Ingeniero Industrial
Asignatura: *Optimización y Simulación*
Examen de Teoría. Convocatoria Julio 2008

1. **(1 pto)** Consideremos el problema de programación lineal

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & c \cdot x \\ \text{sujeto a} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

siendo $c, x \in \mathbb{R}^N$, $A \in \mathcal{M}^{M \times N}$, $b \in \mathbb{R}^M$. Explica brevemente pero de manera precisa en qué consiste el Algoritmo del Simplex para resolver este problema. En particular, se han de explicar los conceptos de variable básica, variable no básica, coste básico, coste no básico, solución básica, vector de costes reducido, variable que entra en la base y variable que sale.

`Solución:` Pregunta teórica explicada en clase de prácticas. Ver los apuntes de clase.

2. **(1 pto)** Supongamos que queremos diseñar un voladizo de longitud fija dada L y de sección rectangular para conseguir peso mínimo (véase Figura 1). Si sobre el extremo libre actúa una carga vertical F, entonces tenemos una restricción sobre la deformación máxima transversal permitida de dicho extremo libre. Sean x e y la anchura y la altura que se buscan y denotemos por S la deformación máxima permitida del exteemo libre, por γ el peso específico, por E el módulo de Young del material del voladizo y por $I = xy^3/12$ el momento de inercia de la sección rectangular. Teniendo en cuenta que el peso del voladizo se define como el producto del peso específico por el volumen del voladizo, y que, por una parte por razones de seguridad $x \geq 0.5$, y por otra parte, de acuerdo con la teoría de resistencia de materiales, la deformación en el extremo libre viene dada por

$$\frac{FL^3}{3EI},$$

escribe el modelo matemático para este problema. ¿De qué tipo de problema de optimización se trata?

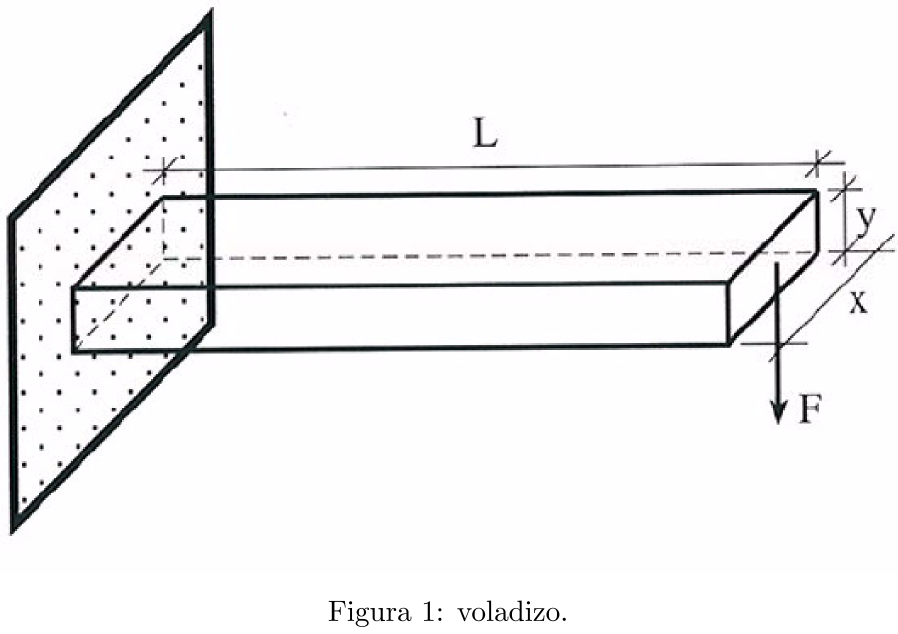

Figura 1: voladizo.

`Solución:` Considerando las variables de optimización

$$\begin{cases} x = & \text{anchura del voladizo} \\ \\ y = & \text{altura del voladizo} \end{cases}$$

el problema se formula en los términos

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & f(x,y) = \gamma Lxy \\ \text{sujeto a} & \\ & \frac{4FL^3}{Exy^3} \leq S \\ & x \geq 0.5 \\ & y \geq 0. \end{cases}$$

Se trata de un problema de programación no lineal.

3. **(2 ptos)** Consideremos el problema de Cálculo de Variaciones siguiente:

$$(PCV) \quad \underset{u\in\mathcal{A}}{\text{Minimizar}} \qquad I(u) = \int_a^b F\big(x, u(x), u'(x)\big)\, dx$$

donde

$$\mathcal{A} = \{u : [a,b] \to \mathbb{R} : u \text{ es derivable, } u(a) = \alpha \quad \text{y} \quad u(b) = \beta\}$$

y

$$\begin{array}{rccc} F: & [a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,\lambda,\xi) & \mapsto & F(x,\lambda,\xi) \end{array}$$

Demuestra que si F es convexa respecto de (λ, ξ) para cada x fijo y que si u es solución del problema

$$\text{(E-L)} \begin{cases} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}(x, u(x), u'(x))\right) = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, u(x), u'(x)) \quad \text{en} \quad [a,b] \\ u(a) = \alpha \quad \text{y} \quad u(b) = \beta, \end{cases}$$

entonces u es solución del problema (PCV).

`Solución:` Pregunta teórica explicada en clase. Ver los apuntes de clase.

4. Consideremos el problema de control óptimo

$$\underset{u}{\text{Minimizar}} \quad J(u) = \int_0^T u^2(t)\, dt$$

sujeto a

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = u(t) \\ x_1(0) = x_1^0 \\ x_2(0) = x_2^0 \\ x_1(T) = x_2(T) = 0 \\ |u(t)| \leq 1 \quad \text{para todo } t > 0, \end{cases}$$

donde $T > 0$ es un tiempo fijo, $x = (x_1, x_2) : [0,T] \to \mathbb{R}^2$ es la variable de estado y $u : [0,T] \to \mathbb{R}$ es el control. Se pide:

(a) (0.75 ptos) Utiliza el principio de Pontryagin para concluir que la estrategia de control óptima para este problema es

$$u(t) = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad p_2(t) < -1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 < p_2(t) < 1 \\ -1 & \text{si} \quad p_2(t) > 1, \end{cases}$$

donde $p_2(t)$ es la segunda componente del co-estado.

(b) (0.75 ptos) Dibuja el plano de fases de este problema y señala sobre dicho plano la trayectoria óptima que ha de seguir el estado óptimo asociado a los datos iniciales $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = -1$.

(c) (0.5 ptos) ¿Es cierto que las condiciones necesarias de optimalidad que has usado en el apartado (a) caracterizan la solución óptima del problema de control? ¿Por qué?

`Solución:` (a) Introducimos el Hamiltoniano

$$H = u^2 + (p_1, p_2) \cdot (x_2, u) = u^2 + p_1 x_2 + p_2 u.$$

La ecuación del co-estado es

$$\begin{cases} p_1'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \\ p_2'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1(t) \end{cases}$$

que tiene por solución

$$\begin{cases} p_1(t) = c_1 \\ \\ p_2(t) = -c_1 t + c_2. \end{cases}$$

A continuación escribimos la condición de mínimo de Pontryagin: siendo $(x(t), p(t), u(t))$ óptimos para nuestro problema, entonces

$$H(t, x(t), p(t), u(t)) = \min_{-1 \le v \le 1} H(t, x(t), p(t), v)$$

la cual se traduce en

$$u^2(t) + p_2(t) u(t) = \min_{-1 \le v \le 1} G(v)$$

con $G(v) = v^2 + p_2(t) v$. A partir de esta expresión para la función $G(v)$ es sencillo comprobar que se da la siguiente casuística:

- Si $p_2(t) > 1$, entonces $G(v)$ alcanza su mínimo en $v = -1$,
- Si $p_2(t) < -1$, entonces $G(v)$ alcanza su mínimo en $v = +1$, y
- Si $-1 < p_2(t) < 1$, entonces $G(v)$ alcanza su mínimo en $v = 0$.

De la condición de Pontryagin deducimos entonces que el control óptimo es de tipo bang-off-bang con la función $p_2(t)$ ejerciendo el papel de interruptor (switch).

(b) El plano de fases es exactamente el mismo que para el problema de control óptimo con consumo mínimo de combustible estudiado en clase, es decir, parábolas para el caso de controles $u = +1$ y $u = -1$, y rectas para $u = 0$. Como el estado inicial $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = -1$ queda por debajo de la curva switch, en primer lugar hemos de movernos siguiendo una parábola con control $u = +1$. A continuación hemos de cambiar a una recta situada en la región $x_2 > 0$ (control $u = 0$).

Finalmente, bajamos por la curva swicth asociada a un control $u = -1$. El tiempo del primer cambio de control depende del tiempo final de control T el cual, obviamente, ha de ser mayor que el tiempo mínimo de control para este problema que vimos en clase.

(c) Las condiciones necesarias de optimalidad de este problema caracterizan por completo el control óptimo ya que nuestro problema es convexo. Efectivamente: el lagrangiano $F(t, x, u) = u^2$ es convexo respecto a (x, u), la ley de estado $f(x, u) = (x_2, u)$ es lineal, y el conjunto que nos define las restricciones sobre el control $K = [-1, 1]$ es convexo.

5. Responde si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas y justifica la respuesta:

(a) (0.5 ptos) Si (x, μ, λ) es solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \nabla f(x) + \mu \cdot \nabla g(x) + \lambda \cdot \nabla h(x) = 0, & \\ \mu_j g_j(x) = 0, \quad \mu_j \geq 0, & 1 \leq j \leq m \\ g_j(x) \leq 0, & 1 \leq j \leq m \\ h_k(x) = 0, & 1 \leq k \leq d \end{cases}$$

entonces x es solución del problema de programación no lineal

$$(\text{PPNL}) \begin{cases} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \end{cases}$$

siendo $g = (g_1, \cdots, g_m)$ y $h = (h_1, \cdots, h_d)$.

(b) (0.5 ptos) El problema dual asociado al problema de programación no lineal

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{sujeto a} & \\ & x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$$

consiste en

$$\begin{cases} \text{Maximizar} & \Theta(\mu) = -\frac{\mu^2}{2} + 4\mu \\ \text{sujeto a} & \\ & \mu \geq 0. \end{cases}$$

Además, ambos problemas son equivalentes.

`Solución:` (a) En general es falso. Para que las soluciones del sistema de Kuhn-Tucker sean soluciones del problema de programación no lineal se han de dar las siguientes hipótesis de convexidad: (i) el coste f ha de ser convexo, (ii) la función g, restricción de desigualdad ha de ser convexa, y (iii) la función h que proporciona la restricción de igualdad ha de ser afín.

(b) Es cierto. Si escribimos la restricción de desigualda en su forma estandar

$$g(x_1, x_2) = -x_1 - x_2 + 4,$$

entonces el mínimo del Lagrangiano

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_1, x_2, \mu) &= f(x_1, x_2) + \mu g(x_1, x_2) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + \mu(-x_1 - x_2 + 4) \end{aligned}$$

se alcanza cuando su gradiente, respecto a (x_1, x_2) se anula, es decir,

$$x_1 = x_2 = \frac{\mu}{2}.$$

Por tanto, el coste dual

$$\Theta(\mu) = \min_{(x_1,x_2)} \mathcal{L}(x_1, x_2, \mu) = -\frac{\mu^2}{2} + 4\mu.$$

Con todo ello se tiene que efectivamente el problema dual es el planteado en el enunciado. Dado que el coste f es estrictamente convexo y la función $g(x_1, x_2)$ que da la restricción de desigualdad es lineal, ambos problemas (primal y dual) son equivalentes.