

Fundamentos Matemáticos del Método de los Elementos Finitos

Francisco Periago Esparza
Dpto. Matemática Aplicada y Estadística
Universidad Politécnica de Cartagena
Email: f.periago@upct.es

Uno de los métodos numéricos más utilizados actualmente tanto a nivel profesional en empresas de ingeniería como a nivel de investigación en escuelas de ingeniería y facultades de matemáticas es el Método de los Elementos Finitos (MEF para abreviar). Este método fue desarrollado a partir de la década de los años 40 independientemente por investigadores matemáticos e ingenieros. Estos últimos interesados básicamente en problemas de cálculo de estructuras. Muy rápidamente, el método fue aplicado en otros muchos campos de la ingeniería tales como la difusión de calor o la mecánica de fluidos. El desarrollo del MEF coincidió además en el tiempo con otros dos avances que sin duda han marcado gran parte del camino de la investigación en matemáticas desde los años 40 y que están muy estrechamente ligados al MEF. Por un lado, el nacimiento de la Teoría de las Distribuciones permitió el inicio del estudio de las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) a partir del concepto de solución débil, que como veremos más adelante en estas notas, es el concepto de solución que se utiliza en el MEF. Por otro lado, el rápido avance de los ordenadores posibilitó el desarrollo del Análisis Numérico, rama ésta de las matemáticas que se encontraba sin duda en un período de estancamiento bastante profundo. La conjunción de estos dos factores junto con el enorme interés que la simulación numérica de modelos matemáticos tiene en ingeniería han ido colocando al MEF en un lugar muy destacado tanto en el mundo de la matemática aplicada como de la ingeniería.

En estas notas trataremos de proporcionar las ideas matemáticas básicas en que se fundamenta el MEF. Empezaremos por deducir a partir de algunas leyes

físicas apropiadas algunos modelos matemáticos sencillos pero que son de un gran interés en campos tales como la mecánica de fluidos, la difusión de calor, y la elasticidad lineal. Aunque los fenómenos físicos estudiados son de una naturaleza completamente distinta, las Matemáticas involucradas son esencialmente las mismas, lo cual pone de manifiesto el enorme poder del lenguaje matemático. Veremos que dichos modelos se componen de una ecuación (escalar o vectorial) en derivadas parciales, en la que la incógnita es precisamente el estado del sistema objeto de estudio; dicha ecuación vendrá acompañada de una o varias condiciones de contorno que son datos de nuestro problema y que representan el estado del mismo sobre su frontera. Todo ello, es decir, la ecuación diferencial y sus condiciones de contorno forman lo que llamamos un *modelo matemático*. Nos centraremos aquí al estudio de sistemas estacionarios, aunque también contemplaremos brevemente en la parte final el caso de sistemas dependientes del tiempo.

Seguidamente nos ocuparemos del *análisis matemático* de dichos modelos. Ello nos forzará al estudio de dichos sistemas siguiendo el llamado *Método Variacional* para cuyo desarrollo riguroso necesitaremos de la ya mencionada *Teoría de las Distribuciones*. Todos estos prerrequisitos nos permitirán entender de manera clara un nuevo concepto de solución de una ecuación diferencial: el concepto de *solución débil*. Los elementos básicos del análisis matemático de cualquier modelo (existencia de solución, unicidad de la misma, y dependencia continua de dicha solución con los datos del problema) los obtendremos entonces como consecuencia de uno de los grandes teoremas de esta disciplina: el *Teorema de Lax-Milgram*.

A continuación nos ocuparemos del cálculo numérico de las soluciones débiles de nuestros modelos matemáticos. Es ahora cuando entra en escena propiamente el MEF. En dicho método nos encontramos con un ejemplo muy ilustrativo de cómo a veces los métodos teóricos usados en el análisis matemático de un modelo (en el caso que nos ocupa el Método Variacional) iluminan el desarrollo del correspondiente algoritmo numérico de cálculo de la solución. A través de los modelos matemáticos que consideraremos en estas notas y a partir siempre del Método Variacional mostraremos las ideas básicas en que se fundamenta el MEF. Presentaremos también algunas simulaciones numéricas obtenida con el código de elementos finitos de Matlab de algunos de los modelos considerados.

Finalmente, analizaremos la formulación con elementos finitos de un modelo sencillo de EDP donde interviene como variable el tiempo.

1 Modelización Matemática

En esta primera parte deduciremos, a partir de algunas leyes físicas apropiadas, algunos modelos matemáticos que aparecen en mecánica de fluidos, difusión de calor, y elasticidad lineal. Por una cuestión de brevedad de esta notas, no entraremos en detalle en la deducción de estos modelos. Remitimos al lector interesado a las referencias aquí incluidas.

1.1 Mecánica de Fluidos

El comportamiento de los fluidos (líquidos, gases y plasmas) se modeliza matemáticamente por medio de un sistema de tres ecuaciones en derivadas parciales no lineales que constituyen las famosas ecuaciones de Navier-Stokes, deducidas por Navier (hacia 1827) para el caso de fluidos incompresibles, y por Stokes (1845) para el caso general. Para una deducción completa de estas ecuaciones a partir de las leyes de conservación de la Mecánica Clásica puede consultarse [10]. No entraremos aquí a analizar dichas ecuaciones. Nos limitaremos a presentar un modelo simplificado pero suficientemente ilustrativo.

Supongamos que deseamos estudiar el movimiento de un fluido (por ejemplo un líquido) que se mueve en el interior de un determinado sólido (una tubería, por ejemplo). Denotemos por Ω la región ocupada por el fluido, y por Γ el sólido que lo encierra. Matemáticamente, supondremos que Ω es un conjunto acotado de \mathbb{R}^3 y que Γ es una superficie regular. Sea $\mathbf{V} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo de velocidades del fluido que, para no complicar demasiado las cosas, supondremos estacionario, esto es, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z)$ sólo depende de la posición y no del tiempo. En la figura que sigue representamos un fluido moviéndose en el interior de una tubería cilíndrica.



Supongamos que nuestro fluido es incompresible (los líquidos son de este tipo) lo cual matemáticamente se expresa a través de la ecuación

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (1)$$

Supongamos ahora que nuestro fluido es irrotacional, esto es, $\operatorname{rot} \mathbf{V} = 0$ lo cual equivale a la existencia de un campo escalar $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^1 , que satisface que $\mathbf{V} = \nabla u$. Por tanto,

$$\mathbf{V} = \nabla u. \quad (2)$$

Combinando (1) y (2) obtenemos la ecuación $\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u = 0$, donde

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

es el Laplaciano de u .

En este tipo de problemas necesitamos conocer el comportamiento del fluido sobre Γ ; es lo que llamamos una *condición de contorno*. Existe una gran variedad de condiciones de contorno dependiendo del tipo de problema que estemos estudiando. Así, por ejemplo, si conocemos el flujo que escapa por el sólido donde está confinado el fluido, matemáticamente esta condición se escribe en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u \cdot \mathbf{n} = g,$$

donde $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ es una función conocida, y \mathbf{n} es el vector normal unitario exterior a Γ . Con todo ello tenemos ya completo nuestro modelo matemático. Se trata de encontrar una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga (en algún sentido que precisaremos más adelante) las condiciones

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

1.2 Difusión de Calor

Sin entrar en detalles sobre su deducción, un modelo matemático simplificado (como de hecho son todos los modelos) para el problema de difusión de calor en régimen estacionario en una región Ω donde se asume una generación interna de calor representada por la función $f(\mathbf{x})$ y donde también se tiene en cuenta un intercambio térmico con el medio que rodea a nuestra región Ω y que se supone está a temperatura $g(\mathbf{x})$ es

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) & \text{en } \Omega \\ u + \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g & \text{sobre } \Gamma \end{cases}$$

donde $\kappa = \kappa(\mathbf{x}) > 0$ depende de las propiedades físicas del material del que está constituida nuestra barra y se denomina *conductividad térmica*. Por su parte $u(\mathbf{x})$ representa la temperatura y es la incógnita de nuestro problema.

1.3 Elasticidad Lineal

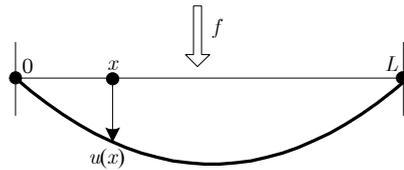
En esta sección nos ocuparemos del estudio de la flexión de sólidos que tienen un comportamiento elástico lineal. Las ecuaciones que modelizan este tipo de fenómenos se obtienen a partir de las leyes de conservación de la Mecánica Clásica (conservación de la masa, de la cantidad de movimiento, y del momento angular), y de una ley constitutiva propia de este tipo de medios: *la ley de Hooke*. No entraremos en detalle en este tipo de cuestiones. Para un estudio más detallado se recomienda [5]. Nos limitaremos pues a enunciar las ecuaciones de equilibrio para algunos casos sencillos.

Un modelo matemático sencillo para el estudio de la flexión de una membrana elástica Ω (matemáticamente, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio acotado), sujeta en el borde, sobre la que actúa una fuerza vertical $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y que produce un desplazamiento (también en la dirección vertical) $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es

$$\begin{cases} -\left(\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)\right) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \Gamma \end{cases}$$

donde $\lambda, \mu > 0$ son dos constantes que dependen del tipo de material y se denominan *coeficientes de Lamé*, y Γ es el borde de Ω .

La versión uno-dimensional de este problema consiste en estudiar la flexión de una cuerda elástica (pongamos de longitud L), sujeta en los extremos y sobre la que actúa una fuerza vertical f .



Cuerda elástica sujeta en los extremos.

En este caso, el modelo matemático a resolver es

$$(PM) \begin{cases} -(\kappa u')' = f & \text{en }]0, L[\\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

donde por simplicidad hemos escrito $\kappa = \lambda + 2\mu$.

Como hemos podido comprobar a lo largo de esta sección, *muchas de las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos, la Difusión de Calor y la Elasticidad Lineal son esencialmente las mismas.*

2 Análisis Matemático: el Método Variacional

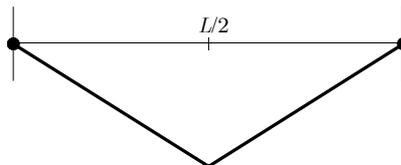
Nos ocuparemos a continuación del análisis matemático del tipo de modelos descritos en la sección anterior. Son muchas las propiedades matemáticas que se pueden estudiar de un modelo dado. Hay, sin embargo, tres de ellas que es obligado contemplar: la existencia de solución, su unicidad, y la dependencia continua de la solución respecto de los datos del problema. En caso de obtener una respuesta afirmativa a cada una de las tres cuestiones anteriores decimos que *el modelo matemático está correctamente planteado.*

2.1 Hacia un Nuevo Concepto de Solución de una Ecuación Diferencial

Consideremos el modelo matemático para la flexión de una cuerda elástica que recordemos está dado por

$$\begin{cases} -(\kappa u')' = f & \text{en }]0, L[\\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases} \quad (PM)$$

Supongamos ahora que la fuerza que actúa sobre la cuerda está localizada en un único punto $x = L/2$. Es evidente que la cuerda adopta la forma dada en el siguiente gráfico.



Pero una función como la dada en este gráfico no es derivable en $x = L/2$. Por tanto, una tal función no puede ser solución de la ecuación $-(\kappa u)' = f$ en $]0, L[$, al menos en sentido clásico, es decir, en el sentido de ser u dos veces derivable en cada punto del intervalo abierto $]0, L[$ y verificando la ecuación diferencial en dicho intervalo. Este sencillo ejemplo muestra que es necesario entender mejor el concepto de solución de una ecuación diferencial.

¿Qué se puede hacer entonces?

Consideremos de nuevo el problema de la cuerda y tratemos de analizar dicho problema bajo otro punto de vista. Si la fuerza f produce un *desplazamiento virtual* $v(x)$ en el punto x , entonces el *trabajo virtual* producido por $f(x)$ es $f(x)v(x)$, con lo cual el trabajo ejercido por f a lo largo de toda la cuerda viene dado por

$$\int_0^L f(x)v(x) dx.$$

Decimos desplazamiento virtual porque se trata de un desplazamiento no real; el desplazamiento real que produce f es u . Lo mismo es aplicable para el trabajo virtual. Procediendo de la misma forma en el término de la izquierda de la ecuación $-(\kappa u)' = f$ e integrando por partes,

$$\int_0^L -(\kappa(x)u'(x))'v(x) dx = \int_0^L \kappa(x)u'(x)v'(x) dx$$

ya que estamos suponiendo que $v(0) = v(L) = 0$. Este proceso transforma la ecuación diferencial $-(\kappa u)' = f$ en la ecuación integral

$$\int_0^L \kappa(x)u'(x)v'(x) dx = \int_0^L f(x)v(x) dx. \quad (3)$$

Por tanto, podemos pensar en una solución de (PM) como una función $u : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, con $u(0) = u(L) = 0$, la cual satisface (3) para todos los posibles desplazamientos v tales que $v(0) = v(L) = 0$. Una de las principales ventajas de este procedimiento es que de esta forma reducimos el número de requerimientos que sobre derivabilidad ha de satisfacer u . Sin embargo, aún quedan dos puntos principales que no están claros en absoluto:

- (1) u debe ser al menos una vez derivable, pero éste no es el caso cuando f es una carga concentrada en un punto,

- (2) si la carga está localizada en $x = L/2$ (es decir, $f(x) = 0$ para todo $0 \leq x \leq L$, $x \neq L/2$), entonces $\int_0^L f(x)v(x) dx = 0$ con lo cual $u = 0$ satisface (7), en contradicción con la experiencia física.

Estos dos hechos muestran que *es preciso entender mejor la forma de tratar matemáticamente con el concepto de carga localizada en un punto*. En una primera aproximación, supongamos que la carga está distribuida en una pequeña porción alrededor del punto $x = L/2$, esto es,

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/(2\varepsilon), & \frac{L}{2} - \varepsilon \leq x \leq \frac{L}{2} + \varepsilon \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

para algún $\varepsilon > 0$ pequeño. El trabajo producido por esta carga produciendo un desplazamiento v viene ahora dado por

$$\int_0^L f_\varepsilon(x)v(x) dx = \int_{\frac{L}{2}-\varepsilon}^{\frac{L}{2}+\varepsilon} \frac{v(x)}{2\varepsilon} dx = v(\xi_\varepsilon),$$

donde $\frac{L}{2} - \varepsilon \leq \xi_\varepsilon \leq \frac{L}{2} + \varepsilon$, y la igualdad es debida al teorema de la media del Cálculo Integral. Tomando ahora límites para $\varepsilon \rightarrow 0$ y suponiendo que v es continua concluimos que el trabajo producido por una carga concentrada en el punto $L/2$ y produciendo un desplazamiento v vale $v(L/2)$. Por tanto, una forma de tratar matemáticamente con el concepto de carga localizada en un punto x_0 es por medio de una aplicación, llamémosla δ_{x_0} , la cual actúa sobre una cierta clase de funciones y produce números siguiendo la regla

$$\delta_{x_0} : v \mapsto \langle \delta_{x_0}, v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} v(x_0).$$

Este fue el origen de la Teoría de las Distribuciones desarrollada por el matemático francés Laurent Schwartz en la década de los años 40, y por la que recibió en 1950 el premio de más prestigio con que puede ser galardonado un matemático: *la medalla Fields*.

2.2 Introducción a la Teoría de Distribuciones y Espacios de Sobolev

En esta sección introduciremos las nociones mínimas sobre teoría de distribuciones que son necesarias para definir los espacios de Sobolev, los cuales juegan un papel esencial en el Método Variacional y por consiguiente en el Método de los Elementos Finitos. Para un estudio más en profundidad del tema se recomienda [3, 9]. En esta sección y en las que siguen supondremos que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, es un conjunto acotado cuya frontera Γ es una curva de clase C^1 a trozos si $n = 2$, y una superficie regular a trozos si $n = 3$. Trabajaremos sin embargo la mayor parte del tiempo en el caso $n = 1$ donde $\Omega =]a, b[$ será un intervalo acotado. Supondremos

también conocidos los elementos básicos de la teoría de espacios de Hilbert, en particular, se supondrán conocidas las propiedades básicas del espacio

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\Omega} f^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < \infty \right\}.$$

Este espacio juega un papel destacadísimo tanto en Matemáticas como en Física e Ingeniería. Desde un punto de vista matemático, $L^2(\Omega)$ equipado con el producto escalar y la norma

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \|f\|_{L^2} = \left(\int_{\Omega} f^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/2}, \quad f \in L^2(\Omega),$$

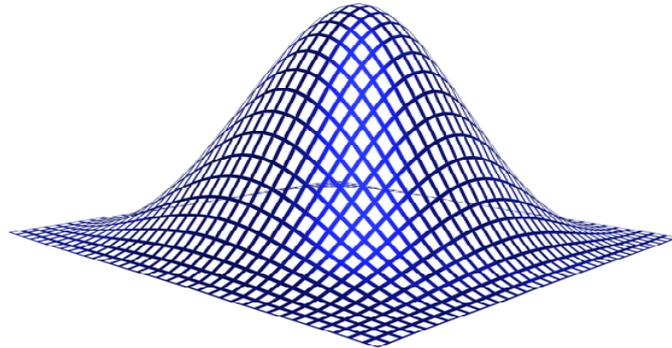
es un Hilbert (*con todo lo que eso significa!*). Bajo la óptica de la Física y la Ingeniería, $L^2(\Omega)$ es donde se agrupan buena parte de las magnitudes físicas que tienen energía finita.

2.2.1 Definición de Distribución. Ejemplos

Al igual que en la sección anterior, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ denotará un punto genérico de Ω . Dada una función continua $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, llamaremos soporte de φ , denotado $\text{sop } \varphi$, al conjunto

$$\text{sop } \varphi = \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega : \varphi(\mathbf{x}) \neq 0\}}.$$

Por $\mathcal{D}(\Omega)$ denotaremos al espacio de las funciones test $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que son de clase C^∞ y con soporte compacto contenido en Ω . En la gráfica que sigue se muestra el aspecto típico de una función test en el caso $n = 2$.



Definición 1 Dada una sucesión $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$, diremos que dicha sucesión converge en el sentido del espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ a una función $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si se verifican las siguientes propiedades:

- (i) Existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que $\text{sop } \varphi_m \subseteq K$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

(ii) Tanto φ_m como todas sus derivadas parciales de cualquier orden convergen uniformemente sobre Ω .

Definición 2 Llamaremos distribución sobre Ω a toda aplicación lineal

$$\begin{aligned} u : \mathcal{D}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\rightsquigarrow \langle u, \varphi \rangle \end{aligned}$$

tal que si $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ converge a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, en el sentido del espacio $\mathcal{D}(\Omega)$, entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle u, \varphi_m \rangle = \langle u, \varphi \rangle.$$

Denotaremos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ al espacio de todas las distribuciones sobre Ω .

Ejemplo 1 Dada $f \in L^2(\Omega)$, no es difícil comprobar que la aplicación

$$\begin{aligned} u_f : \mathcal{D}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\rightsquigarrow \langle u_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f \varphi \end{aligned}$$

es una distribución sobre Ω .

Ejemplo 2 Dado $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, se llama distribución Delta de Dirac centrada en \mathbf{x}_0 a la aplicación

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{x}_0} : \mathcal{D}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\rightsquigarrow \langle \delta_{\mathbf{x}_0}, \varphi \rangle = \varphi(\mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

Por supuesto, la aplicación anterior define una distribución.

Nótese cómo la definición de la delta de Dirac recoge las ideas intuitivas sobre este concepto que hemos considerado anteriormente para el caso de cargas puntuales.

2.2.2 Cálculo con Distribuciones. La Derivada de una Distribución

Para motivar la definición de derivada de una distribución, supongamos que $f \in C^1(]a, b[)$ y que $\varphi \in \mathcal{D}(]a, b[)$. Como $f' \in C(]a, b[)$, podemos considerar f' como distribución y por tanto, integrando por partes se tiene que

$$\langle f', \varphi \rangle = \int_a^b f'(x) \varphi(x) dx = - \int_a^b f(x) \varphi'(x) dx = - \langle f, \varphi' \rangle,$$

ya que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. La identidad $\langle f', \varphi \rangle = - \langle f, \varphi' \rangle$ sigue teniendo sentido si se sustituye f por una distribución cualquiera $u \in \mathcal{D}'(]a, b[)$. Este hecho es el que inspira la siguiente definición.

Definición 3 Sea $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Se define la derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$, como la distribución

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} : \mathcal{D}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\rightsquigarrow \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \rangle = - \langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle. \end{aligned}$$

Ejemplo 3 Aplicando la definición anterior de distribución se puede comprobar que la derivada distribucional de la función de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

es δ_0 , la delta de Dirac centrada en cero.

2.2.3 Espacios de Sobolev

Definición 4 Se llama espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ al espacio de las funciones $u \in L^2(\Omega)$ cuyas derivadas parciales (en el sentido de las distribuciones) pertenecen a $L^2(\Omega)$, esto es,

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}.$$

El espacio $H^1(\Omega)$ dotado del producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2}$$

del cual deriva la norma

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

es un espacio de Hilbert.

Otro espacio de Sobolev que resulta también muy útil en el estudio de problemas de contorno es $H_0^1(a, b)$ que se define como

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma} = 0\}.$$

No entraremos en detalles sobre las propiedades de estos espacios que sin embargo son cruciales en el Método Variacional. El lector interesado deberá acudir por ejemplo a [2, 3, 8].

2.3 Formulación Variacional. El Teorema de Lax-Milgram

Aunque no es sencillo, se puede demostrar que la Delta de Dirac, definida en principio sobre el espacio de funciones test $\mathcal{D}([0, L])$, se puede extender a una forma lineal y continua definida sobre H_0^1 , esto es, $\delta_{x_0} : H_0^1(0, L) \rightarrow \mathbb{R}$. Las funciones f de L^2 también pueden ser consideradas como formas lineales y continuas sobre H_0^1 por medio de la identidad

$$f : H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \langle f, v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int f v.$$

Estas nuevas ideas conducen a una nueva formulación de (PM). De manera precisa, dada una forma lineal y continua $f : H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$ y la forma bilineal

$$a : H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto a(u, v) = \int_0^L \kappa(x) u'(x) v'(x) dx,$$

una función $u \in H_0^1$ se dice que es una *solución débil* de (PM) si la identidad

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle$$

se satisface para todo $v \in H_0^1$.

Todo lo anterior puede ser escrito de una forma más general (la cual es muy útil en la práctica) de la siguiente forma:

Definición 5 (Problema Variacional) Dado un espacio de Hilbert $(H, \|\cdot\|)$, una forma lineal y continua $f : H \rightarrow \mathbb{R}$, y una forma bilineal $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, por problema variacional abstracto entendemos el problema de encontrar $u \in H$ tal que

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \text{para todo } v \in H. \quad (PV)$$

A este elemento $u \in H$ se le llama *solución débil* de (PV).

La existencia, unicidad, y dependencia continua respecto de los datos iniciales de solución débil para (PV) se obtiene a través del Teorema de Lax-Milgram. La demostración de este resultado puede encontrarse en [2, Corolario V.8, p. 84] y en [3, T. 12.6, p. 224].

Teorema 1 (Lax-Milgram) Si la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es continua (es decir, existe $M > 0$ tal que $|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|$ para todo $u, v \in H$) y coerciva (esto significa que existe $m > 0$ tal que $a(u, u) \geq m \|u\|^2$ para todo $u \in H$), entonces el problema variacional (PV) tiene una única solución débil. Además,

$$\|u\| \leq \frac{1}{m} \| \|f\| \|,$$

donde $\| \|f\| \| = \sup \{ |\langle f, v \rangle|, v \in H, \|v\| \leq 1 \}$.

Si además, $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica (es decir, $a(u, v) = a(v, u) \forall u, v \in H$), entonces la solución débil u es el punto donde el funcional de energía

$$J : H \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \langle f, v \rangle$$

alcanza su mínimo.

2.4 Aplicación a la Resolución de Problemas de Contorno

Consideremos el problema modelo unidimensional (PM). La forma de proceder en el Método Variacional es esencialmente la siguiente: supongamos que u es una solución clásica de (PM). Si multiplicamos la ecuación diferencial por una función v , que sea por ejemplo de clase C^2 , entonces

$$-(\kappa u')' v = f v$$

e integrando ahora por partes en $]0, L[$,

$$-[\kappa(x) u'(x) v(x)]_0^L + \int_0^L \kappa u' v' = \int_0^L f v.$$

Si la función v satisface que $v(0) = v(L) = 0$, entonces obtenemos

$$\int_0^L \kappa u' v' = \int_0^L f v. \quad (4)$$

Recuérdese también que en lugar de una función $f \in L^2$ podríamos poner de forma general una forma lineal y continua, llamémosla también $f : H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$, y cuya acción sobre una función v denotamos por $\langle f, v \rangle$.

Definición 6 *Se dice que $u : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ es una solución débil de (PM) si $u \in H_0^1(]0, L[)$ y si*

$$\int_0^L \kappa u' v' dx = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(]0, L[), \quad (5)$$

A esta formulación del problema (PM) se le llama formulación variacional o débil.

Las propiedades de existencia y unicidad de solución débil así como la dependencia continua con los datos se obtienen como aplicación directa del Teorema de Lax-Milgram haciendo uso de las propiedades de los espacios de Sobolev. Los detalles pueden encontrarse en [7].

2.4.1 Interpretación Física de la Formulación Variacional: Principio de los Trabajos Virtuales y Principio de Mínima Energía. Para poder interpretar físicamente este tipo de formulación variacional, supongamos que u representa el desplazamiento vertical de una cuerda elástica sujeta en los extremos y sobre la que actúa una fuerza, también en la dirección vertical, f . El término de la derecha en la expresión (5) representa físicamente el trabajo virtual (pues el desplazamiento v no es el real) ejercido por f . Por su parte, el término de la izquierda representa el trabajo, también virtual, de deformación interno. Recordemos que en Elasticidad Lineal este trabajo se define como el producto de la tensión (en nuestro caso, la tensión se corresponde con el término $\kappa u'$) por la deformación (en

este caso, la deformación virtual es v'). Así pues, la identidad (5) exprime lo que en Física se conoce con el nombre de *Principio de los Trabajos Virtuales*. Otra interpretación física la obtenemos a través del funcional de energía

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^L \kappa (v')^2 - \langle f, v \rangle,$$

el cual, en el caso que nos ocupa, representa la energía potencial elástica del sistema (esto es, energía interna de deformación menos energía potencial de las fuerzas exteriores). Recordemos que, gracias al Teorema de Lax-Milgram, la solución débil u es el punto donde esta energía se hace mínima. Haciendo uso del *Principio de Mínima Energía* y escribiendo la ecuación de Euler-Lagrange asociada al funcional de energía anterior, tras unos cálculos se puede comprobar que la condición $J'(u) = 0$ es equivalente a la ecuación diferencial

$$-(\kappa u')' - f = 0,$$

que es la ecuación de estado de nuestro problema.

3 Análisis Numérico: el MEF

En esta sección intentaremos mostrar las ideas básicas subyacentes al Método de los Elementos Finitos. Al igual que en la sección anterior, prescindiremos de los detalles más técnicos y analizaremos con detalle únicamente el caso unidimensional estacionario. Para un estudio más en profundidad se recomienda [8, 11].

3.1 Descripción del Método

En la sección anterior hemos visto que las soluciones débiles de nuestros problemas de contorno habitan en espacios de Hilbert tales como $H_0^1(0, L)$. Es por tanto en estos espacios donde debemos buscar si queremos encontrar dichas soluciones. La principal dificultad radica en el hecho de que estos espacios son enormemente grandes. De manera precisa, $H_0^1(0, L)$ es un espacio vectorial de *dimensión infinita*. La idea básica del MEF consiste en aproximar estos espacios de Hilbert (llamémosles genéricamente H) por algunos espacios apropiados de dimensión finita H_h , con h un parámetro positivo, de modo que se cumplan las siguientes condiciones:

- (a) $H_h \subseteq H$,
- (b) en H_h podemos formular y resolver fácilmente el problema variacional, y de esta forma encontrar una solución $u_h \in H_h$, y
- (c) cuando $h \searrow 0$, $H_h \nearrow H$, o en otras palabras, $\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0$, con u la solución débil del problema variacional en el espacio H y u_h la solución del problema variacional en H_h .

Veamos cómo funciona de manera concreta este método para el caso del problema (PM) considerado en la sección anterior. Por tanto, en lo que sigue tomaremos $H = H_0^1(0, L)$.

3.1.1 Construcción de los Espacios de Aproximación H_h

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $h = L/(n+1)$. El intervalo $[0, L]$ puede ser descompuesto en la forma

$$[0, L] = \bigcup_{i=0}^n [c_i, c_{i+1}], \quad c_i = ih, \quad 0 \leq i \leq n.$$

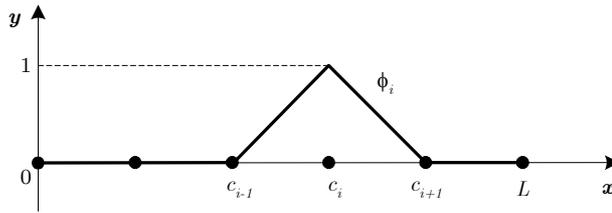
Consideremos ahora el espacio

$$H_h = \left\{ v : [0, L] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua, } v(0) = v(L) = 0 \text{ y } v|_{[c_i, c_{i+1}]} \in \mathcal{P}_1 \right\}$$

donde \mathcal{P}_1 denota el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 1. Se puede probar que $H_h \subseteq H_0^1$. En lo que respecta a la dimensión de H_h , la familia de funciones

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-c_i|}{h}, & c_{i-1} \leq x \leq c_{i+1} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

para $1 \leq i \leq n$, son una base de H_h . Por tanto, $\dim(H_h) = n$.



Una función ϕ_i de la base de H_h .

En la terminología del MEF, las funciones ϕ_i se denominan **funciones de forma**. Los puntos $c_i = ih$, $0 \leq i \leq n+1$, se llaman **nodos**, y los subintervalos $[c_i, c_{i+1}]$ junto con sus correspondientes funciones de forma se llaman **elementos finitos** (en este caso, elementos finitos de Lagrange de grado 1).

Nota 1 La construcción del espacio H_h no es única. Otras muchas posibilidades, de considerar por ejemplo polinomios de mayor grado, otro mallado del intervalo o ambas, son igualmente válidas.

3.1.2 Discretización del Problema Variacional en el Espacio H_h

El problema variacional (PM) en el espacio H_h se formula en los siguientes términos: encontrar

$$u_h = \sum_{i=1}^n u_h^i \phi_i \in H_h \tag{6}$$

tal que la identidad

$$a(u_h, v_h) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^L \kappa u_h' v_h' dx = \langle f, v_h \rangle \tag{7}$$

se cumpla para todo $v_h \in H_h$. Recordemos que si $f \in L^2$, entonces $\langle f, v_h \rangle = \int_0^L f v_h$, y si f es una Delta de Dirac en x_0 , entonces $\langle f, v_h \rangle = v_h(x_0)$.

Todo lo que hemos de hacer pues es encontrar el vector

$$U = \begin{bmatrix} u_h^1 \\ u_h^2 \\ \vdots \\ u_h^n \end{bmatrix} \tag{8}$$

ya que al ser las funciones ϕ_i conocidas, una vez calculado U tendremos la solución aproximada u_h . Nótese también que

$$u_h(c_j) = \sum_{i=1}^n u_h^i \phi_i(c_j) = u_h^j,$$

es decir, *las coordenadas del vector incógnita U , que hemos de calcular, son los valores de la solución aproximada en los nodos.*

Es evidente que si (7) se cumple para todo $v_h \in H_h$, entonces también se cumple en particular para las funciones de forma ϕ_i , $1 \leq i \leq n$, de la base H_h . Y recíprocamente, como H_h es un espacio vectorial y $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ una base de este espacio, entonces si (7) se cumple para todo ϕ_i , $1 \leq i \leq n$, entonces también se cumple para todo $v_h \in H_h$. De esta forma, la ecuación (7) se transforma en el sistema de ecuaciones lineales algebraico

$$\sum_{i=1}^n u_h^i a(\phi_i, \phi_j) = \langle f, \phi_j \rangle, \quad 1 \leq j \leq n$$

y teniendo en cuenta las propiedades de las funciones ϕ_i se obtiene

$$\begin{cases} a(\phi_1, \phi_1) u_h^1 + a(\phi_1, \phi_2) u_h^2 + 0 & = \langle f, \phi_1 \rangle \\ \dots & \dots \\ 0 + a(\phi_i, \phi_{i-1}) u_h^{i-1} + a(\phi_i, \phi_i) u_h^i + a(\phi_i, \phi_{i+1}) u_h^{i+1} + 0 & = \langle f, \phi_i \rangle \\ \dots & \dots \\ 0 + a(\phi_n, \phi_{n-1}) u_h^{n-1} + a(\phi_n, \phi_n) u_h^n & = \langle f, \phi_n \rangle \end{cases}$$

Escribimos este sistema en la forma

$$KU = F \quad (9)$$

donde la matriz K , que en el lenguaje de los elementos finitos se llama **matriz de rigidez**, está dada por

$$K = \left[K_{ij} = a(\phi_i, \phi_j) = \int_0^L \kappa(x) \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx \right]_{n \times n},$$

U es el vector incógnita dado en (8), y $F = [\langle f, \phi_i \rangle]_{1 \times n}$ es el término independiente del sistema. Para hacernos una idea de la estructura de la matriz de rigidez K vamos a calcular los elementos de las dos primeras filas de dicha matriz. Teniendo en cuenta la definición de las funciones de forma se tiene que

$$\begin{aligned} K_{11} &= a(\phi_1, \phi_1) \\ &= \int_0^L \kappa(x) \phi_1'(x) \phi_1'(x) dx \\ &= \int_{c_0}^{c_1} \kappa(x) \frac{1}{h} \frac{1}{h} dx + \int_{c_1}^{c_2} \kappa(x) \left(\frac{-1}{h} \right) \left(\frac{-1}{h} \right) dx \\ &= \frac{1}{h^2} \int_{c_0}^{c_1} \kappa(x) dx + \frac{1}{h^2} \int_{c_1}^{c_2} \kappa(x) dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{12} &= a(\phi_1, \phi_2) \\ &= \int_{c_0}^{c_1} \kappa(x) \frac{1}{h} 0 dx + \int_{c_1}^{c_2} \kappa(x) \left(\frac{-1}{h} \right) \frac{1}{h} dx \\ &= -\frac{1}{h^2} \int_{c_1}^{c_2} \kappa(x) dx, \end{aligned}$$

y $K_{13} = K_{14} = \dots = K_{1n} = 0$ ya que

$$\text{sop } \phi_1 \cap \text{sop } \phi_3 = \{c_2\}, \quad \text{y} \quad \text{sop } \phi_1 \cap \text{sop } \phi_4 = \dots = \text{sop } \phi_1 \cap \text{sop } \phi_n = \emptyset.$$

Recordemos que $\text{sop } \phi_i = [c_{i-1}, c_{i+1}]$ es el soporte de la función de forma ϕ_i , $1 \leq i \leq n$. Con respecto a la segunda fila de la matriz de rigidez, se tiene

$$K_{21} = a(\phi_2, \phi_1) = K_{12},$$

ya que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es simétrica,

$$\begin{aligned} K_{22} &= \frac{1}{h^2} \int_{c_1}^{c_2} \kappa(x) dx + \frac{1}{h^2} \int_{c_2}^{c_3} \kappa(x) dx, \\ K_{23} &= -\frac{1}{h^2} \int_{c_2}^{c_3} \kappa(x) dx, \end{aligned}$$

y al igual que antes $K_{24} = K_{25} = \dots = K_{2n} = 0$. Observamos por tanto que la matriz de rigidez presenta el siguiente aspecto

$$K = \begin{bmatrix} X & X & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ X & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & X & X & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & X & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & X & X \end{bmatrix}$$

donde por X denotamos elementos no nulos. Al tratarse de una matriz tridiagonal, un método particularmente eficaz para resolver el sistema (9) es el de Gauss.

Nótese también que para calcular los elementos de la matriz de rigidez, y también del término no homogéneo F hemos de calcular muchas integrales. El cálculo de estas integrales también se lleva a cabo a través de métodos de integración numérica: trapecio, punto medio, Simpson, ..., donde utilizaremos uno u otro método dependiendo del tipo de funciones de forma que tengamos y también de las propiedades de las funciones κ y f que aparecen en dichas integrales. Una nueva mirada al cálculo de los elementos de la matriz de rigidez K nos permite percatarnos que de hecho muchas de estas integrales se repiten. Por ejemplo, en el cálculo de K_{11} y K_{12} se repite la integral

$$\int_{c_1}^{c_2} \kappa(x) dx.$$

Esta repetición de cálculos supone un coste computacional que puede llegar a desbordar, cuando se consideran muchos elementos finitos, la capacidad de cálculo de los ordenadores. Hemos pues de intentar ser ordenados para facilitar el trabajo al ordenador. En la práctica se suele proceder haciendo todos los cálculos sobre un único elemento que se toma de referencia y luego *ensamblarlos* todos en la matriz de rigidez.

3.2 Simulación Numérica de Elementos Finitos con Matlab

En esta sección utilizaremos el código de elementos finitos de Matlab para calcular de manera aproximada la solución débil del problema modelo unidimensional que venimos analizando a lo largo de estas notas.

Como ejemplo ilustrativo, consideremos el problema modelo (PM) con carga puntual localizada en el punto medio de la cuerda. El modelo matemático es

$$\begin{cases} -u'' = -\delta_{1/2} & \text{en }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

donde $-\delta_{1/2}$ es, con signo cambiado, la Delta de Dirac centrada en $x = 1/2$. Como ya sabemos, la formulación variacional de este problema consiste en encontrar

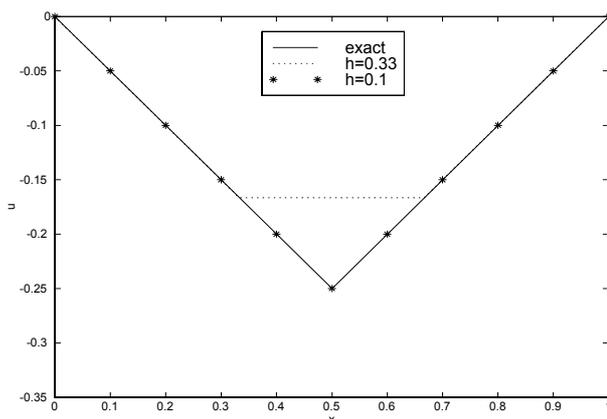
$u \in H_0^1(0, 1)$ cumpliendo

$$\int_0^1 u'(x) v'(x) dx = -v(1/2) \quad \forall v \in H_0^1(0, 1).$$

La solución exacta de este problema es

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & 0 \leq x < 1/2 \\ \frac{x}{2} - \frac{1}{2}, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

En la gráfica que sigue se muestran la solución exacta u y dos aproximaciones numéricas, obtenidas con Matlab, que se corresponden a tomar $h = 0.33$ y $h = 0.1$, donde al igual que antes $h = 1/(n+1)$ denota el tamaño de la partición del intervalo $[0, 1]$.



3.3 Control del Error en el MEF

Lo acontecido en la sección anterior (esto es, el conocer la solución exacta del problema) no es precisamente lo que suele suceder en la práctica donde, utilizamos elementos finitos para calcular la solución (*que a priori desconocemos*) de un problema determinado. Hemos pues de disponer de resultados teóricos que nos permitan tener una cierta fiabilidad de los resultados que obtenemos con elementos finitos. Estos resultados sobre el control del error en el MEF no son en absoluto fáciles de probar e involucran de nuevo aspectos nada triviales y de alto calado matemático. A modo ilustrativo, recogemos a continuación un primer resultado de convergencia del algoritmo MEF para el problema modelo (PM). Para más detalles, [1, 8].

Teorema 2 Sea $[0, L] = \bigcup_{i=0}^N [a_i, a_{i+1}]$ y $h = \max_{0 \leq i \leq N} (a_{i+1} - a_i)$. Entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1} = 0.$$

4 MEF para Problemas Evolutivos

Concluimos estas notas con una muy breve aproximación al cálculo con elementos finitos de las soluciones de modelos que hacen intervenir de manera explícita la variable temporal t . Nos limitaremos al caso de la ecuación del calor aunque un análisis esencialmente análogo puede llevarse a cabo en otros modelos como es el caso de la ecuación de ondas.

Consideremos el siguiente modelo para la ecuación del calor

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} (\kappa \nabla u) = f & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ u = 0 & \text{en } \Gamma \times (0, T) \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

donde ρ es densidad, c calor específico, κ conductividad térmica, f la fuente de generación interna de calor, y $u = u(x, t)$ es la temperatura.

La formulación variacional o débil de este problema consiste en encontrar una función $u = u(x, t)$, que llamaremos solución débil del problema y que ha de satisfacer:

(i) Para cada $t > 0$, $u(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega)$,

(ii) Para cada $t > 0$ y para cada $\phi \in H_0^1(\Omega)$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho c u \phi \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nabla \phi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f \phi \, d\mathbf{x}, \quad (10)$$

(iii) $u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$.

Para la aproximación por elementos finitos de la solución débil se consideran el mismo espacio de aproximación H_h y las mismas funciones de forma $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq n}$ que en el caso estacionario, y se busca la solución aproximada u_h en la forma

$$u_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n u_h^i(t) \phi_i(\mathbf{x}).$$

Se formula entonces el problema variacional (10) en el espacio H_h y se concluye que el vector incógnita

$$U(t) = \begin{bmatrix} u_h^1(t) \\ u_h^2(t) \\ \vdots \\ u_h^n(t) \end{bmatrix}$$

ha de ser solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} M \frac{dU}{dt} + KU = F \\ U(0) = (U_i(0) = u_0(x_i)) \end{cases}$$

donde

$$M = \left[M_{ij} = \int_{\Omega} \rho c \phi_i \phi_j \right]_{n \times n}$$

se denomina **matriz de masa**,

$$K = \left[K_{ij} = a(\phi_i, \phi_j) = \int_0^L \kappa(x) \nabla \phi_i(x) \nabla \phi_j(x) dx \right]_{n \times n},$$

es la matriz de rigidez, $F = [\langle f, \phi_i \rangle]_{1 \times n}$ es el término independiente, y \mathbf{x}_i son los nodos de la malla.

Con la resolución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias anterior concluye el proceso.

Referencias

- [1] A. Bermúdez de Castro, J. Durany, C. Moreno, P. Quintela, J. M. Viaño, *Notas del Curso Simulación Numérica en Ingeniería con Elementos Finitos*, Universidade de Santiago de Compostela, 1999.
- [2] H. Brèzis, *Análisis Funcional*, Alianza Universidad Textos, 1984
- [3] E. Casas, *Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cantabria, 1992.
- [4] M. Doblaré, L. Gracia, *Fundamentos de la Elasticidad Lineal*, Síntesis, 1998.
- [5] G. Duvaut, *Mécanique des Milieux Continus*, Dunod, Paris, 1998.
- [6] A. Liñán, *Mecánica de Fluidos*, Vol. 1, Publicaciones de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos, Universidad Politécnica de Madrid, 2000.
- [7] F. Periago, *A first step towards variational methods in engineering*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology Vol. 34 No. 4, 549-559, 2003.
- [8] P. A. Raviart, J. M. Thomas, *Introduction à l'Analyse Numérique des Équations aux Dérivées Partielles*, Masson, 1988.
- [9] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Paris Herman, 1950.
- [10] J. L. Vázquez, *Fundamentos Matemáticos de la Mecánica de Fluidos*, Apuntes curso de doctorado UAM, 1998.
- [11] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, *El Método de los Elementos Finitos*, Vol. 1 y 2, McGraw-Hill, Barcelona, 1994.