, 0, -1, 0]_{\beta_5}, [0, 0, 0, 0, 1]_{\beta_5}\}$
2) $\beta_{\text{Im } f} = \{[3, 0, 1, 0, 0]_{\beta_5}, [0, 3, 0, 4, 0]_{\beta_5}, [0, 0, 0, 0, 1]_{\beta_5}\}$
3) $\beta_{\text{Im } f} = \{[-4, 0, 1, 0, 0]_{\beta_5}, [0, -4, 0, -3, 0]_{\beta_5}, [0, 0, 0, 0, 1]_{\beta_5}\}$
4) $\beta_{\text{Im } f} = \{[5, 0, 1, 0, 0]_{\beta_5}, [0, 5, 0, 6, 0]_{\beta_5}, [0, 0, 0, 0, 1]_{\beta_5}\}$
5) $\beta_{\text{Im } f} = \{[0, 0, 6, 0, 0]_{\beta_5}, [0, 0, 0, 6, 0]_{\beta_5}, [0, 0, 0, 0, 6]_{\beta_5}\}$
6) $\beta_{\text{Im } f} = \{[7, 0, 1, 0, 0]_{\beta_5}, [0, 7, 0, 8, 0]_{\beta_5}, [0, 0, 0, 0, 1]_{\beta_5}\}$

$\boxed{\mathbf{55}}$. Sea $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por $g(x, y, z, t)_{\beta_4} = (x + 1y + 2z + 7t, y, z + t, y + z + t)_{\beta_4}$, calcula $M_{\beta_4\beta_4}(g)$

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5

$f(t_1) = (5,10,4,0,0) = (0,0,4,6,-23)_{\beta_5}$

Repitiendo el proceso:

$f(t_2) = (0,0,1,7,-3)_{\beta_5}$

$f(t_3) = (0,0,0,1,3)_{\beta_5}$

$f(t_4) = (0,0,0,0,1)_{\beta_5}$

5.1

$$M_{\beta_4 \beta_c^4} \overset{\text{1ª forma}}{=} \left(M_{\beta_c^4 \beta_4}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

2ª forma $\longrightarrow$ definición $\|$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$e_1 \; e_2 \; e_3 \; e_4$ (expresados en β_4)

se resuelven los sistemas

$e_1 = (1,0,0,0) = \alpha t_1 + \beta t_2 + \gamma t_3 + \delta t_4 = t_4 = (0,0,0,1)_{\beta_4}$

$e_2 = (0,1,0,0) = \alpha t_1 + \beta t_2 + \gamma t_3 + \delta t_4 = 0t_1 + 0t_2 + t_3 - 2t_4 = (0,0,1,-2)_{\beta_4}$

$e_3 = (0,0,1,0) = 0t_1 + 1t_2 - t_3 + t_4 = (0,1,-1,1)_{\beta_4}$

$e_4 = (0,0,0,1) = t_1 - t_2 = (1,-1,0,0)_{\beta_4}$

52 Igual que el 51 en $\mathbb{R}^5$

53 Base de Ker f (sabemos que tiene dim = 1 por ej 49)

$$\operatorname{Ker} f = \{(1,-4,22,-55)_{\beta_4}\}$$

$$(x,y,z,t)_{\beta_4} \in \operatorname{Ker} f \iff f(x,y,z,t)_{\beta_4} = \vec{0}$$

$$f(x,y,z,t)_{\beta_4} = M_{\beta_4\beta_5}(f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_{\beta_4}$$

$$\iff \begin{cases} 4x+y=0 \\ 6x+7y+z=0 \\ -23x-3y+3z+t=0 \end{cases}$$

Tomamos $x=1$, $y=-4$, $z=-6x-7y=28-6=22$

$t = 23x+3y-3z = 23-12-66=-55$.

$(x,y,z,t)_{\beta_4} = (1,-4,22,-55)_{\beta_4} \in \operatorname{Ker} f$.

54 Base de Im f expresando las coordenadas en β_5 (7)

columnas de la matriz asociada a f. $\longrightarrow$ necesitaré $\underset{\beta_4\beta_5}{M}(f)$

$$\text{Im } f = \langle \qquad \rangle =$$

$$= \langle (0,0,4,6,-23)_{\beta_5}, (0,0,1,7,-3)_{\beta_5}, (0,0,0,1,3)_{\beta_5}, (0,0,0,0,1)_{\beta_5} \rangle$$

$$\underbrace{\dim \ker f}_{1} + \dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^4 = 4 \Rightarrow$$

$$\boxed{\dim \text{Im } f = 3}$$

Puedo hacer dos cosas:

1º) Poner los $\underbrace{\text{4 vectores}}$ en una matriz por fila y hacer eliminación por Gauss para obtener una base

2º) Elegir 3 de ellos linealmente independientes

$$\beta_{\text{Im } f} = \{ (0,0,1,7,-3)_{\beta_5}, (0,0,0,1,3)_{\beta_5}, (0,0,0,0,1)_{\beta_5}$$

PROBLEMA La base que he calculado no es ninguna de las propuestas, pero es fácil eliminar las opciones incorrectas porque cualquier $(x,y,z,t,u)_{B_5} \in \mathrm{Im}(f)$ es c.L. de los anteriores y entonces $x=y=0$.

La solución correcta es la 5.

55 a C.1.

55 $g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ 9

$$g(x,y,z,t)_{B_4} = (x+y+2z+7t,\ y,\ z+t,\ y+z+t)_{B_4}$$

Calcular $M_{B_4 B_4}(g)$.

Sin necesidad de usar la definición, como

$$g(x,y,z,t)_{B_4} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_{B_4}$$

entonces $A = M_{B_4 B_4}(g)$

4) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 7\\0 & 1 & 0 & 4\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 7\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 7\\0 & 1 & 0 & 6\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

56. Calcula una base de Ker g respecto de la base β_4.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\{[-5,1,-1,1]\}_{\beta_4}$ 3) $\{[-5,3,-1,1]\}_{\beta_4}$ 5) $\{[-5,5,-1,1]\}_{\beta_4}$
2) $\{[5,2,1,-1]\}_{\beta_4}$ 4) $\{[-20,0,-4,4]\}_{\beta_4}$ 6) $\{[5,6,1,-1]\}_{\beta_4}$

57. Calcula Im g (respecto a la base β_4 todos los resultados que des).

Elige tu solución correcta entre las siguientes:
1) $\beta_{\mathrm{Im}\ g} = \{[1,0,0,0]_{\beta_4}, [1,0,0,1]_{\beta_4}, [2,0,1,1]_{\beta_4}\}$
2) $\beta_{\mathrm{Im}\ g} = \{[1,0,0,0]_{\beta_4}, [1,1,0,1]_{\beta_4}, [2,0,1,1]_{\beta_4}\}$
3) $\beta_{\mathrm{Im}\ g} = \{[1,0,0,0]_{\beta_4}, [1,0,0,1]_{\beta_4}, [2,0,3,1]_{\beta_4}\}$
4) $\beta_{\mathrm{Im}\ g} = \{[1,0,0,0]_{\beta_4}, [1,0,0,1]_{\beta_4}, [2,0,4,1]_{\beta_4}\}$
5) $\beta_{\mathrm{Im}\ g} = \{[1,0,0,0]_{\beta_4}, [1,0,0,1]_{\beta_4}, [2,0,5,1]_{\beta_4}\}$
6) $\beta_{\mathrm{Im}\ g} = \{[1,0,0,0]_{\beta_4}, [1,0,0,1]_{\beta_4}, [2,0,-6,1]_{\beta_4}\}$

58. Calcula $M_{\beta_4\beta_5}(f\circ g)$ (observa que $M_{\beta_4\beta_5}(f\circ g) = M_{\beta_4\beta_5}(f)M_{\beta_4\beta_4}(g)$)

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\4 & 5 & 8 & 28\\6 & 13 & 13 & 43\\-23 & -25 & -42 & -156\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\4 & 5 & 8 & 28\\6 & 13 & 13 & 43\\-23 & -25 & -42 & -157\end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\4 & 5 & 8 & 28\\6 & 13 & 13 & 43\\-23 & -25 & -42 & -162\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\4 & 5 & 8 & 28\\6 & 13 & 13 & 43\\-23 & -25 & -42 & -159\end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\4 & 5 & 8 & 28\\6 & 13 & 13 & 43\\-23 & -25 & -42 & -153\end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\4 & 5 & 8 & 28\\6 & 13 & 13 & 43\\-23 & -25 & -42 & -151\end{pmatrix}$

59. Calcula la expresión analítica de $f\circ g$

Elige tu solución correcta para $f\circ g((x,y,z,t)_{\beta_4}$ entre las siguientes:
1) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 8z+5y+4x+28t & 13z+13y+6x+43t & -42z-25y-23x-156t\end{pmatrix}_{\beta_5}$
2) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 8z+5y+4x+28t & 13z+13y+6x+43t & -42z-25y-23x-155t\end{pmatrix}_{\beta_5}$
3) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 8z+5y+4x+28t & 13z+13y+6x+43t & -42z-25y-23x-154t\end{pmatrix}_{\beta_5}$
4) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 8z+5y+4x+28t & 13z+13y+6x+43t & -42z-25y-23x-153t\end{pmatrix}_{\beta_5}$
5) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 8z+5y+4x+28t & 13z+13y+6x+43t & -42z-25y-23x-157t\end{pmatrix}_{\beta_5}$
6) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 8z+5y+4x+28t & 13z+13y+6x+43t & -42z-25y-23x-151t\end{pmatrix}_{\beta_5}$

60. Sea ahora la matriz A formada por las tres primeras filas y columnas de $M_{\beta_c^4\beta_c^5}(f)$ y calcula (sin diagonalizar) la potencia 7 de A (tienes que seguir como ejemplo un ejercicio del tema 2 que hicimos en clase donde se descomponía A como la suma de la matriz identidad con una matriz nilpotente).

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

56 Base de Ker(g)

$$\text{Ker}\, g = \{ (x,y,z,t)_{\beta_4} : g(x,y,z,t)_{\beta_4} = \vec{0} \}$$

$\dim \text{Ker}\, g = 4 - \text{rg}\, M_{\beta_4\beta_4}(g)$ ya que

$$(x,y,z,t)_{\beta_4} \in \text{Ker}\, g \Leftrightarrow M_{\beta_4\beta_4}(g) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_{\beta_4} = \vec{0}$$

<u>Calculamos el rango de la matriz:</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3 - F_2}{\overset{F_4 - F_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

luego $\text{rg}\, M_{\beta_4\beta_4}(g) = 4$ y $\dim \text{Ker}(g) = 0$

$\beta_{\text{Ker}(g)} = \emptyset$.

57) Base de $Im(g)$

Como $\dim Ker\, g + \dim Im\, g = 4$ entonces $\dim Im\, g = 4$ y podemos poner como base cualquiera de $\mathbb{R}^4$. Por ejemplo:

$$\beta_{Im\, g} = \{(1,0,0,0)_{\beta_4}, (0,1,0,0)_{\beta_4}, (0,0,1,0)_{\beta_4}, (0,0,0,1)_{\beta_4}\}$$

58)

$$M_{\beta_4 \beta_5}(f \circ g) =$$

$$= M_{\beta_4 \beta_5}(f)\, M_{\beta_4 \beta_4}(g) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 & 0 \\ -23 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 8 & 28 \\ 6 & 13 & 13 & 43 \\ -23 & -25 & -42 & -157 \end{pmatrix}$$

59) Expresión analítica de $f \circ g$

$$f \circ g(x\ y\ z\ t)_{\beta_4} = M_{\beta_4 \beta_5}(f \circ g) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_{\beta_4} =$$

$$= (0, 0, 4x+5y+8z+28t, 6x+13y+13z+43t, -23x-25y$$
$$-42z-157t)_{\beta_5}$$

61

C.1.

$\boxed{\mathbf{61}}$.

Sean β la base de $\mathbb{R}^3$, $\beta = \{[1,1,1],[1,0,1],[0,0,1]\}$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal tal que $M_{\beta\beta}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula la matriz $M_{\beta_c^3 \beta_c^3}(f)$.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\begin{pmatrix} -9 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & -1 \\ -10 & 4 & 11 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -6 & 4 & 13 \\ 1 & 3 & -1 \\ -7 & 4 & 11 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 18 \\ 1 & 8 & -1 \\ -2 & 4 & 11 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -13 & 4 & 6 \\ 1 & -4 & -1 \\ -14 & 4 & 11 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} -11 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \\ -12 & 4 & 11 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} -10 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & -1 \\ -11 & 4 & 11 \end{pmatrix}$

61

$\beta = \{(1,1,1), (1,0,1), (0,0,1)\}$

$$M_{\beta\beta}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

$M_{\beta_c^3 \beta_c^3}(f)$?

$$M_{\beta_c^3 \beta_c^3}(f) = M_{\beta_c^3 \beta} \, M_{\beta\beta}(f) \, M_{\beta \beta_c^3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -9 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & -1 \\ -10 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

62

C.1.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 149 \\ 0 & 1 & 35 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 147 \\ 0 & 1 & 35 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 153 \\ 0 & 1 & 35 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 144 \\ 0 & 1 & 35 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 152 \\ 0 & 1 & 35 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 140 \\ 0 & 1 & 35 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

61.

Sean β la base de $\mathbb{R}^3$, $\beta = \{[1,1,1], [1,0,1], [0,0,1]\}$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal tal que $M_{\beta\beta}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula la matriz $M_{\beta^3_c\beta^3_c}(f)$.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 11 \\ 1 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} -12 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & -1 \\ -13 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -6 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} -9 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \\ -10 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 16 \\ 1 & 9 & -1 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

Diagonalización

62. Encuentra (si existen) matrices P y P^{-1} tales que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal diciendo quién es ésta. Responde a los siguientes apartados.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -12 & 18 \\ 3 & -1 & -12 & 18 \\ 3 & -2 & -11 & 18 \\ 2 & 1 & -15 & 20 \end{pmatrix}$$

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 10 & 6 \\ 3 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \\ -3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 6 & 3 \\ 1 & 9 & 6 & 3 \\ 1 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

3) $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 & 1 \\ 9 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

62

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -12 & 18 \\ 3 & -1 & -12 & 18 \\ 3 & -2 & -11 & 18 \\ 2 & 1 & -15 & 20 \end{pmatrix}$$

$$p_A(x) = |A - x I_4| = \begin{vmatrix} 4-x & -2 & -12 & 18 \\ 3 & -1-x & -12 & 18 \\ 3 & -2 & -11-x & 18 \\ 2 & 1 & -15 & 20-x \end{vmatrix} =$$

$$\underset{F_2 - F_1}{\overset{F_3 - F_2}{=}} \begin{vmatrix} 4-x & -2 & -12 & 18 \\ -1+x & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & -1+x & 1-x & 0 \\ 2 & 1 & -15 & 20-x \end{vmatrix} \overset{C_1 + C_2}{=} \begin{vmatrix} 2-x & -2 & -12 & 18 \\ 0 & 1-x & 0 & 0 \\ -1+x & -1+x & 1-x & 0 \\ 3 & 1 & -15 & 20-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x) \begin{vmatrix} 2-x & -12 & 18 \\ -1+x & 1-x & 0 \\ 3 & -15 & 20-x \end{vmatrix} =$$

$$\overset{C_1+C_2}{=} (1-x) \begin{vmatrix} -10-x & -12 & 18 \\ 0 & 1-x & 0 \\ -12 & -15 & 20-x \end{vmatrix} = (1-x)^2 \begin{vmatrix} -10-x & 18 \\ -12 & 20-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)^2 \left[(-10-x)(20-x) + 12 \cdot 18 \right] = (1-x)^2 (x^2 - 10x + 16) =$$

$$= (1-x)^2 (x-8)(x-2)$$

$$\boxed{\sigma_A = \{1, 8, 2\}}$$

$$\dim V_1 \overset{?}{=} m(1) = 2$$

$$\dim V_8 \overset{\checkmark}{=} m(8) = 1$$

$$\dim V_2 \overset{\checkmark}{=} m(2) = 1$$

$V_1 = \left\{ (x,y,z,t) \text{ tq } (A - \underbrace{1}_{} I_4) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \vec{0} \right\}$

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -12 & 18 \\ 3 & -2 & -12 & 18 \\ 3 & -2 & -12 & 18 \\ 2 & 1 & -15 & 19 \end{pmatrix}$$

Se ve claro que $rg(A - I_4) = 2$ porque la segunda y tercera fila son iguales a la primera y la cuarta no es proporcional a las anteriores.

El sistema que define a V_1 es:

$$3x - 2y - 12z + 18t = 0$$
$$2x + y - 15z + 19t = 0.$$

$\dim V_1 = 4 - rg(A - I_4) = 4 - 2 = 2 = m(1) \Rightarrow A$ es diagonalizable

$\beta_{V_1} = \{ (6, 3, \underline{1}, \underline{0}), \ (-8, -3, \underline{0}, \underline{1}) \}$

$V_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } (A - 2I_4)\vec{x} = \vec{0}\}$

$$A - 2I_4 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -12 & 18 \\ 3 & -3 & -12 & 18 \\ 3 & -2 & -13 & 18 \\ 2 & 1 & -15 & 18 \end{pmatrix} \underset{F_2 - F_2}{\overset{F_3 - F_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -12 & 18 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -15 & 18 \end{pmatrix}$$

Ecuaciones de V_2

$$\left.\begin{array}{l} x - y - 6z + 9t = 0 \\ x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\beta_{V_2} = \{(1, 1, 1, \tfrac{2}{3})\}$$

$$\beta^*_{V_2} = \{(3, 3, 3, 2)\}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$V_8 = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } (A - 8I_4)\vec{x} = \vec{0} \}$

$$A - 8I_4 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -12 & 18 \\ 3 & -9 & -12 & 18 \\ 3 & -2 & -19 & 18 \\ 2 & 1 & -15 & 12 \end{pmatrix} \to rg = 3$$

porque $\dim V_8 = 4 - rg(A - 8I_4) = 1$.

$$A - 8I_4 \underset{F_2 - F_1}{\overset{F_3 - F_2}{\approx}} \begin{pmatrix} -4 & -2 & -12 & 18 \\ 7 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \\ 2 & 1 & -15 & 12 \end{pmatrix}$$

} l. independients (son suficients para dar el sistema que define V_8)

Ecuacions de V_8

$$\begin{aligned} -4x - 2y - 12z + 18t &= 0 \\ x - y &= 0 \\ y - z &= 0 \end{aligned}$$

$$\beta_{V_8} = \{ (1, 1, 1, 1) \}$$

La única solución posible sería la 4, pero no sabemos si la matriz de paso propuesta es correcta o no. Para saberlo habría que ver si

$\beta_1 = \{(3,3,3,2)\}$ es una base de V_2 ✓

$\beta_2 = \{(1,1,1,1)\}$ es una base de V_8 ✓

$\beta_3 = \{(10,9,7,4),(6,6,5,3)\}$ es una base de V_1

Para saber si β_3 es una base de V_1 basta con ver que son $\underbrace{\text{linealmente independientes}}_{\text{obvio}}$ y están en V_1.

Sí que están en V_1 porque verifican las ecuaciones

63

C.1.

4) $D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&8\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}10&6&3&1\\9&6&3&1\\7&5&3&1\\4&3&2&1\end{pmatrix}$ y $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-2&3&-1&0\\1&-3&3&-1\\0&1&-3&3\end{pmatrix}$.

5) $D=\begin{pmatrix}-5&0&0&0\\0&-5&0&0\\0&0&8&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}3&1&10&6\\3&1&9&6\\3&1&7&5\\2&1&4&3\end{pmatrix}$ y $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&-1\\-1&0&-2&3\\3&-1&1&-3\\-3&3&0&1\end{pmatrix}$.

6) $D=\begin{pmatrix}-6&0&0&0\\0&-6&0&0\\0&0&-5&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}1&10&6&3\\1&9&6&3\\1&7&5&3\\1&4&3&2\end{pmatrix}$ y $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1&0\\0&-2&3&-1\\-1&1&-3&3\\3&0&1&-3\end{pmatrix}$.

- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}68&-42&-42\\42&-23&-28\\42&-28&-23\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}59&-36&-36\\36&-19&-24\\36&-24&-19\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}55&-36&-36\\36&-23&-24\\36&-24&-23\end{pmatrix}$, se pide calcular los siguientes polinomios característicos.

$\boxed{\textbf{63}}$.

$$p_A(x)$$

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $p_A(x)=-(x-11)\,(x-5)^2$
2) $p_A(x)=-(x-12)\,(x-5)^2$
3) $p_A(x)=-(x-9)\,(x-5)^2$
4) $p_A(x)=-(x-16)\,(x-5)^2$
5) $p_A(x)=-(x-7)\,(x-5)^2$
6) $p_A(x)=-(x-18)\,(x-5)^2$

$\boxed{\textbf{64}}$.

$$p_B(x)$$

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $p_B(x)=-(x-10)\,(x-5)^2$
2) $p_B(x)=-(x-13)\,(x-5)^2$
3) $p_B(x)=-(x-8)\,(x-5)^2$
4) $p_B(x)=-(x-15)\,(x-5)^2$
5) $p_B(x)=-(x-11)\,(x-5)^2$
6) $p_B(x)=-(x-17)\,(x-5)^2$

$\boxed{\textbf{65}}$.

$$p_C(x)$$

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

1) $p_C(x)=-(x-7)\,(x-1)^2$
2) $p_C(x)=-(x-9)\,(x-1)^2$
3) $p_C(x)=-(x-4)\,(x-1)^2$
4) $p_C(x)=-(x-11)\,(x-1)^2$
5) $p_C(x)=-(x-2)\,(x-1)^2$
6) $p_C(x)=-(x-13)\,(x-1)^2$

$\boxed{\textbf{66}}$.

Sea $A=\begin{pmatrix}8&-14&7\\7&-13&7\\14&-28&15\end{pmatrix}$. Encuentra matrices D (diagonal) y P tales que $D=P^{-1}AP$.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

Hasta aquí el ejercicio de .

63

$$A=\begin{pmatrix} 68 & -42 & -42 \\ 42 & -23 & -28 \\ 42 & -28 & -23 \end{pmatrix}$$

$$p_A(x)=\left|A-xI_3\right| = \begin{vmatrix} 68-x & -42 & -42 \\ 42 & -23-x & -28 \\ 42 & -28 & -23-x \end{vmatrix} \underset{F_3-F_2}{=} \begin{vmatrix} 68-x & -42 & -42 \\ 42 & -23-x & -28 \\ 0 & -5+x & 5-x \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_3+C_2}{=} \begin{vmatrix} 68-x & -42 & -84 \\ 42 & -23-x & -51-x \\ 0 & -5-x & 0 \end{vmatrix} = -(-5+x) \begin{vmatrix} 68-x & -84 \\ 42 & -51-x \end{vmatrix} =$$

$$= (-x+5)\left[(68-x)(-51-x)+84\cdot 42\right] = (-x+5)(x^2-17x+60) =$$

$$= (5-x)(x-12)(x-5) = -(x-12)^1(x-5)^2$$

66

C.1.

$\boxed{66}$.

Sea $A = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ 4 & -1 & 4 \\ 8 & -16 & 15 \end{pmatrix}$. Encuentra matrices D (diagonal) y P tales que $D = P^{-1}AP$.

Elige tu solución correcta entre las siguientes:

▪

1) $D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

2) $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

3) $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

4) $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

5) $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

6) $D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

66

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ 4 & -1 & 4 \\ 8 & -16 & 15 \end{pmatrix}$$

$$p_A(x) = |A - x I_3| = \begin{vmatrix} 11-x & -8 & 4 \\ 4 & -1-x & 4 \\ 8 & -16 & 15-x \end{vmatrix} =$$

$$\overset{F_2-F_1}{=} \begin{vmatrix} 11-x & -8 & 4 \\ -7+x & 7-x & 0 \\ 8 & -16 & 15-x \end{vmatrix} \overset{C_2+C_1}{=} \begin{vmatrix} 11-x & 3-x & 4 \\ -7+x & 0 & 0 \\ 8 & -8 & 15-x \end{vmatrix}$$

$$= -(-7+x) \begin{vmatrix} 3-x & 4 \\ -8 & 15-x \end{vmatrix} =$$

$$= (7-x)\left[(3-x)(15-x) + 32\right] =$$

$$= (7-x)\left[45 + x^2 - 15x - 3x + 32\right] =$$

$$= (7-x)(x^2 - 18x + 77) = (7-x)(x-7)(x-11) =$$

$$= -(x-7)^2(x-11)$$

Tenemos que comprobar:

- $\dim V_7 \overset{?}{=} m(7) = 2$
- $\dim V_{11} \overset{\checkmark}{=} m(11) = 1$

$$V_7 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } (A - 7I_3)\vec{x} = \vec{0}\}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 4 & -8 & 4 \\ 8 & -16 & 8 \end{pmatrix} = B$$

$rg(B) = 1 \Rightarrow \dim V_7 = 3 - 1 = 2$

y entonces A es diagonalizable.

Calculamos una base de V_7.

$$V_7 = \{(x,y,z) \text{ tq } x-2y+z=0\}$$

$$\beta_{V_7} = \{(0,1,2), (1,0,-1)\}$$

Ahora estudiamos V_{11}

$$V_{11} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } (A - 11\, I_3)\vec{x} = \vec{0} \}$$

$$A - 11\, I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 4 \\ 4 & -12 & 4 \\ 8 & -16 & 4 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ tiene rango 2 porque $\dim V_{11} = 1$

Las ecuaciones de V_{11} son:

$$x - 3y + z = -2y + z = 0$$

Una base será

valores calculados

$$\beta_{V_{11}} = \{ (1, 1, 2) \}$$

valor elegido

<u>Así que</u>:

$$D = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad y$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Las únicas soluciones correctas posibles son 3, 5 y 6 por coincidir los valores propios. Descartamos la 5 y la 6 porque la columna en la que se encontraría la base de V_{11} es incorrecta.

Examen anterior

$\boxed{\mathbf{1}}$.

Sean β y β' bases de $\mathbb{R}^3$, $\beta = \{[1,1,1], [1,0,1], [0,0,1]\}$, $M_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (esta es la matriz que contiene en las columnas las coordenadas de los vectores de β' expresadas en la base β). Se pide calcular las coordenadas del vector $[4,4,5]_{\beta'}$ expresadas en la base canónica *(Puntuación:* 2.5*)*.

$\boxed{\mathbf{2}}$.

Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ de la que se conoce que $\beta = \{[5,5,0,0], [9,0,0,0]\}$ es una base de Ker (f), $f(0,0,5,0) = [5,5]$ y $f(0,0,0,6) = [0,6]$. Se pide calcular:

a) $M_{\beta_1\beta_2}(f)$ donde $\beta_1 = \{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}$ y β_2 es la base canónica de $\mathbb{R}^2$. *(Puntuación:* 2.5*)*.

b) Ecuaciones de Ker f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ *(Puntuación:* 2.5*)*.

$\boxed{\mathbf{3}}$.

Sea $A = \begin{pmatrix} 21 & -12 & 0 \\ 16 & -7 & 0 \\ 32 & -24 & 5 \end{pmatrix}$. Encuentra matrices D (diagonal) y P tales que $D = P^{-1}AP$ *(Puntuación:* 2.5*)*.

①

$$\beta = \{(1,1,1),(1,0,1),(0,0,1)\}$$

$$M_{\beta\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4,4,5)_{\beta'} \overset{?}{=} (\quad , \quad , \quad)$$

$$\beta' = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$v_1 = (1,0,0)_\beta = 1 \cdot (1,1,1) = (1,1,1)$$

$$v_2 = (4,1,0)_\beta = 4(1,1,1) + 1(1,0,1) = (5,4,5)$$

$$v_3 = (4,5,1)_\beta = 4(1,1,1) + 5(1,0,1) + 1(0,0,1) = (9,4,10)$$

$$(4,4,5)_{\beta'} = 4(1,1,1) + 4(5,4,5) + 5(9,4,10) = (69,40,74)$$

② $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

$\beta = \{(5,5,0\ 0), (9,0,0,0)\} \to$ base de $\ker f$

$f(0,0,5,0) = (5,5)$

$f(0,0,0,6) = (0,6)$

a) $\beta_1 = (1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}$

$\beta_2 = \beta_c^2$

$M_{\beta_1\beta_2}(f)$

- $f(1,1,1,1) = f\left(\frac{1}{5}(5,5,0,0) + \frac{1}{5}(0,0,5,0) + \frac{1}{6}(0,0,0,6)\right)$

$= \frac{1}{5} f(5,5,0,0) + \frac{1}{5} f(0,0,5,0) + \frac{1}{6} f(0,0,0,6)$

$= \frac{1}{5}(0,0) + \frac{1}{5}(5,5) + \frac{1}{6}(0,6) = (1,2)$

$\cdot f(1,1,1,0) = f\left(\frac{1}{5}(5,5,0,0) + \frac{1}{5}(0,0,5,0)\right) =$

$= \frac{1}{5} f(5,5,0,0) + \frac{1}{5} f(0,0,5,0) =$

$= (0,0) \quad + \frac{1}{5}(5,5) = (1,1)$

$\cdot f(1,1,0,0) = f\left(\frac{1}{5}(5,5,0,0)\right) = \frac{1}{5} f(5,5,0,0)$

$= (0,0)$

$\cdot f(1,0,0,0) = f\left(\frac{1}{9}(9,0,0,0)\right) = \frac{1}{9} f(9,0,0,0)$

$= (0,0)$

$$M_{\beta_1\beta_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $(x, y, z, t) \in \operatorname{Ker} f$

$$(x, y, z, t) = \frac{y}{5}(5, 5, 0, 0) + \frac{x-y}{9}(9, 0, 0, 0)$$

$$+ \frac{z}{5}(0, 0, 5, 0) + \frac{t}{6}(0, 0, 0, 6)$$

$$f(x, y, z, t) = \frac{y}{5} f(5, 5, 0, 0) + \frac{x-y}{9} f(9, 0, 0, 0)$$

$$+ \frac{z}{5} f(0, 0, 5, 0) + \frac{t}{6} f(0, 0, 0, 6)$$

$$= \frac{z}{5}(5, 5) + \frac{t}{6}(0, 6) = (z, z+t) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{(x, y, z, t) \text{ tq } z = z + t = 0\}$$

$$= \{(x, y, z, t) \text{ tq } z = t = 0\}$$

3

$$A = \begin{pmatrix} 21 & -12 & 0 \\ 16 & -7 & 0 \\ 32 & -24 & 5 \end{pmatrix}$$

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} 21-x & -12 & 0 \\ 16 & -7-x & 0 \\ 32 & -24 & 5-x \end{vmatrix} =$$

$$= (5-x)\begin{vmatrix} 21-x & -12 \\ 16 & -7-x \end{vmatrix} = (5-x)\left[(21-x)(-7-x) + 12 \cdot 16\right]$$

$$= (5-x)(x^2 - 14x + 45) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 5 \\ x = 9 \end{cases}$$

$\sigma_A = \{5, 9\}$ $\quad m(5) = 2$

$m(9) = 1$

- $V_5 = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } (A - 5I_3)\vec{x} = \vec{0} \}$

$$A - 5I_3 = \begin{pmatrix} 16 & -12 & 0 \\ 16 & -12 & 0 \\ 32 & -24 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rg(A - 5I_3) = 1 \Rightarrow \dim V_5 = m(5) = 2$$

$(x, y, z) \in V_5 \Rightarrow 16x - 12y = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x - 3y = 0$

$$\beta_{V_5} = \{ (0, 0, 1), (3, 4, 0) \}$$

- $V_9 = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } (A - 9I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \}$

$$A - 9I_3 = \begin{pmatrix} 12 & -12 & 0 \\ 16 & -16 & 0 \\ 32 & -24 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$rg(A-9I_3)=2 \Rightarrow \dim V_9 = m(9) = 1$$

$$(x,y,z) \in V_9 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ 8x-6y-z=0 \end{cases}$$

$$\beta_{V_9} = \{(1,1,2)\}$$

• La matriz es diagonalizable

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad y$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$